

L_r 空間における Navier-Stokes 初期値問題

広島大 理 宮川 鉄朗

§1. はじめに.

$\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ の有界領域 D において、Navier-Stokes 方程式の初期値問題

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u, \nabla)u = f - \nabla p & (t > 0, x \in D) \\ \operatorname{div} u = 0 & (t > 0, x \in D) \\ u|_S = 0 \\ u(x, 0) = a(x) & (x \in D) \end{cases}$$

を考えよ。 D の境界 S は、圧めらるかとする。 $u = \{u^j(x, t)\}_{j=1}^n$, $p = p(x, t)$ は、求めよべき速度ベクトルと圧力、 $a = \{a^j(x)\}_{j=1}^n$, $f = \{f^j(x, t)\}_{j=1}^n$ は、与えられた初期速度と外力をあらわす。

よく知られた直交分解:

$$(L_2(D))^n = X_2 \oplus G_2$$

$$(1) \quad \begin{aligned} X_2 &= \{w \in (C_0^\infty(D))^n; \operatorname{div} w = 0\} \text{ の } L_2\text{-閉包} \\ G_2 &= \{\nabla p; p \in W_2^1(D)\} \end{aligned}$$

/

を用いることにより、圧力項が除き去れる。すなわち、

$P: (L_2(D))^n \rightarrow X_2$ を直交射影とすると、(E)は、 X_2 における発展方程式：

$$(I) \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = Pf + Fu, & t > 0. \\ u(0) = a, & (Fu = -P(u, \nabla)u). \end{cases}$$

に変換される。 $A = -P\Delta$ は、 X_2 における Stokes 作用素と呼ばれるもので、 $D(A) = \{u \in (W_2^2(D))^n; u|_S = 0\} \cap X_2$ なる正値自己共役作用素である。Hopf [9] は、 $n=2, 3$ のとき、任意の $a \in X_2$ に対して (Pf に適当な仮定を入れて) (I) が大域的な弱解をもつことを示した ($n \geq 4$ の場合は [13] 参照)。しかし、 $n \geq 3$ のときには、Hopf の解の一意性、正則性については、殆んどわかっていない。そこで、 a, Pf に対して様々な仮定を置いて、Hopf よりも正則な解を求めよう試みが多くの人々によってなされた。その結果は、書物 [2] にまとめられているが、一般に局所解の存在が知られているだけである。

この方向での最良の結果は、加藤-藤田 [3], [1] によるものである。彼等は、 $-A$ が X_2 において解析半群 $\{e^{-tA}; t \geq 0\}$ を生成することを用いて、(I) を積分方程式：

$$(II) \quad u(t) = e^{-tA} a + \int_0^t e^{-(t-s)A} \{Fu(s) + Pf(s)\} ds.$$

の形で考察した。そして (Pf に対するある仮定の下で) 任意の

乙

$a \in D(A^{1/4})$ ($n=3$) に対して (II) が局所解をもつこと, a と Pf が十分小さければその解が大域的に存在すること, さらに Pf がある種の Hölder 条件を満たせば, 得られた解が古典解であることとを示した。これらの結果は, 井上-脇本 [1] のにより $n=4, 5$ の場合に拡張された。それによれば, $n=4$ のとき $a \in D(A^{1/2})$, $n=5$ のとき $a \in D(A^{3/4})$ を仮定すれば, [1] と同様のことが示される。 $n \geq 6$ のときは, 正則解の存在は知られていない。

本講の目的は, 積分方程式 (II) を, 一般の L_p 空間 ($1 < p < \infty$) で解くことである。その結果, $p \geq n$ ならば, 「 $a \in D(A^{\alpha})$ 」の形の仮定が不要であることがわかる。我々の議論は, 任意の $n \geq 2$ に対して通用する。議論のカナメとなるのは, 次の事実である。

(i) $(L_p(D))^n$ のある部分空間で, Stokes 作用素 A が定義され, $-A$ が解析半群を生成すること。

(ii) 分数 α の A^{α} の定義域が, 複素補間空間として, explicit に求められること。

(i) は, 東大の儀我美一氏 [6], 筆者 [4], 及び Solonnikov [6] によって, (ii) は, 儀我氏 [7] によって示された。本講で述べる結果は, 儀我氏と筆者との共同研究 [8] によって得られたものである。

§2. Stokes作用素.

分解(1)は、藤原-森本[5]によつて、次のように拡張されている。

定理([5]). $1 < r < \infty$ のとき、次が成立する。

$$(i). (L_r(D))^* = X_r \oplus G_r \text{ (直和)}, X_r = \{w \in (C_0^\infty(D))^n; \operatorname{div} w = 0\}$$

の L_r -閉包, $G_r = \{\nabla p; p \in W_r^1(D)\}$.

$$(ii) X_r^* = X_{r'}, X_r^\perp = G_{r'}, r' = r/(r-1). \text{ ここに, } X_r^*(X_r^\perp)$$

は, X_r の dual space (annihilator) をあらわす。

P_r を, 上の分解に対応する X_r への射影とす。 $A_r = -P\Delta$

を, $D(A_r) = X_r \cap \{u \in (W_r^2(D))^n; u|_S = 0\}$ の上で定義すると,

X_r で A_r 作用素で有界な逆をもつことが知られている ([2])。

A_r を X_r における Stokes作用素と呼ぶ。次の事実も [5] によつて。

$$(2) A_r^* = A_{r'}, P_r^* = P_{r'}.$$

ここに, $*$ は dual operator をあらわす。以下, 単に A, P と記す。

定理1 ([6], [14], [16]). $-A$ は, 各 X_r ($1 < r < \infty$) において, 一様有界な解析半群 $\{e^{-tA}; t \geq 0\}$ を生成する。

[14], [16] では, 非定常 Stokes 方程式の L_r 評価式から出発して, 定理1が導かれている。[6] では, 擬微分作用素を用いて直接に A の resolvent を構成し, それの評価によつて, 証明している。[6] による resolvent の構成を用いよつて, 次の定理2の証明が可能となる。

定理2 ([7]). $0 < \alpha < 1$ とする。分数中 A^α の定義域 $D(A^\alpha)$ は、複素補間空間 $[X_r, D(A)]_\alpha$ に一致する。(複素補間空間については [1] 参照)。

さて、 $B = -\Delta$ を $(L_r(D))^\infty$ における Dirichlet 条件付きの Laplace 作用素とする。藤原 [4] によれば、

$$D(B^\alpha) = [(L_r(D))^\infty, D(B)]_\alpha \subset (H_1^\alpha(D))^\infty \text{ (埋め込みは連続)}$$

である。このことと、 $D(A) = X_r \cap D(B)$, それに定理2から、

$$(3) \quad D(A^\alpha) = X_r \cap D(B^\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

が従う。

以下、我々は、 $\alpha < 0$ に対して、

$$(4) \quad D(A^\alpha) = D(A_r^{-\alpha})^*, \quad (A = A_r).$$

とおく。次の補題は、(2)を用いて容易に確かめられる。

補題3. $\alpha < 0$ のとき、 $D(A^\alpha)$ は、ノルム $\|A^\alpha u\|$ による X_r の完備化と一致する。ここに、 $\|\cdot\|$ は普通の L_r -ノルムである。

この事実と、よく知られた評価: $\|A^\beta e^{-tA}\| \leq C_\beta t^{-\beta}$, ($\beta \geq 0$) とから、次の定理は容易にわかる。

定理4. 任意の $\alpha \leq \beta$ に対し、 e^{-tA} ($t > 0$) は、 $D(A^\alpha)$ から $D(A^\beta)$ への有界作用素を定める。特に、任意の α に対して、 $\{e^{-tA}; t \geq 0\}$ は、 $D(A^\alpha)$ 上で、一様有界な解析半群を定める。

§ 3. 結果.

前節の結果を利用して、積分方程式

$$(II) \quad u(t) = e^{-tA} a + \int_0^t e^{-(t-s)A} \{Fu(s) + Pf(s)\} ds$$

を各 X_r で解く。次の補題が基本的である。

補題 5. $0 \leq \delta < 1/2 + n(1-1/r)/2$ とする。このとき、

$\theta > 0, \rho > 0, \rho + \delta > 1/2, \theta + \rho + \delta \geq n/2r + 1/2$ ならば、

$$(5) \quad \|A^{-\delta} P(u, v) v\| \leq M \|A^{\theta} u\| \cdot \|A^{\rho} v\|, \quad (\|\cdot\|: L_r\text{-ノルム})$$

が成り立つ。定数 $M > 0$ は θ, ρ, δ, r に依存するが、 $u \in D(A^{\theta})$, $v \in D(A^{\rho})$ にはよらない。

証明の概略を述べよう。(3)により、 $(\partial/\partial x_j) I A_{r'}^{-1/2}: X_{r'} \rightarrow (L_{r'}(D))^n$ は有界である ($I: X_{r'} \hookrightarrow (L_{r'}(D))^n$, inclusion) から、dualをとれば、 $A^{1/2} P \partial/\partial x_j: (L_r(D))^n \rightarrow X_r$ が、有界作用素として一意に定まることに注意しよう。評価(5)は、dense subsetsに属する u, v に対して証明されれば十分だから、 $u, v \in (C^1(\bar{D}))^n$ としよう。 $\Delta u = 0$ より、 $P(u, v) v = \sum P u^j \partial v / \partial x_j = \sum P \partial(u^j v) / \partial x_j$ である。

(i) $\delta \geq 1/2$ のとき。 $\delta = \varepsilon + 1/2$ とおく。(3)とSobolevにより、

$$A_{r'}^{-\varepsilon}: X_{r'} \rightarrow X_{s'} \quad (1/s' = 1/r' - 2\varepsilon/n) \text{ は有界, 従って,}$$

$$A^{-\varepsilon}: X_s \rightarrow X_r \quad (1/s = 1 - 1/s' = 1/r + 2\varepsilon/n) \text{ は有界である。}$$

$$\text{よって, } \|A^{-\delta} P(u, v) v\| \leq \sum \|A^{-\varepsilon-1/2} P(\partial/\partial x_j)(u^j v)\|$$

$$\leq C \sum \|A^{-1/2} P(\partial/\partial x_j)(u^j v)\|_{X_S}$$

$$\leq C \| |u| \cdot |v| \|_{L_S} \leq C \|u\|_{X_p} \|v\|_{X_q}$$

($1/p + 1/q = 1/S$), が従う。最後の項に Sobolev の補題を用いて (5) を得よ。(3) に注意)。

(ii) $\delta = 0$ のとき. P は有界だから,

$$\|P(u, \nabla)v\| \leq C \|(u, \nabla)v\| \leq C \|u\|_{X_p} \|\nabla v\|_{L_q}$$

($1/p + 1/q = 1/r$). これに Sobolev を適用すればよい。

(iii) $0 < \delta < 1/2$ のとき. $\delta = 0, \delta = 1/2$ の場合の結果に対し、補間空間の理論を適用すればよい。(4), 補題 3, を参照)。

注意. 補題 5 は, [3], [10], [11] に対応する結果を特別の場合として含む。上記の証明は、それらに対するものより、ずっと簡単である。

さて, (II) の解法を考えよ。[11] に従って, 次の iteration scheme を用いよ。

$$(6) \begin{cases} u_0(t) = e^{-tA} a + \int_0^t e^{-(t-s)A} P f(s) ds \\ u_{m+1}(t) = u_0(t) + \int_0^t e^{-(t-s)A} F u_m(s) ds, \quad m \geq 0. \end{cases}$$

$n/2r - 1/2 \leq \gamma < 1, 0 \leq \delta < 1 - |\gamma|, 0 < \gamma + \delta < 1$, なる r, γ, δ を固定すよ。 $a, P f$ には次の仮定をおく。

$$(7) \begin{cases} a \in D(A^\gamma), \quad P f \in C((0, T]; D(A^{-\delta})), \\ \|A^{-\delta} P f(t)\| = o(t^{\gamma+\delta-1}) \quad \text{as } t \downarrow 0. \end{cases}$$

すると、(6)から、

$$\|A^\alpha u_0(t)\| \leq \|A^{\alpha-\gamma} e^{-tA} A^\gamma a\| + \int_0^t \|A^{\alpha+\delta-(t-s)A}\| \|A^{-\delta} P f(s)\| ds$$

$$\leq \|A^{\alpha-\gamma} e^{-tA} A^\gamma a\| + C_{\alpha,\delta} \int_0^t (t-s)^{-\alpha-\delta} s^{\gamma+\delta-1} ds \times N$$

$$\leq K_{\alpha 0} t^{\gamma-\alpha} \quad (\gamma \leq \alpha < 1-\delta),$$

$$K_{\alpha 0} = \sup_{0 < t \leq T} t^{\alpha-\gamma} \|A^{\alpha-\gamma} e^{-tA} A^\gamma a\| + C_{\alpha,\delta} N B(1-\delta-\alpha, \gamma+\delta),$$

$$N = \sup_{0 < t \leq T} t^{1-\gamma-\delta} \|A^{-\delta} P f(t)\|.$$

が従う。(ここで、例えば $\|A^{-\delta} P f(t)\|$ は、 $P f(t)$ の $D(A^{-\delta})$ -ノルムである)。

$B(p, \delta)$ は、ベータ関数をあらわす。さて、ある $m \geq 0$ に対して、

$$(8) \quad \|A^\alpha u_m(t)\| \leq K_{\alpha m} t^{\gamma-\alpha} \quad (\gamma \leq \alpha < 1-\delta)$$

なる評価が得られたとして、 $\theta > 0$, $\rho > 0$, $\rho + \delta > 1/2$,

$\theta + \rho + \delta = 1 + \gamma (\geq n/2r + 1/2)$, $\theta, \rho < 1-\delta$, なる θ, ρ を

一組えらんで固定する。 γ, δ に対する仮定により、それは可

能である。すると、補題5によつて、

$$\|A^\alpha u_{m+1}(t)\| \leq K_{\alpha 0} t^{\gamma-\alpha} + \int_0^t \|A^{\alpha+\delta-(t-s)A}\| \|A^{-\delta} H u_m(s)\| ds$$

$$\leq K_{\alpha 0} t^{\gamma-\alpha} + C_{\alpha,\delta} M \int_0^t (t-s)^{-\alpha-\delta} \|A^\theta u_m(s)\| \|A^\rho u_m(s)\| \times ds$$

$$\leq \{K_{\alpha 0} + C_{\alpha,\delta} M K_{\theta m} K_{\rho m} B(1-\delta-\alpha, \gamma+\delta)\} t^{\gamma-\alpha}.$$

(E)が、こゝで、

δ

$$K_{\alpha, m+1} = K_{\alpha, 0} + C_{\alpha, \delta} M K_{0m} K_{pm} B(1-\delta-\alpha, \gamma+\delta)$$

とあけば, m を $m+1$ に置きかえて (f) が成り立つ。 $m=0$ の場合はすでに check したから, 結局すべての $m \geq 0$ に対して, (f) が成り立つ。 $t \downarrow 0$ のとき, $t^{\alpha-\gamma} \|A^{\alpha-\gamma} e^{-tA} a\| \rightarrow 0$ ($\gamma < \alpha$), $t^{1-\gamma-\delta} \|A^{-\delta} P_f(t)\| \rightarrow 0$, に注意すれば, [11] と全く同様にして, 次の諸定理が証明される。

定理 6. $n/2r - 1/2 \leq \gamma < 1$, $0 \leq \delta < 1-\gamma$, $0 < \gamma+\delta$ とし, a, P_f は (7) を満たすとする。このとき, 正数 T_* ($\leq T$) が定まり, 積分方程式 (II) は, $[0, T_*]$ 上で, 次のような一意的正解 $u(t)$ をもつ。(i) $u \in C([0, T_*]; D(A^\gamma))$; (ii) ある $\beta > |\gamma|$ が存在して, $u \in C((0, T_*]; D(A^\beta))$, $\|A^\beta u(t)\| = o(t^{\gamma-\beta})$, ($t \downarrow 0$). さらに, P_f が X_r -値関数として, 各 $[\varepsilon, T]$ ($0 < \varepsilon < T$) 上で Hölder 連続ならば, 上記 $u(t)$ は $[0, T_*]$ 上で, 発展方程式 (I) を満たす。

定理 7. $P_f(t)$ が $(0, \infty)$ 上で定義され, $\|A^\gamma a\|$, $\sup_{t>0} t^{1-\gamma-\delta} \|A^{-\delta} P_f(t)\|$ が十分小ならば, 定理 6 で得られた解 $u(t)$ は, $[0, \infty)$ 上で存在する。

注意. (a) 上記定理で, $r=2$, $n=2, 3, 4, 5$ とおけば, [10], [11] の結果が得られる。

(b). $r > n$ の場合は初期値 a のクラスは, X_r よりも広い。実際, この場合は $\gamma < 0$ が許される。

(c) 上の定理では, $n/2r - 1/2 < 1$ を仮定した。これが成り立たない r に対しては, iteration scheme (b) を X_r で用いることが出来ない。しかし, $r \geq n/2r - 1/2 \geq 0$ ならば $D(A^\gamma) \subset X_n$ (Sobolev によ, (3) 参照) だから, $u \in X_n$ とみなして, X_n 内で (II) を解くことが出来る。

$u(t)$ のなめらかさについては, 次のことが示される。

定理 8. $f \in (C^\infty(\bar{D} \times (0, T]))^n \Rightarrow u \in (C^\infty(\bar{D} \times (0, T_*]))^n$.

詳細は [8] を見られたい。

注意. (d). 簡単のため $Pf = 0$ とする。 $r > n$, $u \in X_r$ ならば定理 6-7 の解は, Hopf の弱解のクラスで unique である。
 $r = n$, $u \in X_n$ のときは, u が十分小ならば, 同じことが言えるが, 一般には未解決である。 ([14]).

(e) Weissler [17] は, $D = \mathbb{R}_+^n$ (半空間, $n \geq 3$) の場合に, 積分方程式 (II) を考察し, 我々よりやや弱い結果を得た。
 [17] における仮定は次の通りである。

$$n/2r - 1/2 < \gamma < 1, \quad -1/4 < \gamma, \quad Pf = 0.$$

(f). Sobolevskii は [15] において, $1 < r \leq n$ の場合に, 我々と同様の結果を得たことを報告している。しかし, 証明の詳細は明らかにされていない。 [15] における議論には不備があるように思われる。

- [1] A. P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math.* 24 (1964), 113-190.
- [2] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 31 (1961), 308-340.
- [3] H. Fujita and T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, *Arch. Rational Mech. Anal.* 16 (1964), 269-315.
- [4] D. Fujiwara, On the asymptotic behaviour of the Green operators for elliptic boundary problems and the pure imaginary powers of some second order operators, *J. Math. Soc. Japan* 21 (1969), 481-521.
- [5] D. Fujiwara and H. Morimoto, An L_r -theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I* 24 (1977), 685-700.
- [6] Y. Giga, Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L_r spaces, (submitted to *Math. Z.*).
- [7] Y. Giga, Domains in L_r spaces of fractional powers of the Stokes operator, (submitted to *Arch. Rational Mech. Anal.*).
- [8] Y. Giga and T. Miyakawa, Solutions in L_r to the Navier-Stokes initial value problem, (submitted to *Arch. Rational Mech. Anal.*).
- [9] E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, *Math. Nachr.* 4 (1950-51), 213-231.
- [10] A. Inoue and M. Wakimoto, On existence of solutions of the Navier-Stokes equation in a time dependent domain, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I* 24 (1977), 303-320.

- [11] T. Kato and H. Fujita, On the nonstationary Navier-Stokes system, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 32 (1962), 243-260.
- [12] O. A. Ladyzhenskaya, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [13] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [14] T. Miyakawa, On the initial value problem for the Navier-Stokes equations in L^p spaces, Hiroshima Math. J. 11 (1981), 9-20.
- [15] P. E. Sobolevskii, Study of Navier-Stokes equations by the methods of the theory of parabolic equations in Banach spaces, Soviet Math. Dokl. 5 (1964), 720-723.
- [16] V. A. Solonnikov, Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations, J. Soviet Math. 8 (1977), 467-529.
- [17] F. B. Weissler, The Navier-Stokes initial value problem in L^p , Arch. Rational Mech. Anal. 74 (1980), 219-230.