

水流による砂れきの saltation の機構 (1)

土屋 義人・渡戸 健介・青山 俊樹

ON THE MECHANISM OF SALTATION OF A SAND PARTICLE IN A TURBULENT STREAM (1)

By Yoshito TSUCHIYA, Kensuke WATADO
and Toshiki AOYAMA

Synopsis

In order to establish the mechanics of sand transport in both water streams and air flows, the mechanism of saltation of a single sand particle should be considered. After some considerations on the equation of motion of an accelerating spherical particle in fluid, an approach to establish the mechanics of saltation of a single sand particle in streams, including the sliding and rolling motion, is presented. It was found that the theoretical results of the rolling distance and distribution characteristics and the velocity of a sand particle are in good agreement with experimental ones. A theory of the saltation of a sand particle by collision of the rolling particle with a bed sand particle is established. The theoretical results of the saltation height of a sand particle and the distribution characteristics are in good agreement with experimental ones.

1. 緒 言

水流または空気の流れによる砂れきの運動機構の解明は、流砂力学や飛砂の力学の基本的課題である。掃流砂れきの運動のように、その現象が一般に流れと砂れき面との境界に限定される場合には、流れそのものの特性が複雑であるように、砂れきの運動が流れと砂れき面の特性に大きく関係し、それが一般に個々の砂れきの運動がかなり特徴的であるばかりでなく、多分に推測的要素をもっているために、その力学的取扱いはあまり進展していないと思われる。

一方、水工学上の実際問題においては、河川の流砂量や海岸の飛砂量の推定が重要であるために、これまでの多くの研究のほとんどが、流れによる砂れきの輸送量の究明に終始していたように思われる。確かに流砂力学の終局的目標の一つは、砂れきの輸送量の究明ではあるが、その力学的な背景の必要性はいうまでもなく、流れの中での砂れきの運動そのものを究明することが、この分野の学問的体系の必須課題であって、流砂量など流れによる砂れきの輸送量の究明はそれからおのずから求められるはずであると考えられる。流れの中における砂れきの運動を究明することによって、流砂ある河川の流速分布や抵抗法則の究明にはじまる派生的に追求される諸現象はきわめて多い。

本研究はこの観点にたつて、流れの中における砂れきの運動機構を究明する第一歩として、比較的粒径の大きい単一砂れきの床面近傍における運動を水理学的に究明し、その saltation の機構を明らかにしようと試みたものである。この種の研究は Bagnold¹⁾ がその名著において飛砂現象の saltation を詳細に論じており、また河村²⁾ も飛砂理論の展開において saltation の力学的取扱いを示しているが、saltation そのも

のについては直接実験結果と比較検討していない。また、最近 Owen⁹⁾ は同様な saltation の概念で飛砂の運動を論じ、これをもとにして飛砂量公式の提案にまで及んでいるが、河村と同様 saltation についての詳細な比較検討はすべて省略されている。飛砂現象における砂粒の saltation に関する河村の取扱い、単一砂粒の運動方程式から出発して、飛砂の密度分布や飛砂量分布まで系統的な方法論において展開されている点は、現在においても高く評価されるべきと思われる。ただ、水流の場合の saltation にそのまま適用するためには抵抗法則として Stokes の法則を用いていることや砂粒の運動形式に対する検討など実際現象に立脚した取扱いを再検討すべきように考えられる。

一方、水流による砂粒の床面付近における運動に関して、Kalinske⁴⁾ は砂れきの運動はいわゆる滑動 (sliding motion) が主体であって、飛砂現象と相違して砂れきの跳躍現象はほとんど無視されると考えている。しかし、著者らの実験^{5), 6)} によると、床面付近の砂れきの運動は、必ずしも滑動のみでなく、いわゆる saltation または skipping の運動をしていることが認められる。最近 Yalin⁷⁾ はこの観点に立って、飛砂の場合と同様な取扱いを、水流による砂れきの saltation の解明に適用し、砂れきの運動方程式からその運動機構を考察して流砂量公式の提案を試みている。しかしながら、この理論的取扱いにおいては、飛砂の結果をそのまま適用していることから問題点も少なくなく、また saltation に関する実験結果との比較は全く行っていない。その後、岸⁸⁾ は Yalin の理論に砂れきに働く仮想質量力を考慮した修正理論を展開するとともに、単一砂れきの saltation の軌跡をストロボ装置を用いて写真撮影し、その結果と理論結果との比較を行なった。

以上述べた諸研究における砂れきの saltation に関する理論的取扱いにおいては、河村や Owen のように、砂れきの初期速度を床面近傍の変動速度に対応させて摩擦速度に関係づけるものと、Yalin や岸のように Einstein ら⁹⁾ の実験結果をそのまま適用して、砂れきに働く揚力を考慮し、初期速度なしでとび出す運動として取扱うものがある。この砂れきに働く揚力に関しては、Einstein ら⁹⁾ や Chepil¹⁰⁾ らによって実験的に種々議論されてきたが、その測定の困難さとあいまって、十分信頼のおける結論はいまだえられていないようであるが、Chepil¹¹⁾ はこの揚力が砂れきの saltation の主原因となるには小さすぎることを実験的に示し、そこには砂れきの床面砂れきとの衝突が必要であろうと述べている。

著者ら⁵⁾ も床面近傍における単一砂れきの saltation に関する詳細な実験を行なって、この現象の特性を究明するようつとめてきたが、その結果によると、砂れきの床面付近の運動には、つぎの二つの特徴的な運動があることがわかった。その一つは Kalinske がいうようないわゆる滑動に近い運動であって、砂れきは床面砂れきとの接触を保ちつつ運動するものであり、それは一般に砂れき自身の回転を伴うものである。いま一つは跳躍運動であって saltation の主現象と考えられるものである。本研究では、この観察結果にもとづいて単一砂れきの saltation の機構をできるだけ力学的に取扱うよう試みるつもりであるが、砂れきの運動に及ぼす流水の乱れの影響および砂れきに作用する前述した揚力に関する検討は、今後の詳細な実験的研究によって究明していくつもりである。したがって、本研究における理論的考察においては、これら両者の影響はすべて省略して、砂れきの床面砂れきとの衝突に重点をおいた saltation の理論とその実験結果への適用を示して、流砂力学の基礎とするつもりである。

2. 砂れきの運動方程式に関する考察

水流中における砂れきの運動方程式は、種々の観点から検討されているが、砂れき周辺の流れの影響をどのように扱うか、また砂れきに作用する仮想質量力をどう表現するかにおいて残された問題がきわめて多いと思われる。ここでは、次章において論ずる砂れきの saltation の考察において用いるべき運動方程式について若干の考察をしたい。実験結果との比較において検討するために、球体の非定常運動の代表的なものとして、その非定常沈降の現象をとりあげて仮想質量力に重点をおいて考察することにする。

1) 運動方程式

ここで取扱う砂れきは、十分球体とみなされるものとし、運動方程式中では球体そのものについて考える

ことにすれば、流体抵抗として Stokes の法則が適用される場合には、その運動方程式は Basset¹²⁾ によって次式のようにあらわされる。

$$(\pi/6)d^3\sigma dU/dt = 3\pi\mu d(u-U) + (\pi/6)d^3\rho du/dt + (1/2)(\pi/6)d^3\rho\{(du/dt) - (dU/dt)\} \\ + (3/2)d^2\sqrt{\pi\rho\mu} \int_{t_0}^t \{[(du/dt') - (dU/dt')]/\sqrt{t-t'}\} dt' + F_e \quad \cdots \cdots \cdots (2.1)$$

ここに、 U ；砂れきの速度、 u ；水流の流速、 t ；時間、 t_0 ；時間の初期値、 d ；砂れきの直径、 ρ ；水の密度、 σ ；砂れきの密度、 μ ；水の粘性係数、および F_e ；砂れきに働く質量力、である。上式中左辺の加速度項および右辺第1項の抵抗項を除いて、各項の物理的意味はつぎのようである。右辺第2項はいわゆる圧力項であり、砂れきの周辺における圧力勾配によって生ずる抵抗であって、水流の加速運動に依存する。第3項は仮想質量力であり、第4はいわゆる Basset 項といわれるものであって、砂れき周辺の流れの状態が定常運動の場合と相違するために生ずる抵抗であって、仮想質量力の一つであると考えられる。(2.1) 式ではいうまでもなく、Stokes の法則を適用していることから、その適用範囲は Reynolds 数 $(u-U)d/\nu$ の値が1より十分小さいことが要求される。

Odar¹³⁾ らは相対速度の2乗に比例する抵抗則を仮定した場合の運動方程式に対しても、(2.1) 式と全く同様な Basset 項が必要であるとして、それを振動する球の抵抗に関する実験結果に適用して仮想質量力係数と加速度などとの関係を主として実験的に検討し、速度の2乗則が成立する範囲に対しても Basset 項の表現でよいことを示している。一方、大島¹⁴⁾は一般力学における Lagrange の方法によって、流れの中における球状粒子の運動方程式を導いて、Magnus 効果を含めた場合の砂れきの運動を論じてきわめて興味ある結果を示しているが、ここでは、直接この運動方程式を用いないので省略する。

2) 球体の非定常沈降に関する考察

ここでは、(2.1) 式の適用性を検討するために、非定常運動のもっとも簡単な場合として静水中における球の非定常沈降をとりあげ、仮想質量力とくに Basset 項の影響について二、三の考察を進めよう。まず、抵抗法則として Stokes の法則が適用される場合をとりあげることによれば、(2.1) 式より静水中における球の非定常沈降の運動方程式は、沈降速度を w としてつぎのようにならわされる。

$$(\pi/6)d^3\rho(\sigma/\rho+1/2)dw/dt = (\pi/6)d^3\rho(\sigma/\rho-1)g \\ - 3\pi\mu dw - (3/2)d^2\sqrt{\pi\rho\mu} \int_0^t \{(dw/dt')/\sqrt{t-t'}\} dt' \quad \cdots \cdots \cdots (2.2)$$

(2.2) 式の $t=0$ において $w=0$ という境界条件のもとでの解は、すでに Brush ら¹⁵⁾ によってえられているが、Basset 項の影響が明確に示されるように無次元表示すると、(2.2) 式はつぎのようにならわされる。

$$d\bar{w}/d\tau = 18(1-\bar{w}) - a \int_0^\tau \{(d\bar{w}/d\tau')/\sqrt{\tau-\tau'}\} d\tau' \quad \cdots \cdots \cdots (2.3)$$

ここに、 $\bar{w}=w/w_0$ 、 $\tau=\nu t/d^2(\sigma/\rho+1/2)$ 、 $a^2=(81/\pi)/(\sigma/\rho+1/2)$ 、 w_0 ；粒子の終末沈降速度、および ν ；動粘性係数である。すなわち、(2.1) 式における Basset 項は、(2.3) 式中の係数 a によってあらわされることになる。Laplace 変換によって解いた (2.3) 式の解は、つぎのようにならわされる。

$$\bar{w} = 1 - (6\sqrt{2}/\sqrt{72-a^2\pi}) \exp\{-(72-a^2\pi)(\pi/4)\} [\exp(a^2\pi/4) \\ \cos\{(a\pi\sqrt{\pi}/2)/\sqrt{72-a^2\pi} + \tan^{-1}(a\sqrt{\pi}/\sqrt{72-a^2\pi})\} \{1 - (2/\sqrt{\pi}) \\ \int_0^{(a\sqrt{\pi}/2)\sqrt{\tau}} e^{-2x^2} dx\} - (2/\pi)\sqrt{\tau} \int_0^{\sqrt{72-a^2\pi}/2} e^{x^2} \sin\{a\sqrt{\pi}(x - \sqrt{72-a^2\pi}/2)\tau \\ - \tan^{-1}(a\sqrt{\pi}/\sqrt{72-a^2\pi})\} dx] \quad \cdots \cdots \cdots (2.4)$$

(2.4) 式を Brush らのように級数でなく、 τ の値の大きな範囲に対しても検討するために、 $a=0$ (すなわち $\sigma/\rho=\infty$ であって飛砂の場合に相当する) および $a=2.86$ (すなわち $\sigma/\rho=2.65$ であって流砂の場合に相当する) の場合について、数値積分した結果が Fig. 2.1 に示されている。図中には、Reynolds 数 $w_0 d/\nu$ の値が 0.9 である Moorman の実験値が示されている。この場合、この実験値が Stokes の法則の

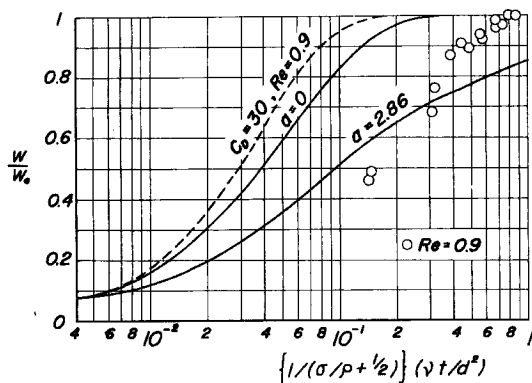


Fig. 2.1 Comparison between theoretical curves of free falling velocity of a sphere in Stokes range and experimental values.

かなり Basset 項を考察した理論曲線に近く、この事実をあらわしているといつてよい。

つぎに、速度の2乗則が成立する範囲について考察する場合に、(2.2)式に対応する式から直接議論すると、どうしても数値計算によらざるをえないので、ここでは Basset 項を仮定しない次式のような定常の運動方程式を適用して考察する。

$$(\pi/6)d^3\rho(\sigma/\rho+1/2)dw/dt = (\pi/6)d^3\rho(\sigma/\rho-1)g - (\pi/8)\rho d^2C_D w^2 \quad (2.5)$$

ここに、 C_D は前述したように球の抗力係数をあらわす。 $t=0$ において $w=0$ として(2.6)式の解は、 C_D を一定と仮定した場合、次式であたえられる¹⁶⁾。

$$\bar{w} = \tanh \zeta, \quad \zeta = \{(\sigma/\rho-1)/(\sigma/\rho+1/2)\}(gt/w_0) \quad (2.6)$$

ここに、終末沈降速度に対して $w_0 = \{(4/3)(\sigma/\rho-1)(gd/C_D)\}^{1/2}$ である。Fig. 2.2は(2.6)式と著者らによる実験結果とを比較したものである。この実験値のうち Reynolds 数の値が大きいものは空気中のものであり、そのほかは水中の実験値であるが、いずれに対しても(2.6)式であらわされる理論曲線とよく一致することがわかる。ただし、この場合理論曲線を計算する場合には、 C_D の値として終末沈降速度に対する Reynolds $w_0 d/\nu$ に対応した抗力係数 C_D の値を用いた。

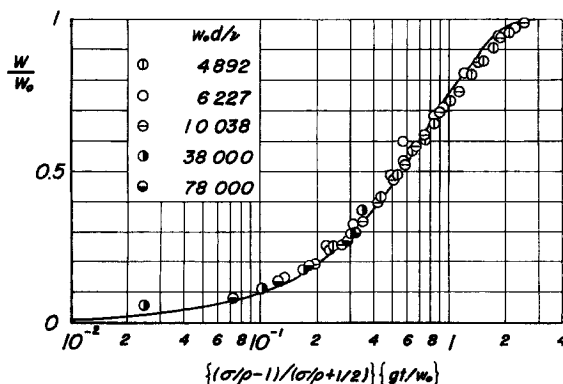


Fig. 2.2 Comparison between theoretical curve of free falling velocity of a sphere beyond Stokes range and experimental values.

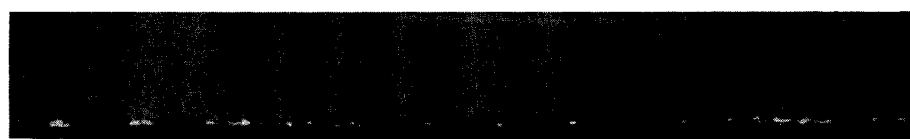
適用される範囲を若干はずれていると考えられるので、図中には比較のために後述する速度の2乗則を適用した理論式において、Reynolds 数の値が0.9に対応した抗力係数 C_D の値30を用いて計算した理論曲線が示されている。著者らもこの範囲における実験を試みたが、測定時間がきわめて短いことと無初速で沈降させることがきわめてむずかしく、信頼すべき結果はえられなかったので、Moorman の結果のみで比較した。この結果からわかるように、(2.4)式右辺第2項としてあらわされている Basset 項の影響はきわめて大きく、この種の非定常現象にはかくことができないことがわかる。そして、明確には結論できないが、Moorman の実験結果も

以上の考察からわかるように、速度の2乗に比例する抵抗則を適用する場合には、Odar らの結論と相違して、Basset 項を考察しない運動方程式で十分実験結果を説明できることがわかる。これに対して、Stokes の法則が成立する範囲では、Basset 項を考慮すべきであると結論してよいであろう。これらの結論は、球体の非定常沈降現象についてのみの検討であるが、一般の非定常運動に対しても同様に考えてもよいと思われる。なお、砂れきの運動を考察する場合には、当然砂れきの形状の影響が大きくあらわれるものと考えられ、たとえば以上のべた沈降現象においても、厳密には必ずしも一次的な運動として考えること

ができないことを Albertson ら¹⁷⁾の実験結果は示しているが、ここではこの形状の影響はすべて省略して議論することにする。

3. 砂れきの転動機構

水流による単一の球状砂れきの床面近傍における運動をストロボ装置によって写真撮影した著者らの結果の数例を **Photo. 1** に示す。これによると、流れの状態が限界掃流力以上である場合には、床面に静止させた砂れきは、最初のある距離は床面にほとんど接触しながら滑動 (sliding) または転動 (rolling) するが、やがてある距離から跳躍 (skipping または saltation) をしながら、またときには転動に近い運動をとりながら流下することがわかる。ここでは、これら一連の運動において、その最初にみられる滑動または転動の力学的な基礎について考察してみよう。



(a) $d=0.382$ cm, $\sigma/\rho=1.502$, $u_*=5.94$ cm/sec



(b) $d=0.593$ cm, $\sigma/\rho=1.343$, $u_*=6.55$ cm/sec

Photo. 2.1 Some photographs of saltation of a spherical sand particle in streams (after Tsuchiya and Sumino).

(1) 運動方程式および転動速度

前述した砂れきの滑動または転動を種々の観点から観察すると、確かに砂れきはかなり回転して運動していることがわかるが、滑動を主体とするのかあるいは転動を主体とするかは明らかでない。したがって、ここでは便宜上砂れきの運動をつぎの三つに分けて、それぞれに対して運動方程式を作り、その解としてあらわされる砂れきの移動速度と実験結果との比較によって、その運動の形式を考察することにする。すなわち、

- i) 砂れき床面をすべりながら運動するいわゆる滑動 (sliding) であると考えた場合
- ii) 砂れきの回転が主体となって運動するいわゆる転動 (rolling) であると考えた場合
- iii) 砂れきのすべりと回転とが共存し、滑動しながら転動 (sliding-rolling) すると考えた場合

1) 砂れきの滑動

ここでは、簡単のために砂れき床面の凹凸を無視し、砂れきの運動に対しては一律な摩擦力が作用する場を対象とする。また、砂れきの大きさに関する Reynolds 数は比較的大きく、流体抵抗としては相対速度の 2 乗に比例する場合を対象とし、したがって前章の考察をもとにして Basset 項の影響は省略されるものとする。さらに、Yalin や岸らが積極的に導入した揚力は考慮せず、また砂れきに動く流体および砂れきの回転に起因する Magnus 効果も十分小さいものとして省略すれば、砂れきの運動方程式は、つぎのようにあらわされる。

$$dU_1/dt = -(\sigma/\rho - 1)\bar{\mu}g/(\sigma/\rho + 1/2) + (3/4)C_D(u - U_1)^2/(\sigma/\rho + 1/2)d \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

ここに、 U_1 : 砂れきの滑動速度、 $\bar{\mu}$: 砂れきと砂れき床面との平均の動摩擦係数、 u : 砂れきの運動を特徴づける砂れき近傍の流速および C_D : Reynolds 数 $(u - U)d/\nu$ によって変化する砂れきの抗力係数、である。

いま、床面近傍における流速が摩擦速度との関係において、 $u \approx A_r u^*$ とあらわされるものとし、 $t=0$ で $U_1=0$ とする初期条件のもとで (3.1) 式を積分すれば、つぎようになる。

$$U_1/u^* = (F^2 - A_r^2)\{1 - e^{(3/2)F\tau}\}/\{(F - A_r) + (F + A_r)e^{(3/2)F\tau}\} \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} \tau &= \{C_D/(\sigma/\rho + 1/2)\}(u^*t/d) \\ F^2 &= (3/4)\bar{\mu}\{(\sigma/\rho - 1)gd/u^{*2}\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

いうまでもなく、(3.2) 式において $\tau \rightarrow \infty$ とすれば、 $U_1 = (A_r - F)u^*$ に近づくことがわかる。

2) 砂れきの転動

砂れきと砂れき床面との間は、力学的に十分粗であるとし、砂れきはすべることなく回転のみで運動するものと考えことにすれば、つぎの運動方程式が成立する。

$$dU_2/dt = -F/(\pi/6)\rho d^3(\sigma/\rho + 1/2) + (3/4)C_D(u - U_2)^2/(\sigma/\rho + 1/2)d \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

また、砂れきの中心軸に関する角運動量方程式および床面との接触点での条件は、それぞれつぎのようにあらわされる。

$$(I + I_0)d\omega/dt = F(d/2), \quad U_2 - (d/2)\omega = 0 \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

ここに、 F : 砂れきに作用する摩擦力、 I : 砂れきの中心軸に関する慣性 2 次モーメントであって、球の場合には $(\pi/60)d^3\sigma$ 、 I_0 : 仮想質量力に対応するものであって、ここでは $(\pi/60)d^3(\rho/2)$ と仮定したもの、および ω : 砂れきの中心軸に関する角速度、である。

前述した滑動の場合と同様に、(3.4) および (3.5) 式の解を求めれば、つぎのようにな。

$$U_2/u^* = (15/28)A_r^2\tau/\{1 + (15/28)A_r\tau\} \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

前述した滑動の場合と同様に、 $\tau \rightarrow \infty$ の場合には一定値に漸近し、その値は $U_2 = A_r u^*$ となる。

3) 砂れきの滑動および転動

この場合は、砂れきと砂れき床面との接触点で砂れきの回転のみでなく、すべりも生ずる場合であって、その力学的考察は一般にむずかしい。ここでは、簡単に考えて、(3.5) 式の第 2 式がつぎのように修正されるものと仮定しよう。

$$\alpha U_3 - (d/2)\omega = 0 \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

ここに、 α はその接触点での砂れきのすべりに関する係数であって、砂れきの回転速度の $1/\alpha$ がすべりによる中心の移動速度に変わることを意味する。そして、ここではこの値を一定値として取扱うことにすれば、(3.6) 式に対応する解は、つぎのようにあらわされる。

$$U_3/u^* = \frac{(3/4)\{1/(1+2\alpha/5)\}A_r^2\tau}{1 + (3/4)\{1/(1+2\alpha/5)\}A_r\tau} \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

したがって、この場合も 2) と同様に、時間の経過とともに、砂れきの速度は $U_s = A_r u^*$ に近づくことになる。

つぎに、砂れきが転動するための条件について、2) および 3) の場合に対して一緒に考察すれば、つぎのようである。まず、転動のみの場合に対しては、砂れきが滑動しないための条件は、

$$F \leq (\sigma - \rho)(\pi/6)d^3 g \bar{\mu} \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

であらわされるので、(3.9) 式中の F に (3.6) 式を用いた (3.5) 式より求められる関係を代入して、若干の変形をすれば、転動するために必要な摩擦係数の限界を与えるものとして、つぎの関係がえられる。

$$\bar{\mu} \geq (3/14) C_D (A_r - U_s/u^*)^2 \{u^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gd\} \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

一方、3) で説明したような若干の滑動を許す場合の転動に対して、厳密に同様な考察を進めることはむずかしいが、ここでは簡単に考えて、(3.8) 式を代入した式であらわされる F の値を (3.9) 式に代入すれば、つぎのようになる。

$$\bar{\mu} \geq (3/10) \{C_D/(1+2\alpha/5)\} (A_r - U_s/u^*)^2 \{u^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gd\} \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

ただし、この場合には、平均的に考えた場合の転動条件であるが、砂れき床面の凹凸を考えると、若干の滑動を考えた場合の転動機構の方が実験結果に対応するように思われる。

4) 砂れきの転動距離が粒径程度である場合の砂れきの運動機構

以上述べた砂れきの滑動あるいは転滑の機構は、砂れき床面がいちおう一様な摩擦の場と考えられることを前提としている。しかしながら、砂れき床面は当然のことながら粒径程度の discrete な特性をもったいわば不均一な場である。したがって、これまでの考察の結果が適用されるのは、砂れきの滑動または転動の距離が粒径より十分大きいことが要求されるが、その限界は実験結果との比較によって明らかにするより方法がない。ここでは、この転動距離が粒径程度になった場合の砂れきの運動について考えておくことにしたい。

砂れきが転動から跳躍に移行するための条件については、詳細に後述するつもりであるが、静止から砂れきが運動を開始する場合、もし砂れきの加速が急激で、運動開始後直ちに隣接する砂れきに衝突して跳躍に移行する場合を想定すると、この場合には床面の discrete な性質のために、砂れきには摩擦力は作用しないと考えるべきであろう。したがって、この場合の砂れきの運動方程式は、(3.4) 式において $F=0$ とした次式であたえられると仮定しよう。

$$dU_1/dt = (3/4) \{C_D/(\sigma/\rho + 1/2)d\} (u_1 - U_1)^2 \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

ここに、 U_1 ：この場合の砂れきの速度、および u_1 ：砂れきの近傍における流速、である。前述した場合と同様に、 $t=0$ で $U_1=0$ とし、かつこのような場合には砂れき近傍の流速とくにその時間的変動に大きく関係するものと考えられるので、 $\bar{u} = u_1/u^*$ とあらわして (3.12) 式の解を求めれば、つぎのようになる。

$$U_1/u^* = (3/4) \bar{u}^2 \tau / \{1 + (3/4) \bar{u} \tau\} \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

この結果によれば、前述した考察からわかるように、一般に τ の値はきわめて短時間であるけれども、このような加速が著しい場合では u_1 の値はきわめて大きいので U_1 は u_1 に近い値をとるようになるものと思われる。

いま、(3.13) 式から砂れきの転動距離と時間との関係を求めると、つぎのようになる。

$$x/d = \bar{u} [(3/4) \tau - \log \{1 + (3/4) \bar{u} \tau\}] \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

さらに、 τ の値が十分小さいとして、その 3 次以上の項を無視し、砂れきの転動速度の距離的变化をあらわす関係を求めると、近似的につぎのようになる。

$$U_1/u^* = \bar{u} \sqrt{2(x/d)N} / \{1 + \sqrt{2(x/d)N}\} \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

$$\text{ここに、} N = (3/4) \{C_D/(\sigma/\rho + 1/2)\} \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

5) 実験結果との比較および考察

著者ら⁵⁾ による単一球状砂れきの転動に関する実験結果と前述した理論にもとづく砂れきの転動速度の時

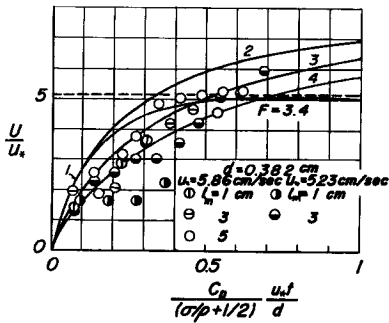


Fig. 3.1 Comparison between theoretical curves for sliding or rolling motion of a spherical sand particle in turbulent stream and experimental values.

間の変化と比較して、砂れきの運動法則を考察すれば、つぎのようである。まず、(3.2)、(3.6) および (3.8) 式と実験結果との比較を示したものが Fig. 3.1 である。ただし、ここで述べる実験結果は 0.375 cm 粒径のほとんど一様な砂粒で構成される粗面水路床に、粒径 0.382 cm で比重 1.502 の球状粒子を静止の状態から運動を開始させたものである。この場合、図中に示した曲線 1 は (3.2) 式において、できるだけ実験結果に一致するように $F=3.4$ と定められ、これから $\bar{\mu}$ の値を推定したものである。この推定においては、 C_D の値として砂れきの Reynolds 数に対応した $C_D=0.4$ を用いた。その結果 $\bar{\mu}=0.8$ をえたが、この図からわかるように、実験値はあまりよく理論曲線と一致しない。また、こうして求められた摩擦係数は物理的に考えて若干大きすぎるように思われる。つぎに、図中に示した曲線 2 は (3.6) 式にもとづく理論曲線であるが、完全な転動よりはかなり砂れきの速度が小さいことがわか

る。一方、この図によると、実験結果の範囲内では U/u^* の値はただだか 5~6 程度までの値であり、また $u^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd$ の値は最大 0.25 程度であるから、これらを (3.10) 式に代入すると、転動するために必要な $\bar{\mu}$ の大きさは 0.5 程度となるが、 U/u^* の値が小さい範囲では、 $\bar{\mu}$ はきわめて大きい値となるので、必ずしも転動の初期においては、滑動しないとはいえない。

つぎに、このことを参考にして、(3.8) 式による転動の場合について考察する。図中に示した曲線 3 および 4 は、それぞれ (3.8) 式において α の値を 3 および 4 としたものであるが、このように仮定すると、前述した理論曲線のうちでは、もっとも実験値と一致する結果となる。ただし、実験定数 α の値としてどちらが適当かは、実験値が散乱しているので決めたいが、測定精度から考えて、以下の議論では転動距離 l_m の長い実験値に比較的好く一致すると考えられる $\alpha=3$ の場合をとりあげることにする。すなわち、このことは、砂れきの回転による転動速度の約 1/3 が砂れきの移動に変換されることになるが、粒径程度の discrete な不均一床面では、むしろこの程度の滑りが存在してもよいように思われる。さらに詳細な議論は砂れき自身の回転速度と移動速度との関係を計測する必要があることはいうまでもない。以下本論文においては、前述した考察にもとづいて、砂れき床面付近における静止からの運動開始後の砂れきの運動については、その転動距離が十分ある場合には若干の滑動をとまなう回転運動であると考えことにし、回転運動が主体であることから簡単のためにこの運動を転動 (rolling) とよぶことにしたい。また、転動距離が粒径程度の場合における砂れきの運動も、ここでは便宜上転動とよぶことにする。

(2) 転動距離とその分布

Photo. 3.1 に示した単一砂れきの saltation の状況からもある程度わかるように、砂れきが転動から跳躍に移行するためには、転動砂れきはなんらかの機構によって鉛直上向きの力をうけるかあるいは転動速度の鉛直分力がのこることが必要であると思われる。まず、砂れきに作用する力としては、転動にもとづくいわゆる Magnus 効果として生ずる揚力があるが、前述したようにこれはあまり大きくないと考えられるので、ここでは砂れきが床面上の砂れきに衝突してその反発によって生ずる速度成分に着目して、若干の力学的な考察を進めることにしたい。そして、discrete な砂れき床面の特性などによる砂れきの転動距離の分布について、簡単な確率過程としての考察をつけ加えることにする。

1) 転動距離の平均値と掃流力との関係

砂れきが転動から跳躍へ移行する現象を観察すると、転動して砂れきの速度が次第に増すと、床面の砂れきと衝突して跳躍にうつることがみられた。ここでは、まず転動してきた砂れきが床面のある突起に衝突し

てそれをのりこえるための条件について考察する。

砂れきが $x=0$ より転動し始めて、距離 $x=l_m$ で高さ d の突起に衝突する直前の転動速度とその角速度をそれぞれ U_0 および ω_0 とする。砂れきは床面の砂れきとの衝突点を中心として回転し、突起をのりこえるための条件を考えるが、この場合一般に砂れきは流体抵抗や仮想質量力などを受けるが、簡単のためにこれらをすべて無視して、衝突の瞬間と突起をのりこえたときとに対して角運動量の保存則が成立するものと考えれば、衝突直後の角速度を ω'_0 とし、

$$\omega'_0 = (2/d)\alpha U_0 \{1 - (10/7)(d/d)\} \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

がえられる。したがって、この突起を砂れきがのりこえるためには、 $\omega'_0 > 0$ であることから、 $d/d < 7/10$ が成立すべきことになる。一方、エネルギー保存則が成立するものとする、水平と θ の傾きを示すときの角速度を ω とすれば、

$$\omega^2 = \omega_0'^2 - (40/7)(g/d^2) \{d + (d/2)(\sin \theta - 1)\} \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

がえられる。したがって、突起 d を砂れきが乗り越えるのは、 $\theta = \pi/2$ で $\omega > 0$ の場合である。この条件を求め、さらに (3.18) 式を代入すれば、

$$\frac{U_0^2}{(\sigma/\rho - 1)gd} \geq \frac{5}{\alpha^2} \cdot \frac{d/d}{\{1 - (10/7)(d/d)\}^2} \quad \dots\dots\dots (3.19)$$

この条件は、転動してきた砂れきが突起 d をのりこえる限界を規定するもので、必ずしも転動から跳躍への移行限界とは一致しない。そこで、この移行限界も (3.19) 式と同様な機構によるものと仮定して、実験結果に一致するように式中の d/d の値を決定することにする。そのためにまず、(3.19) 式を転動距離との関係にかきあらわすために、ここでは砂れきの転動機構として (3.8) 式が適用されるものとして、前述した U_0 と転動距離 x との関係を求めると、つぎようになる。

$$U_0/u^* = \sqrt{D} A_r \sqrt{x'} / \{1 + \sqrt{D} x'\} \quad \dots\dots\dots (3.20)$$

$$\text{ここに、} x' = \{2C_D/(\sigma/\rho + 1/2)\}(x/d), D = (3/4) \{1/(1 + 2\alpha/5)\} \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

この関係を (3.19) 式に代入すれば、転動距離の平均値 l_m を規定するための一つの近似的な表現として、つぎの関係がえられる。

$$\begin{aligned} d^2 \{1/(1 + 2\alpha/5)\}^2 A_r^2 \chi / [1 + (3/4) \{1/(1 + 2\alpha/5)\} \sqrt{\chi}]^2 \\ \geq (4/9) [(d/d) / \{1 - (10/7)(d/d)\}^2] \{(\sigma/\rho - 1)gd / u^{*2}(\sigma/\rho)\} \quad \dots\dots\dots (3.22) \end{aligned}$$

$$\text{ここに、} \chi = [C_D/(\sigma/\rho + 1/2)](l_m/d) \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

Fig. 3.2 は砂れきの転動距離と無次元化された掃流力との関係を示したものであり、図中には (3.22)

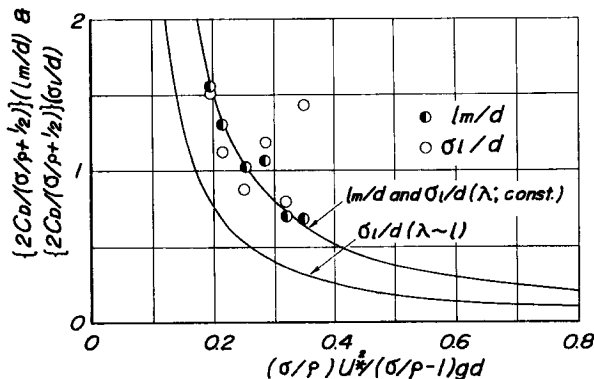


Fig. 3.2 Comparison between theoretical curves of mean value and standard deviation of rolling distance of a spherical sand particle and experimental values.

式であらわされる関係において、実験値に一致するように決定された $d/d=0.474$ の値を用いた理論曲線が示されている。この結果からわかるように、実験値はかなりよく理論曲線に一致し、 $(\sigma/\rho)u^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd$ の減少とともに l_m/d はかなり急速に小さくなることがわかる。しかし、前述したように、この転動距離が粒径程度以下になると、もはや砂れきの運動に対して床面の摩擦力を考慮することは不合理となる。したがって、この範囲では、4) で述べた考察結果を適用すべきと考える。

なお、以上の結果からもわかるように、飛砂の場合のように σ/ρ の値が大きくなると、 l_m/d の値はきわめて小さくなる。このことは、飛砂の場合、つねに 4) の形式の運動が主体となるのかも知れない。しかしながら、これまでの考察では仮想質量力が砂れきの衝突現象に及ぼす影響を考慮していないので、むしろ前述したような表現の掃流力の無次元表示ができたのかもしれない。この点はさらに研究を進めるべきであらう。

2) 転動距離の分布

砂れきが転動から跳躍運動へ移行するのは、床面上のある砂れきとの衝突によるためと考えることができることを前述した。ここでは、この砂れきの転動距離の分布特性について考える。

いま、転動砂れきが床面砂れきと衝突する場合には、床面が粒径程度の discrete な不均一な場であるために、その砂れきに衝突するごとに跳躍への移行の試行を行なうと考えて、転動する距離 l を粒径 d を基準量にして $\xi=l/d$ であらわし、かつ砂れきの移行確率が微小距離 $d\xi$ に比例するものとし、その比例定数を $\lambda(\xi)$ とする。また、区間 $(\xi, \xi+d\xi)$ で移行する確率を $\lambda(\xi)d\xi+O(d\xi)$ とし、移行しない確率は $1-\lambda(\xi)d\xi+O(d\xi)$ であると仮定する。さらに、砂れきが区間 $(0, \xi+d\xi)$ において跳躍に移行する確率を $P_1(\xi+d\xi)$ とすれば、これは a) 区間 $(0, \xi)$ では移行せず、区間 $(\xi, \xi+d\xi)$ で移行する、および b) 区間 $(0, \xi)$ で移行し、区間 $(\xi, \xi+d\xi)$ で移行しないの二つの複合事象としてあらわされるので、 $d\xi \rightarrow d\xi$ とした極限として簡単につぎの微分方程式がえられる。

$$dP_1(\xi)/d\xi = -\lambda(\xi)P_1(\xi) + \lambda(\xi)P_0(\xi) \quad \dots\dots\dots(3.24)$$

まず、転動砂れきが床面砂れきと衝突するたびに前述したような力学的機構と同様な移行現象がみられるわけであるが、簡単のためにその移行確率の強度 $\lambda(\xi)$ が一定値であると考えた場合には、初期条件 $P_0(0)=1$, $dP_0(\xi)/d\xi = -\lambda P_0(\xi)$ を用いれば、(3.24) 式からつぎの解がえられる。

$$P_1(\xi) = \lambda \xi \exp(-\lambda \xi) \quad \dots\dots\dots(3.25)$$

いうまでもなく、これは Poisson 過程であるが、これから転動距離の確率密度関数 $f_1(\xi)$ は、容易に導かれ、つぎのようになる。

$$f_1(\xi) = \lambda \exp(-\lambda \xi) \quad \dots\dots\dots(3.26)$$

この分布による転動距離の平均値 $\xi_m = l_m/d$ および標準偏差 $\sigma_\xi = \sigma_l/d$ は、それぞれ

$$\xi_m = 1/\lambda, \quad \sigma_\xi = 1/\lambda \quad \dots\dots\dots(3.27)$$

であって、両者は一致する。

つぎに、前述したように砂れきは転動にともなって、その距離とともにかなり急速に加速するわけであるから、転動から跳躍運動へ移行する場合になんらかの束縛がなければ、当然移行確率の強度は砂れきの速度の増加とともに、したがって転動距離とともに大きくなるものと考えらるべきであらう。この場合、転動距離に関係させる範囲では任意のものを考えることができるが、実験結果との比較において考察すべきことから、ここでは簡単に考えて Yule 過程と同様に $\lambda(\xi) = A\xi$ とすれば、(3.25) および (3.26) 式の誘導にならって、つぎのような転動距離の確率密度関数 $f_2(\xi)$ がえられる。

$$f_2(\xi) = A\xi \exp\{-(1/2)A\xi^2\} \quad \dots\dots\dots(3.28)$$

この分布による転動距離の平均値および標準偏差は、それぞれつぎのようにあらわされる。

$$\xi_m = \sqrt{\pi/2A}, \quad \sigma_\xi = \sqrt{(4-\pi)/2A} \quad \dots\dots\dots(3.29)$$

したがって、これらの関係は $\xi_m/\sigma_\xi = \sqrt{(4-\pi)/\pi}$ であらわされる。

さて、以上の考察によると、転動距離の分布特性が求められたわけであるが、その平均値に対してはすでに (3.22) 式で無次元化した転動距離 $\chi = [C_D/(\sigma/\rho + 1/2)](l_m/d)$ が比重が付加された無次元化した掃流力 $(\sigma/\rho)u_*^2/(\sigma/\rho - 1)gd$ の関数としてあたえられているから、(3.27) あるいは (3.29) 式を掃流力の関係としてあらわすことができる。

Fig. 3.2 は、(3.27) および (3.29) 式であらわされる関係を掃流力に対する変化として実験結果と比較したものである。この結果によれば、転動から跳躍への移行確率の強度 λ が転動距離とともに変化すると仮定した場合より、むしろ一定値とした方の結果に実験値は一致することがわかる。この事実および Fig. 3.2 に示した転動距離の平均値に対する考察とから、転動砂れきが跳躍運動に移行する限界の砂れきの速度は、ほとんど一定値に保たれるものと考えてよいであろう。

4. 砂れきの跳躍機構

Photo. 1 にみられるような水流による単一砂れきは、前述したように静止状態から運動を開始すると、まずある距離の間は転動し、しかるのち跳躍運動に移行することになる。ここでは転動から跳躍に移行した場合の第 1 の跳躍機構とくに砂れきの跳躍高さおよび距離とそれらの分布特性について考察することにしたい。

(1) 運動方程式および砂れきの跳躍特性

前述したような現象にもとづく砂れきの跳躍運動においては、一般に砂れきの Reynolds 数はかなり大きい値に達するので、砂れきに働く流体抵抗に対しては、転動の場合と同様に、相対速度の 2 乗に比例する抵抗則が成立するものと仮定する。また、砂れきの鉛直および水平方向の速度成分をそれぞれ W および U とし、簡単のためにそれぞれの方向に対して別々に運動方程式が立てられるものとすれば、それらはつぎのようにあらわされる。

$$dW/dt = \mp (3/4)C_{D1}W^2/(\sigma/\rho + 1/2)d - (\sigma/\rho - 1)g/(\sigma/\rho + 1/2) \quad \dots\dots\dots(4.1)$$

$$dU/dt = (3/4)C_{D2}(u - U)^2/(\sigma/\rho + 1/2)d \quad \dots\dots\dots(4.2)$$

ここに、 C_{D1} および C_{D2} ：それぞれ鉛直および水平方向における砂れきの抗力係数、および u ：砂れきの跳躍運動における代表流速であって、砂れきの跳躍高さがあまり大きくないものと考えて、簡単のために流速分布の影響は省略することにして、転動の場合と同様に以下の考察においては $u \approx A_* u^*$ とおけるものと仮定する。また (4.1) 式における複号は、砂れきの上昇運動に対して負、下降運動に対して正とする。なお、これら砂れきの運動方程式としては、運動方向に対してたとえば hodograph 面を利用した運動方程式を立てて議論すべきであるが、流速に対する簡便な取扱い上の問題もあって、ここでは簡単に鉛直および水平のそれぞれの方向に対する運動方程式をもとにして考察することにとどめたい。

いま、 u^* および d を基準量として用い、無次元量を前述した転動の場合を参照して、つぎのように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} &= U/u^*, \quad \bar{W} = W/u^*, \quad K^2 = (4/3)\{(\sigma/\rho - 1)gd/u_*^2 C_{D1}\} \\ \tau_1 &= \{C_{D1}/(\sigma/\rho + 1/2)\}(u_*^2 t/d), \quad \tau_2 = \{C_{D2}/(\sigma/\rho + 1/2)\}(u_*^2 t/d) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.3)$$

そうすれば、(4.1) および (4.2) 式は、つぎのようにあらわされる。

$$d\bar{W}/d\tau_1 = \mp \bar{W}^2 - K^2 \quad \dots\dots\dots(4.4)$$

$$d\bar{U}/d\tau_2 = (\bar{u} - \bar{U})^2 \quad \dots\dots\dots(4.5)$$

ただし、前述したように砂れき近傍の流速 u に対しては、 $\bar{u} = u/u^*$ とするが、実際の計算においては $\bar{u} = A_*$ とおくことにする。初期条件： $\tau_1 = \tau_2 = 0$ において $\bar{W} = \bar{W}_0$ および $\bar{U} = \bar{U}_0$ のもとに、(4.4) および (4.5) 式の解を求めれば、それぞれつぎのようにあらわされる。ただし、鉛直方向に対しては、上昇時のみの関係を示す。

$$\bar{W} = K\{(\bar{W}_0/K) - \tan K\tau_1\}/[1 + (\bar{W}_0/K)\tan K\tau_1] \quad \dots\dots\dots(4.6)$$

$$\bar{U} = \bar{u} - (\bar{u} - \bar{U}_0)/[1 + (\bar{u} - \bar{U}_0)\tau] \quad \dots\dots\dots(4.7)$$

これに対して、下降時における砂れきの鉛直速度の時間的变化は、(4.4)式からつぎのようにあらわされる。

$$\bar{W} = -K \tanh(K\tau_1') \quad \dots\dots\dots(4.8)$$

ここに、 τ_1' は下降時の無次元化した時間をあらわす。

つぎに、砂れきの跳躍高さを求めるために、砂れきの位置を鉛直および水平方向に対してそれぞれ y および x とし、さらに $\eta = y/d$ および $\xi = x/d$ として、 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ において $\eta = \xi = 0$ とすれば、(4.6) および (4.7) 式からつぎの関係がえられる。ただし、鉛直方向に対しては、上昇運動のみを示す。

$$\eta = (4/3) \{ (\sigma/\rho + 1/2)/CD_1 \} \log \{ \cos K\tau_1 + (\bar{W}_0/K) \sin K\tau_1 \} \quad \dots\dots\dots(4.9)$$

$$\xi = \bar{u}\tau_2 + (4/3) \{ (\sigma/\rho + 1/2)/CD_2 \} \log \{ 1 - (\bar{u} - \bar{U}_0)\tau_2 \} \quad \dots\dots\dots(4.10)$$

砂れきの最大跳躍高さは、(4.6)式において $\bar{W} = 0$ となる $\tau = \tau_{01}$ 、すなわち

$$\tau_{01} = (1/K) \tan^{-1}(\bar{W}_0/K) \quad \dots\dots\dots(4.11)$$

において生ずるから、(4.10)式を(4.8)式に代入し、最大跳躍高さを H_m として $\eta_{max} = H_m/d$ とあらわせば、つぎようになる。

$$\eta_{max} = (2/3) \{ (\sigma/\rho + 1/2)/CD_1 \} \log \{ 1 + (\bar{W}_0/K)^2 \} \quad \dots\dots\dots(4.12)$$

しかし、 $(\bar{W}_0/K)^2 \ll 1$ の範囲に対しては、(4.12)式はつぎのように近似される。

$$\eta_{max} \approx (2/3) \{ (\sigma/\rho + 1/2)/CD_1 \} (\bar{W}_0/K)^2 \quad \dots\dots\dots(4.13)$$

また、Fig. 4.1 には (4.12) および (4.13) 式であらわされる跳躍高さと $\bar{W}_0/K$ との関係を示す。したがって、砂れきの下降運動に対する (4.9) 式と同様な関係を示せば、つぎようになる。

$$\eta - \eta_{max} = - (4/3) \{ (\sigma/\rho + 1/2)/CD_1 \} \log \{ \cosh(K\tau_1') \} \quad \dots\dots\dots(4.14)$$

ここに、 τ_1' は $\eta = \eta_{max}$ において $\tau_1' = 0$ とした τ_1 と同様の表現による無次元の時間をあらわす。(4.14)式において $\eta = 0$ となるまでの時間 τ_1' を求めると、つぎようになる。

$$\tau_{02}' = (1/K) \cosh^{-1} \{ 1 + (\bar{W}_0/K)^2 \} CD_1'/2CD_1 \quad \dots\dots\dots(4.15)$$

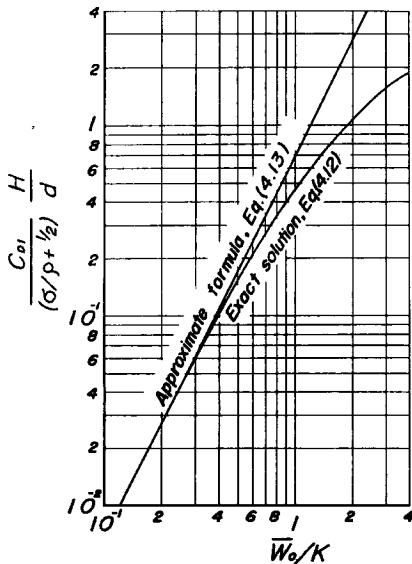


Fig. 4.1 Changes of saltation height with parameter of $(\bar{W}_0/K)$.

ここに、 CD_1' は下降時における砂れきの鉛直方向における抗力係数であるが、いま簡単のために、砂れきの Reynolds 数がかかなり大きくて抗力係数が Reynolds 数に対してほぼ一定値になる範囲を対象とすれば、砂れきの saltation において上昇時および下降時に対してその特性がかかなり変わっても、 $CD_1 \approx CD_1'$ としてよいであろう。以下の考察においては、(4.15)式をつぎのようにあらわすことにしたい。

$$\tau_{02}' = (1/K) \cosh^{-1} \{ 1 + (\bar{W}_0/K)^2 \}^{1/2} \quad (4.16)$$

また、 $\tau_1' = \tau_{02}'$ における $\bar{W}$ の値 $\bar{W}_{02}$ は、(4.8)式より、つぎのようにあらわされる。

$$-\bar{W}_{02} = K [1 - \{ 1 + (\bar{W}_0/K)^2 \}^{-1/2}]^{1/2} \quad \dots\dots\dots(4.17)$$

$$\approx K [1 - \{ 1 + (\bar{W}_0/K)^2 \}^{-1/2}]^{1/2} \quad (4.17)'$$

同様に、最初の saltation の終了時 $\tau_1' = \tau_{02}'$ における (4.7) 式に $\tau_2 = \tau_{01} + \tau_{02}'$ を代入して、つぎのようにあらわされる。

$$\begin{aligned} \bar{U}_{02} = & \bar{u} - (\bar{u} - \bar{U}_0) / [1 + \{ (\bar{u} - \bar{U}_0)/2K \} \\ & \{ 2 \tan^{-1}(\bar{W}_0/K) \\ & + \cosh^{-1} [1 + (\bar{W}_0/K)^2] CD_1'/2CD_1 \}] \quad \dots\dots\dots(4.18) \end{aligned}$$

$$\approx \bar{u} - (\bar{u} - \bar{U}_0) / [1 + \{(\bar{u} - \bar{U}_0) / 2K\} \{2 \tan^{-1} (\bar{W}_0 / K) + \cosh^{-1} [1 + (\bar{W}_0 / K)^2]^{1/2}\}] \quad \dots\dots\dots (4.18)'$$

さらに、(4.17) および (4.18) 式であらわされる速度分布で、砂れきが床面に衝突するときの角度を β_1 とすれば、

$$\beta_1 = \tan^{-1} (\bar{W}_{02} / \bar{U}_{02}) \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

であらわされる。

つぎに、砂れきの跳躍距離について考察しよう。砂れきの跳躍時間は、前述したように $\tau_2 = \tau_{01} + \tau_{02}'$ であるから、これを (4.10) 式に代入して、若干の変形を行なえば、砂れきの跳躍距離 L は $\xi_{max} = L/d$ として、つぎのようにあらわされる。

$$\begin{aligned} \xi_{max} \{3C_{D1}/4(\sigma/\rho + 1/2)\} &= \bar{u}(1/K) [\tan^{-1} (\bar{W}_0/K) \\ &+ (1/2) \cosh^{-1} \{1 + (\bar{W}_0/K)^2\}^{C_{D1}'/2C_{D1}} - \log \{1 + (\bar{u} - \bar{U}_0)(1/K) [\tan^{-1} (\bar{W}_0/K) \\ &+ (1/2) \cosh^{-1} \{1 + (\bar{W}_0/K)^2\}^{C_{D1}'/2C_{D1}}]\} \quad \dots\dots\dots (4.20) \\ &\approx \bar{u}(1/K) [\tan^{-1} (\bar{W}_0/K) \\ &+ (1/2) \cosh^{-1} \{1 + (\bar{W}_0/K)^2\}^{1/2} - \log \{1 + (\bar{u} - \bar{U}_0)(1/K) [\tan^{-1} (\bar{W}_0/K) \\ &+ (1/2) \cosh^{-1} \{1 + (\bar{W}_0/K)^2\}^{1/2}\}] \quad \dots\dots\dots (4.20)' \end{aligned}$$

また、 $(\bar{W}_0/K)^2 \ll 1$ の場合には、

$$\begin{aligned} \xi_{max} \{3C_{D1}/4(\sigma/\rho + 1/2)\} &= \{(1 + \sqrt{2})/\sqrt{2}\} (\bar{U}_0/K) (\bar{W}_0/K) \\ &+ (1/12) \{1 - (\bar{u}/K) + 6(1 + \sqrt{2})^2 (\bar{u} - \bar{U}_0)^2 / K^2\} (\bar{W}_0/K)^2 \quad \dots\dots\dots (4.21) \end{aligned}$$

で近似される。

以下同様に、後述するような床面における砂れきの衝突機構の解析結果を適当に利用することにすれば、砂れきの転動より出発して第1、第2、第3次跳躍というように、順次計算を進めることができる。かくして、単一砂れきの静止の状態から運動を始めて下流に流下していく場合の決定論的な立場における砂れきの運動法則をあらわすことができるであろう。このためには、適当な近似計算を必要とするが、その計算を遂行した結果では、かなり興味深い結論がえられているが紙数の関係で次報において説明したい。

(2) 砂れきの跳躍高さと同流力との関係

以上述べた転動から移行した砂れきの最初の跳躍に関する理論的考察においては、運動方程式における初期条件としては、すべて鉛直および水平方向に対して、それぞれ $\bar{W}_0$ および $\bar{U}_0'$ を用いてきたが、つぎに砂れきの転動機構との関連について考察しなければならない。これら $\bar{W}_0$ および $\bar{U}_0'$ はともに砂れきが跳躍に移行する直前の転動速度 U_0 に密接に関係することはいうまでもないが、どのような関係で変換されるかは厳密には論ずることは困難であるから、ここでは簡単につぎのように仮定する。

$$\bar{W}_0 = \beta \bar{U}_0 \quad \dots\dots\dots (4.22)$$

ここに、 β は実験的に決定されるものとする。転動砂れきと床面砂れきとの衝突現象は、砂れきのもつ運動量が保存されるという条件のもとには、かなり一般的に論ずることができるが、それらは第2、第3の跳躍運動を論ずる次報にゆずることにして、ここでは (4.22) 式の仮定に転動特性を導入して、主として砂れきの跳躍高さと同流力との関係について考察する。

まず、(4.12) および (4.20) 式に含まれている $(\bar{W}_0/K)$ を転動距離 l_m を用いた (3.20) 式で与えられる転動速度 U_0 を用いてあらわすことにすれば、

$$(\bar{W}_0/K)^2 = (15/4) (\beta/\alpha)^2 C_{D1} [(d/\alpha)/(\sigma/\rho) \{1 - (10/7)(d/d')\}^2] \quad \dots\dots\dots (4.23)$$

となって、当然のことながら一定となる。したがって、砂れきが粒径程度以上転動する場合のように、無次元化された同流力が比較的小さい場合には、砂れきの跳躍高さは同流力が増加してもほとんど一定となるという結果になる。

これに反して、砂れきの転動距離が粒径程度以下であって、その転動速度が (3.18) 式であらわされる場

合には、近似的に $u_1 = A_r u^*$ とし、

$$(\bar{W}_0/K)^2 = (3/4)\beta^2 C_D A_r^2 [2(l_1/d)N / \{1 + \sqrt{2(l_1/d)N}\}^2] \{u^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gd\} \quad \dots\dots(4.24)$$

とあらわされる。ここに、 l_1 はこの場合の砂れきの転動距離とする。したがって、前述した考察から、砂れきの転動距離が $l_1/d \approx 1$ であると仮定することにすれば、(4.25) 式はつぎのようになる。

$$(\bar{W}_0/K)^2 \approx (3/4)\beta^2 C_D A_r^2 \{2N/(1 + \sqrt{2N})^2\} \{u^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gd\} \quad \dots\dots\dots(4.25)$$

したがって、以上の関係を (4.12) 式に代入すれば、砂れきの跳躍高さを掃流力との関係であらわすことができるが、ここでは簡単のために、 $(\bar{W}_0/K)^2 \ll 1$ の場合のみを対象として (4.13) 式に代入すれば、つぎのようになる。すなわち、 $l_m/d \geq 1$ に対して、

$$H_m/d \approx (5/2)(\beta/\alpha)^2 \{(\sigma/\rho + 1/2)(C_D/C_{D1})\} [(d/d)/(\sigma/\rho) \{1 - (10/7)(d/d)\}^2] \quad (4.26)$$

であり、また $l_m/d \leq 1$ に対して、

$$H_m/d \approx (1/2)\beta^2 A_r^2 \{(\sigma/\rho + 12)(C_D/C_{D1})\} \{2N/(1 + \sqrt{2N})^2\} \{u^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gd\} \quad (4.27)$$

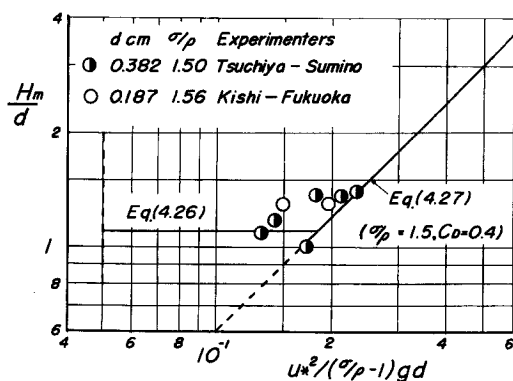


Fig. 4.2 An example of comparisons between theoretical saltation height of sand particle and experimental ones.

とあらわされる。ただし、 $u^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gd < 1$ である範囲に限られる。

いま、簡単のために前述した理由から、 $C_D \approx C_{D1}$ とおくことにして $\sigma/\rho = 1.50$ の粒子を用いた土屋らの実験値と $\sigma/\rho = 1.56$ のものによる岸らの実験値と比較した結果が Fig. 4.2 である。ただし、(4.26) 式の係数 β の値は、著者らによる実験値に一致するように決定した結果、 $\beta = 0.816$ となった。この値は若干大きすぎるようであるが、実際現象を観察すると、一般砂れきは必ずしも単純な衝突ではなくて、床面砂れきのまわりを転動するような運動をするので、その間における加速現象やまた力学に入らない種々の現象が介入しているためと考えるべきであろう。

実験値が少ないので、明確なことはわからないが、大体以上の考察を裏付けているようにみえる。

(3) 砂れきの跳躍高さの分布

砂れきの転動距離の分布については、すでに述べたが、いうまでもなく砂れきの跳躍高さや距離もある分布を示す。ここでは、これらの特性として、砂れきの跳躍高さをとりあげて考察するが、跳躍距離の方も同様に計算することができる。この分布特性に影響するものとしては、まず転動から跳躍へ移行するときの砂れきの速度の変動、床面砂れきへの衝突時の特性における変動とくに衝突時の角度の分散によるとび出し角度の分布をはじめ、砂れきの運動に及ぼす乱れの効果などが考えられる。ここでは、これらのうちとくに衝突時の砂れき速度の変動が主原因になるものとして、跳躍高さの分布特性を検討してみたい。

いま、砂れきの転動速度 $\bar{U}_0$ の確率密度関数を $f_3(\bar{U}_0)$ とすれば、転動距離の密度関数 $f_1(\xi)$ との間には、

$$f_3(\bar{U}_0)d\bar{U}_0 = f_1(\xi)d\xi \quad \dots\dots\dots(4.28)$$

が成立するはずであり、また砂れきの跳躍高さの確率密度関数を $f_4(\bar{H})$ とすれば、同様に、

$$f_4(\bar{H})d\bar{H} = f(\bar{U}_0)d\bar{U}_0 \quad \dots\dots\dots(4.29)$$

が成立する。

いま、砂れきの転動距離が比較的大きい場合を対象として、 $f_1(\xi)$ に対して (3.29) 式を、また (3.20) 式を $\bar{U}_0$ に対して適用し、さらに簡単のために $\bar{U}_0$ と $\bar{H}$ との関係に対して (4.13) 式を用いれば、 $f_4(\bar{H})$

は結局つぎのようにあらわされる。

$$f_s(\bar{H}) = (A_r/D)(d/l_m)\zeta\{1/(A_r - \sqrt{\zeta\bar{H}^3}) \cdot \exp\{-(1/D)(d/l_m)(\zeta\bar{H})/(A_r - \sqrt{\zeta\bar{H}^3})^2\} \dots\dots\dots (4.30)$$

ここに、

$$1/\zeta = (1/2)\beta^2(\sigma/\rho + 1/2)\{u_*^2/(\sigma/\rho - 1)gd\} \dots\dots\dots (4.31)$$

この関係において、砂れきの比重と無次元化した掃流力を与えると、Fig. 3.2 から l_m/d が求められるので、(4.30) 式を計算することができる。Fig. 4.3 は前述した土屋らの実験結果と (4.30) 式による計算結果との比較を示したものである。これからわかるように、掃流力の小さな場合には、その値と実験値との間かなりのずれがみられ、また掃流力が大きい場合にも、第1回目の跳躍における実験値との適合性はよいとはいえず、このことは、転動してきた砂れきが突起に衝突した際の角度の分散などの効果が出てきているものと思われる。しかしながら、この (4.30) 式にもとづく理論曲線の示している一般の傾向は、実験結果とかなりよく一致するといえる。すなわち、砂れきの跳躍高さの分布は正規分布ではなく、かなり歪んだ分布を示すことがわかるであろう。

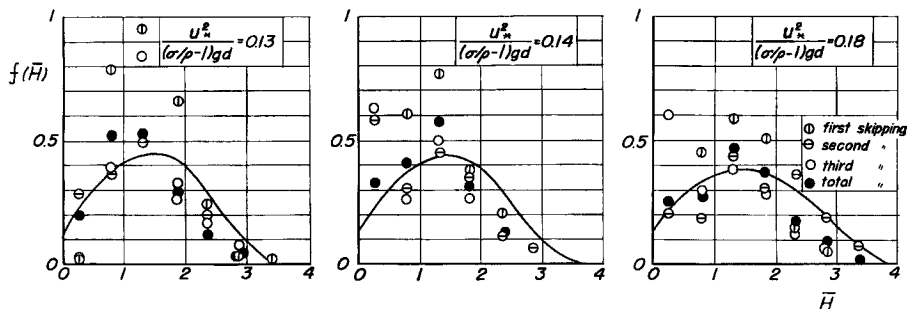


Fig. 4.3 Comparison between theoretical curves of distribution of saltation height of a spherical sand particle in streams and experimental values.

最後に、砂れきの転動距離が粒径程度以下となるような掃流力の大きな場合における砂れきの跳躍高さの分布について、簡単に考察しておきたい。この場合に対しては、砂れきの平均跳躍高さに関する確実な実験結果がないので、詳細な議論は第2報にゆずることにして、その考え方を説明する。まず、この場合の砂れきの速度は、(3.15) 式で与えられるが、この運動には摩擦力はほとんど作用せず、静止から流速 u_1 によって運動を開始して、直ちに隣接の砂れきに衝突するわけであるから、 u_1 の変動がそのままこの運動に関係してくるものと考えられる。したがって、ここでは流速 u_1 の変動に対して Gauss 分布を仮定すれば、

$$f_s(\bar{u}) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma_0) \exp\{-(\bar{u} - \bar{u}_m)^2/2\sigma_0^2\} \dots\dots\dots (4.32)$$

とあらわされる。ここで、近似的に $\sigma_0 \approx (1/3)\bar{u}_m$ とおくことにすれば、つぎのようになる。

$$f_s(\bar{u}) = (3/\sqrt{2\pi}\bar{u}_m) \exp\{-(9/2)(\bar{u} - \bar{u}_m)^2/\bar{u}_m^2\} \dots\dots\dots (4.33)$$

ここに、 $\bar{u}_m$ は $\bar{u}$ の平均値をあらわす。この関係を (4.29) 式に代入すれば、

$$f_7(\bar{H}) = (3/2\sqrt{2\pi})(1/\sqrt{\bar{H}\bar{H}_m}) \exp\{-(9/2)(\sqrt{\bar{H}} - \sqrt{\bar{H}_m})^2/\bar{H}_m\} \dots\dots\dots (4.34)$$

となり、掃流力が大きい場合でも、このような考え方によれば、Fig. 4.3 と同様に、岸らが述べているような正規分布とはならず、かなり跳躍高さの小さい方にかたよった分布を示すことになるであろう。

5. 結 語

以上、水流による単一球状砂れきの saltation に関する研究の第1報として、静止の状態におかれた砂れきが運動を開始した場合の転動から跳躍へ移行していく初期の段階に対する一つの簡単な理論的考察を述べ

た。その結果、砂れきは若干滑動しつつ転動して、ある距離転動すると跳躍に移行していく過程を、紙数の関係上最初の跳躍までではあるが、いちおう統一的に説明するように試みたつもりである。そして、それらの結果は著者らの実験結果とは比較的良好にそれらの特性と一致させることができた。しかしながら、かような砂れきの運動には、多かれ少なかれ流れの乱れが影響するものと考えられるので、この点についても研究を進めるとともに、また掃流力の大きい場合に対する流砂実験のみならず飛砂の場合にも実験的研究を進めて、こうした考え方による流砂力学の確立につとめたい。なお、ここで述べた砂れきの跳躍運動に関する取扱いは、これまで実施してきた著者らの研究の一部であって、第2、第3の跳躍特性や最終的にどのような数式化ができるかという点やあるいは砂れき相互間の衝突現象の取扱い方については、次報において述べるつもりである。

最後に本研究を遂行する機会を与えられ、熱心にご指導いただいた矢野勝正所長に謝意を表明するとともに、流砂力学関係の研究グループとして熱心に協力していただいた道上正規助手に感謝したい。なお、本研究は文部省特定研究費による研究成果の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) Bagnold, R. A.: The Physics of Blown and Desert Dunes, Mathuen & Co. Ltd., London, 1954.
- 2) 河村龍馬：飛砂の研究，東京大学理工学研究所報告，第5巻，昭26，pp.95—112.
- 3) Owen, P. R.: Saltation of Uniform Grains in Air, Jour. Fluid Mech., Vol. 20, Part 2, 1964, pp. 225—242.
- 4) Kalinske, A. A.: Movement of Sediment as Bed Load in Rivers, Trans. A.G.U., Vol. 28, No. 4, 1947, pp. 615—620.
- 5) 土屋義人，角野 稔：水流による砂粒の運動機構に関する実験，京都大学防災研究所年報，第9号B，昭41，pp.97—107.
- 6) 矢野勝正，土屋義人，青山俊樹：掃流砂れきの saltation に関する実験，京都大学防災研究所年報，第12号，昭44，pp.491—502.
- 7) Yalin, M. S.: An Expression for Bed-Load Transportation, Proc. ASCE, Vol. 89, HY, 1963, pp. 221—250.
- 8) 岸 力，福岡捷二：河床粒子の saltation の機構と流砂量，土木技術資料，土木学会北海道支部，第23号，昭41，pp.113—120.
- 9) Einstein, H. A. and EL-Sammi: Hydrodynamic Forces on a Rough Wall, Reviews of Modern Physics, Vol. 21, No. 3, 1949, pp. 520—524.
- 10) Chepil, W. S.: The Use of Evenly Spaced Hemisphere to Evaluate Aerodynamic Forces, on a Soil Surface, Trans. A.G.U., Vol. 39, No. 3, 1958, pp. 397—404.
- 11) Chepil, W. S.: The Use of Spheres to Measure Lift and Drag on Wind-Eroded Soil Grains, Soil Sci. Soc. of Am. Proc., Vol. 25, 1961, pp. 343—345.
- 12) Basset, A. B.: A Treatise on Hydrodynamics, Vol. 2, Dover Publ. Inc., New York, 1961.
- 13) Odar, F. and Hamilton, W. S.: Forces on a Sphere Accelerating in a Viscous Fluid, Jour. Fluid Mech., Vol. 18, 1964, pp. 302—314.
- 14) Oshima, N.: Motion of Particles in Stream, Proc. 7th Japan National Cong. for Appl. Mech., 1957, pp. 219—223.
- 15) Brush, L. M., Hau-Wong Ho. and Ben-Chie Yen: Accelerated Motion of a Sphere in a Viscous Fluid, Proc. ASCE, Vol. 90, HYI, 1964, pp. 149—160.
- 16) たとえば，石原藤次郎：応用水理学中I，丸善K. K.，昭32.
- 17) Albertson, M. L.: Effect of Shape on the Fall Velocity of Gravel Particles, Proc. Fifth Hyd. Conf., State Univ. of Iowa, Bull. No. 34, 1952, pp. 242—261.