

Peak sets と Subnormal Operators

おさびその周辺

琉球大教育

吳屋永徳

§ 1. H, K はヒルベルト空間とする。Operator $T \in B(H)$ が subnormal とは, $K(\supset H)$ と normal Operator $N \in B(K)$ があって, $N|_H = T$ であること。またこの N が T の the minimal normal extension とは, $K_0 (H \subset K_0 \subset K)$ を T の reducing subspace とするとき, $K_0 = K$ となることである。このとき, $\sigma(N) \subset \sigma(T)$ であることはよく知られている。

次に, Operator $W \in B(H, K)$ が $1:1$ で dense range をもつとき, W を quasi-affinity (略して, q -affinity とかく) とする。 $T \in B(H)$ が $S \in B(K)$ の quasi-affine transform (略して, q -affine transform とかく) とは, $SW = WT$ となる q -affinity $W \in B(H, K)$ が存在することとする。このとき, 特に S が subnormal Operator ならば, $\sigma(S) \subset \sigma(T)$ である (Fong [3])。次に, $X \subset \mathbb{C}$ を compact set, $R(X)$ を uniform closure of rational functions with poles off X , $C(X)$ を X 上の continuous

function の algebra とする。closed set $Q \subset X$ が peak set of $R(X)$ とは, $f(z) \equiv 1$ on Q かつ $|f(z)| < 1$ on X/Q となる function $f \in R(X)$ が存在する = と。このとき, f を peak function for Q と"う。 X が spectral set for T とは,

(1). $X \supset \sigma(T)$ (2) rational function $r \in R(X)$ に対して,
 $\|r(T)\| \leq \|r\|_X$ が成立つ = と"ある。

T が subnormal operator ならば, $\sigma(T)$ が spectral set for T である = とは明うか"ある。

以後 X を spectral set for T とする。このとき,

Unital hom; $R(X) \ni f \longrightarrow f(T) \in B(H)$ かつ

$$f(z) \equiv z \quad \text{ならば} \quad f(T) = T$$

が一意的に存在する。

実際 $f \in R(X)$ に対して, rational functions $g_n \in R(X)$ があって,
 $\|f - g_n\|_X \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ である。

$$\|g_n(T) - g_m(T)\| \leq \|g_n - g_m\|_X \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より, $f(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(T)$ は存在する。 $f(T)$ が $\{g_n\}$ の選び方に依存せずかつ $\|f(T)\| \leq \|f\|_X$ が成立つ = とは明うか"ある。

更に次の関係が成立つ。

(1.1) $f(X)$ は spectral set for $f(T)$ である。

(1.2) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$

(1.3) $R(X) = C(X)$ ならば, T は normal である。

— Z —

(1.4) $g \in R(f(x))$ に対して,

$$(g \circ f)(T) = g(f(T)) \text{ である。}$$

詳細は [1] 参照

この報告は $R(x)$ の peak sets と T の reducing subspace との関係およびそれと関連する問題について, C.R. putnam [6] C.K. Fong [3] の結果を紹介するのが主な目的である。

§2. ここでは, T が subnormal operator ときの C.R. Putnam の結果を紹介しよう。

定理1 (Putnam[6]). $N = \int z dE_z \in B(K)$ を subnormal operator $T \in B(H)$ の the minimal normal extension とする。

(i) Q : proper peak set of $R(\sigma(T))$, $E(Q) \neq 0$

であるならば, $E(Q)H$ は T の nontrivial reducing subspace で, $N/E(Q)K$ は $T/E(Q)H$ の the minimal normal extension かつ (2.1) が成立つ。

$$(2.1) \quad \sigma(T|E(Q)H) \subset Q$$

更に,

$$(ii) \quad R(Q) = C(Q)$$

ならば, (2.2) が成立つ。

$$(2.2) \quad T/E(Q)H \text{ は normal operator である。}$$

証明. $P = P_H$ を H 上への projection とする. $\sigma(T)$ は spectral set for T かつ $\sigma(N) \subset \sigma(T)$ であるから, $f \in R(\sigma(T))$

と $x \in H$ に対して,

$$(2.3) \quad f(T)x = f(N)x, \quad f(T)^n x = f(N)^n x$$

が成立つ。今 f を peak function for Q と仮定し, $f(z) \equiv 1$ on Q かつ $|f(z)| < 1$ on $\sigma(T) \setminus Q$ とする。 $f^n(z) \rightarrow \chi_Q$ により, $f(N)^n x \rightarrow E(Q)x$ である。従って (2.3) より,

$$E(Q)H \subset H$$

である。すなわち, H は $E(Q)$ の reducing subspace である。また $x \in H$ に対して,

$$TE(Q)x = \lim_{n \rightarrow \infty} T f(T)^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} f(T)^n T x = E(Q)Tx$$

である。よって, H が projection $E(Q) \in B(K)$ の reducing subspace であることから, $E(Q)H$ は T の reducing subspace である。(2.1) より, $E(Q)H \neq H$ である。今 $E(Q)H = \{0\}$ としよう。このとき, $E(Q)P = 0$ である。従って任意の整数 $j \geq 0$ に対して,

$$(2.4) \quad E(Q)N^j P = N^j E(Q)P = 0$$

である。 $K = \overline{\text{lin span}\{N^j x : x \in H, j \geq 0\}}$ であるから, (2.4) より $E(Q)K = \{0\}$ となる。これは (i) に反する。以上で $E(Q)H$ が T の nontrivial reducing subspace であることは示された。

次に, $N_1 = N/E(Q)K$ は $T/E(Q)H$ の the minimal normal-extension であることを示そう。実際, $E(Q)H \subset K_0 \subset E(Q)K$ で, K_0 は N_1 の reducing subspace とする。

このとき, $N_1^{*j} K_0 \subset K_0$ より $N_1^{*j} E(Q)H \subset K_0$ である。ところが,

$$E(Q) N_1^{*j} H = N_1^{*j} E(Q) H = N_1^{*j} E(Q) H \subset K_0$$

より, $E(Q) K \subset K_0$ すなわち, $E(Q) K = K_0$ である。

最後に, (2.1) を示そう。まず,

$$(2.5) \quad \partial \sigma(T|E(Q)H) \subset Q$$

を示す。 $z \in \partial \sigma(T|E(Q)H)$ としよう。このとき, $x_n = E(Q)x_n$ ($x_n \in H, \|x_n\|=1$) があって,

$$(T-z)x_n \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。 $\|(T-z)x_n\| = \|(N_1-z)x_n\| \geq \text{dist}[z, \sigma(N_1)] \|x_n\| \geq \text{dist}[z, Q]$

より, $z \in \overline{Q} = Q$ である。次に,

$$\sigma(T|E(Q)H) = \partial \sigma(T|E(Q)H) \cup \text{int } \sigma(T|E(Q)H)$$

であるから, (2.5) より, $R = \text{int } \sigma(T|E(Q)H) \subset Q$ を示せば,

(2.1) は証明される。(2.5) より, $\partial R \subset Q$ である。また,

$\sigma(T|E(Q)H) \subset \sigma(T)$ より, $R \subset \sigma(T)$ である。今 f を peak-function for Q すなわち, $f(z) \equiv 1$ on Q かつ $|f(z)| < 1$

on $\sigma(T) \setminus Q$ とする。このとき, f は analytic on R で

continuous on $\overline{R} = R \cup \partial R$ かつ $f(z) \equiv 1$ on ∂R である。

今 Ω_0 を R の任意の component とするとき, $\partial \Omega_0 \subset \partial R$ である

から, $f(z) \equiv 1$ on $\partial \Omega_0$ である。最大値の原理により, $f(z) \equiv 1$

on Ω_0 となり, $\Omega_0 \subset Q$ を得る。ゆえに $R \subset Q$ である。

(2.2) は (1.3) と (2.1) より 明らかである。

(証終)

ある特別な peak sets に注目することによって、定理1からいくつかの結果がみちびかれる。

系1 (Olin [2. Corollary 7.11]). $T \in B(H)$ を completely subnormal contraction with the minimal normal extension $N = \int z dE_z$ on $K \supset H$ とする。このとき、 $Z \subset \{ |z|=1 \}$ が arc length measure zero の Borel set であれば、 $E(Z) = 0$ である。

証明は Putnam [6] にある。 $\sigma(N) \subset \sigma(T)$ であって $E(Z \cap \sigma(T)^c) = 0$ により、 $Z \subset \sigma(T)$ としてよい。またすべての $x \in K$ に対して、 $(E(\cdot)x, x)$ は regular であるから、 Z を closed と仮定してよい。 Z が peak set であることを示そう。

F. and M. Riesz (cf. [7. p 36~37]) は次の性質をもつ function $f \in C(\{ |z| \leq 1 \})$ の存在を示した。

f は analytic on R で $f(z) \equiv 1$ on Z であって

$|f(z)| < 1$ on $Z^c \cap \{ |z| \leq 1 \}$ である。

Mergelyan の定理 (cf. [8. Theorem 20.5]) により、 f は $\{ |z| \leq 1 \}$ 上で多項式によって一様に近似される。 $\sigma(T) \subset \{ |z| \leq 1 \}$ であるから、 $f \in R(\sigma(T))$ である。よって、 Z は peak set である。

Z は Lebesgue measure zero であるから、Hartogs - Rosenthal の定理 (cf. [4. p 47]) により、 $C(Z) = R(Z)$ である。定理1 (2.2) と T が completely subnormal であることから、 $E(Z) = 0$

を得る。

(証明終)

注. Z が peak set であることが示されたら, (2.1) と Theorem 1 の系 [5] により, $T|E(Z)H$ は normal operator になる。

系 1 の結果は一般の Jordan 閉曲線に対してても次の場合には成立つ。

系 2 (Putnam [6]). $T \in B(H)$ は completely subnormal with the minimal normal extension $N = \int z dE_z$ on $K \supset H$ とする。 C が長さをもつ Jordan 閉曲線であつ

$$(2.6) \quad \sigma(T) \subset C \cup \text{int}(C) \text{ または}$$

$$C \subset C \cup \text{ext}(C)$$

ならば, arc length measure zero の Borel set $Z \subset C$ に対して, $E(Z) = 0$ である。

証明は Putnam [6] 参照

§ 3. C. R. Putnam の結果は C. K. Fong にまつて subnormal operator の q -affine transform に対してても成立つことが示された。ここでは Fong の結果を紹介する。

定理 2 (Fong [3]). $T \in B(H)$ を q -affine transforms of subnormal operator $S \in B(K)$ とし, X を spectral set for T であつ Q を peak set of $R(X)$ とする。このとき,

(1). projection $F(Q) \in B(H)$ が存在して,

— 7 —

$F(Q)H = X_T(Q)$ で $F(Q)$ は T で生成された weakly closed inverse closed algebra $W(T)$ の元である。

(2). $T/F(Q)H$ ($T/(I-F(Q))H$) は g -affine transforms of subnormal operator であり, Q は spectral set for $T/F(Q)H$ である。

証明. いくつかの step に分ける。

$W \in B(H, K)$ を g -affinity で $SW = WT \leq L$, $N = \int z dE_z \in$

$B(\hat{K}) \in \mathcal{S}$ の the minimal normal extension とする。

$\hat{W}x = Wx$ ($x \in H$) とおけば, $\hat{W} \in B(H, \hat{K})$ は 1:1 で

$\overline{\hat{W}H} = K$ かつ

$$N\hat{W} = \hat{W}T$$

である。 $\sigma(N) \subset \sigma(S) \subset \sigma(T) \subset X$ より, $g \in R(X)$ に対して,

$$g(N)\hat{W} = \hat{W}g(T)$$

である。

step 1. projection $F(Q) \in B(H)$ があって,

$$E(Q)\hat{W} = \hat{W}F(Q) \text{ かつ } F(Q) \in W(T) \text{ である。}$$

実際 $f \in R(X)$ を peak function for Q とおけば, $f(z) \equiv 1$ on Q かつ $|f(z)| < 1$ on X/Q とする。

$$\|f(T)^n\| = \|f^n(T)\| \leq \|f^n\|_X \leq 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

であるから, $\{f(T)^n; n=1, 2, 3, \dots\}$ は weakly converge する subsequence を持つ。例えば,

$$(w) - \lim_{j \rightarrow \infty} f(T)^{n_j} = F(Q)$$

とする。 $f^n(z) \rightarrow \chi_Q (z \in X)$ で、 $f(N)^n = \int f^n(z) dE_z$ であるから

$$(s) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(N)^n = E(Q)$$

である。また、 $f(N)^{n_j} \hat{W} = \hat{W} f(T)^{n_j}$ より

$$E(Q) \hat{W} = \hat{W} F(Q)$$

を得る。

$$\hat{W} F(Q)^2 = E(Q)^2 \hat{W} = E(Q) \hat{W} = \hat{W} F(Q)$$

と、 $\hat{W}$ が 1:1 であることから $F(Q)^2 = F(Q)$ となる。 $F(Q)$ は contraction であるから、実は projection である。また $F(Q) \in W(T)$ であることはその作り方から明らかである。

step 2. $T_1 = T|_{F(Q)H}$ は $\mathcal{F}$ -affine transforms of subnormal operator である。

実際 $f(T)^{n_j} T = T f(T)^{n_j}$ であって $F(Q) = (w) - \lim_{j \rightarrow \infty} f(T)^{n_j}$ であるから、 $F(Q) T = T F(Q)$ となる。よって、 $F(Q)H$ は T の reducing subspace である。また $E(Q) \hat{W} = \hat{W} F(Q)$ より $\hat{W} F(Q)H \subset E(Q) \hat{K}$ である。 $N_1 = N|_{E(Q) \hat{K}}$, $W_1 x = \hat{W} x$; $F(Q)H \rightarrow E(Q) \hat{K}$ とおけば、 N_1 は normal operator で $\sigma(N_1) \subset Q$ であり、 W_1 は 1:1 であって $N_1 W_1 = W_1 T_1$ である。 $\overline{W_1 F(Q)H}$ は N_1 -invariant であるから、 $N'_1 = N_1|_{\overline{W_1 F(Q)H}}$ は subnormal operator であって

$$N'_1 W'_1 = W'_1 T_1$$

である。ここに、 $W'_1 x = W_1 x$; $F(Q)H \rightarrow \overline{W_1 F(Q)H}$

は g -affinity である。

step 3. $g \in R(X)$ を rational function とすれば,

$$\|g(T_1)\| \leq \|g\|_Q \text{ である。}$$

step 3 の Fong の証明には若干あいまいさがある。これを正そう。はじめに, $C \subset X$ を compact set で $C \cap Q = \emptyset$ とする。

$$\|g(T)f(T)^n\| \leq \|gf^n\|_X = \max(\|gf^n\|_{X|C}, \|gf^n\|_C)$$

$$\leq \max\{\|g\|_{X|C}, \|gf^n\|_C\} \longrightarrow \|g\|_{X|C} \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。 $F(Q) = (w) - \lim_{j \rightarrow \infty} f(T)^{n_j}$ であるから,

$$\|g(T)F(Q)\| \leq \|g\|_{X|C}$$

である。また C は任意であるから,

$$\|g(T)F(Q)\| \leq \|g\|_Q$$

である。 $\|g(T_1)\| \leq \|g(T)F(Q)\|$ より step 3 が得られる。

step 4. $r \in R(Q)$ を rational function とするとき, rational functions $g_n \in R(X)$ があって,

$$\|g_n - r\|_Q \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。

まず任意の component $\Omega \subset Q \setminus Q$ に対して, $\Omega \not\subset X$ を示そう。

$\Omega \subset X$ しよう。 $Q \cap \Omega = \emptyset$ により Q の peak function $f \in R(X)$

に対して, $f-1$ は non zero, analytic on Ω で $f-1 \equiv 0$

on $\partial\Omega$ である。これは最大値の原理に反する。従って,

Runge の定理 (cf. [8, Theorem 13.6]) により, 上記の g_n を求め

ることが出来る。

さて以上の結果を用いて, $\lambda_T(Q) = F(Q)H$ および Q が spectral set for T_1 であることを示そう。

今 $r \in R(Q)$ を rational function とする。step 4 より, rational functions $g_n \in R(X)$ があって,

$$\|g_n - r\|_Q \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。step 3 より,

$$\|g_n(T_1) - g_m(T_1)\| \leq \|g_n - g_m\|_Q \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから, $T_r = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(T_1)$ は存在する。 T_r は $\{g_n\}$ の選ぶ方に依存せずかつ $\|T_r\| \leq \|r\|_Q$ が成立つことは明らかである。

まず $\sigma(T_1) \subset Q$ を示そう。

$N_1 W_1 = W_1 T_1$ より, $g_n(N_1) W_1 = W_1 g_n(T_1)$ である。 N_1 は normal であるから, $n \rightarrow \infty$ として,

$$r(N_1) W_1 = W_1 T_r$$

である。今 $\mu \notin Q$ として, $r(z) = (z - \mu)^{-1}$ とおくと, $\sigma(N_1) \subset Q$ より, $r(N_1) = (N_1 - \mu)^{-1}$ となり,

$$(N_1 - \mu)^{-1} W_1 = W_1 T_r$$

である。 $W_1 = (N_1 - \mu)^{-1} (N_1 - \mu) W_1 = (N_1 - \mu)^{-1} W_1 (T_1 - \mu) = W_1 T_r (T_1 - \mu)$

である。よって W_1 が $1:1$ であることから, $T_r (T_1 - \mu) = I$ となる。

また, $g_n(T_1) T_1 = T_1 g_n(T_1)$ より $T_r T_1 = T_1 T_r$ となるから, $\mu \notin \sigma(T_1)$ である。

次に, $r(T_1) = T_r$ を示す。

$\sigma(N_1), \sigma(T_1) \subset \mathbb{Q}$ かつ $N_1 W_1 = W_1 T_1$ であるから,

$$R(\lambda; N_1) W_1 = W_1 R(\lambda; T_1) \quad (\lambda \notin \mathbb{Q})$$

である。従って, $W_1 r(T_1) = r(N_1) W_1 = W_1 T_r$ となり, W_1 が 1:1 であることから, $T_r = r(T_1)$ を得る。

最後に, $F(Q)H = X_T(Q)$ を示そう。

$x \in X_T(Q) \iff (T-z)f(z) \equiv x$ on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ とする analytic

function $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow H$ が存在する = と

である。 $\sigma(T_1) \subset \mathbb{Q}$ より, $f(z) = (T_1 - z)^{-1} F(Q)x$ ($x \in H$) は analytic on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ かつ $(T-z)f(z) \equiv F(Q)x$ on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ であるから,

$F(Q)H \subset X_T(Q)$ である。次に, $x \in X_T(Q)$ で, $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow H$ を analytic function かつ $(T-z)f(z) \equiv x$ on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ とする。

$$(N-z)\hat{W}f(z) = \hat{W}(T-z)f(z) \equiv \hat{W}x \text{ on } \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$$

より, $\hat{W}x \in X_N(Q) = E(Q)\hat{K}$ である。 $\hat{W}F(Q)x = E(Q)\hat{W}x = \hat{W}x$ と $\hat{W}$ が 1:1 であることから, $F(Q)x = x$ となれり, $x \in F(Q)H$ である。 (証明終)

系 1 は次のように一般化される。

系 (Fong [3]). $T \in B(H)$: (1) completely non normal contraction. (2) q -affine transforms of subnormal operator $S \in B(K)$ with the minimal normal extension $N = \int z dE_z$ on $\hat{K} \supset K$ とする。このとき,

$Z \subset \{|z| \leq 1\}$ が arc length measure zero の Borel set であれば, $E(Z) = 0$ である。

証明は系1の証明を部分的に修正することによって得られるから, ここでは省略する。

注 系1の自然な拡張としては, T に completely non-normal を要求するのではなく, S に completely subnormal を要求すべきであらう。Fong [3, prop 3] により, 次の主張も正しいことがわかる。

$T \in B(H)$ ($\|T\| \leq 1$) は q -affine transforms of completely subnormal operator $S \in B(K)$ with the minimal normal extension $N = \int z dE_z$ on $\hat{K} \supset K$ とする。このとき,

$Z \subset \{|z| \leq 1\}$ が arc length measure zero の Borel set であれば $E(Z) = 0$ である。

参考文献

- [1] S.K. Berberian, Lectures in functional Analysis and Operator theory, GTM, Springer-Verlag,
- [2] Conway and Olin, A functional calculus for subnormal operator II, Memo, Amer. Math. soc, 184 (1977),

- [3] C. K. Fong, Quasi-affine transforms of subnormal operators, Pacific J. Math, Vol 70, NO 2 (1977), 361 — 368
- [4] T. W. Gamelin, Uniform algebra, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1969,
- [5] C. R. Putnam, An inequality for the area of hyponormal spectra, Math. Z. 28 (1971), 473-477,
- [6] ———, Peak sets and Subnormal operators, Illinois J. Math. Vol 21 NO 2 (1977), 388-394,
- [7] F. and M. Riesz, Über die randwerte einer analytischen function, Quatrième Congrès des Math. scand. Stockholm, (1916), 27 — 44,
- [8] W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw-Hill, N. Y. 1966,