

同変調和写像に対する初期値・最終値問題, II

東北大学理学部 長澤 壮之 (TAKEYUKI NAGASAWA)

1 序

本稿は、[4] の続編である。問題の設定のため [4] と多少重複する記述をする。

$(M, g_M), (N, g_N)$ をともに極を持つ Riemann 多様体とする。すなわち、大域的な極座標が入り、

$$(M, g_M) = (\mathbf{R}_+ \times S^m, dt^2 + f^2(t)d\theta^2),$$

$$(N, g_N) = (\mathbf{R}_+ \times S^n, dr^2 + h^2(r)d\varphi^2)$$

と書けるものとする。ここで、 $(S^m, d\theta^2), (S^n, d\varphi^2)$ は標準的な球面とする。例えば、 $M = \mathbf{R}^{m+1}$ (Euclid 空間) であれば、 $f(t) = t$ であり、 $f(t) = \sinh t$ とすれば、 $M = \mathbf{H}^{m+1}$ (双曲型空間) となる。

写像 U が M の極を N の極に写し、

$$U(t, \theta) = (r(t), \varphi(\theta)) \in \mathbf{R}_+ \times S^n$$

と書けるとき、 U を同変写像 (equivariant map) という。特に、 $m = n$ で φ が恒等写像であるとき、回転対称写像 (rotationally symmetric map) という。

同変写像 $U = (r, \varphi)$ が調和写像、すなわち、エネルギー汎関数の臨界点であるための条件は、

$$(1.1) \quad \ddot{r}(t) + m \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \dot{r}(t) - \frac{\mu^2 h(r(t)) h'(r(t))}{f^2(t)} = 0,$$

$$(1.2) \quad r(0) = 0,$$

$\varphi : S^m \rightarrow S^n$ は eigenmap, すなわちエネルギー密度 $e(\varphi)$ が一定の調和写像,

$$\mu^2 = 2e(\varphi)$$

である。ここで、 $\dot{}$ と $'$ は、それぞれ

$$\dot{} = \frac{d}{dt}, \quad ' = \frac{d}{dr}$$

を表す。

(1.1) を (1.2) のもとで解くために、以下を常に仮定する。

仮定. f 及び h は、区間 $[0, \infty)$ 上で定義された滑らかな関数で

$$(1.3) \quad \begin{cases} f(t) = at + O(t^3) \quad (t \downarrow 0) \quad \text{となる正定数 } a \text{ が存在する、} \\ f(t) \leq mt\dot{f}(t) \quad (t \in [0, \infty)), \\ h(r) = br + O(r^3) \quad (r \downarrow 0) \quad \text{となる正定数 } b \text{ が存在する、} \\ (hh')'(r) \geq 0 \quad (r \in [0, \infty)) \end{cases}$$

を満たす。ここで、 $\int^{\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)}$ は $\frac{1}{f(\tau)}$ の遠方での積分を意味する。

このとき、次の事が知られている。

命題 1.1 (cf. [7, Corollary 2.3]). 任意の $t_0 > 0$ と $r_0 \geq 0$ に対し、

$$(1.4) \quad r(t_0) = r_0$$

を満たす (1.1), (1.2) の解が区間 $[0, t_0]$ 上で一意的に存在し、

$$r(t) \geq 0, \quad \dot{r}(t) = o\left(\frac{1}{t}\right) \quad (t \downarrow 0)$$

を満たす。

命題 1.2 ([7, Lemma 3.1]). (1.1), (1.2) の非負値解は、存在する限り

$$\dot{r}(t) \geq 0$$

を満たす。等号は $r \equiv 0$ のときのみ成立する。

(1.1), (1.2), (1.4) を満たす解を可能な限り正の方向に延長する。最大延長区間を $[0, T)$ とすると命題 1.2 より

$$(1.5) \quad \lim_{t \uparrow T} r(t) = \ell \in [0, \infty]$$

が存在する事がわかる。 ℓ を r の最終値と呼ぼう。[7, Lemma 3.1] より、次が分かる。

命題 1.3. 起こり得る T と ℓ の組合せは、

- A. $T = \infty, \ell < \infty$ ($r(t)$ は大域解で有界な最終値をもつ。)
- B. $T < \infty, \ell = \infty$ ($r(t)$ は $t = T < \infty$ で爆発する。)
- C. $T = \infty, \ell = \infty$ ($r(t)$ は $t = \infty$ で爆発する。)

のいずれかのみである。

ここでは、実際に起こり得るのは、どの場合なのかを問題にする。すなわち、A, B, C のいずれか場合の T と ℓ を与えたとき、(1.2) と (1.5) を満たす (1.1) の解の有無を調べたい。予備的考察のため、 $m = 1$ の場合を考える。このときは、 $r(t) \equiv 0$ 以外の解は、

$$\int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{h(r)} = \mu \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{f(\tau)}.$$

で与えられる。従って、次が成立する。

定理 1.1. $m = 1$ とする。 T と ℓ を与えたとき、(1.2) と (1.5) を満たす (1.1) の解の有無は以下の通りである。

1.

$$\int^{\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)} < \infty, \quad \int^{\infty} \frac{dr}{h(r)} < \infty$$

とする。このとき解は、A, B, C のいずれかの場合にも存在する。

2.

$$\int^{\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)} < \infty, \quad \int^{\infty} \frac{dr}{h(r)} = \infty$$

とする。このとき解は、A の場合のみ存在する。B, C の場合は存在しない。

3.

$$\int^{\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)} = \infty, \quad \int^{\infty} \frac{dr}{h(r)} < \infty$$

とする。このとき解は、B の場合には存在する。A の場合、 $\ell = 0$ のときのみ存在し、自明解 $r(t) \equiv 0$ である。C の場合は存在しない。

4.

$$\int^{\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)} = \infty, \quad \int^{\infty} \frac{dr}{h(r)} = \infty$$

とする。このとき解は、C の場合には存在する。A の場合、 $\ell = 0$ のときのみ存在し、自明解 $r(t) \equiv 0$ である。B の場合は存在しない。

上の結果は、 $m > 1$ に於いても正しいと思われる。[3] では、

$$(1.6) \quad \int^{\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)} < \infty$$

の場合を調べ、次の結果を得た。

定理 1.2 ([3]). (1.6) を仮定する。このとき、定理 1.1 の主張は $m \geq 1$ に於いて正しい。

この結果は、[4] でも報告した。ここでは、

$$(1.7) \quad \int^{\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)} = \infty$$

の場合についての結果を報告する。

定理 1.3 ([2]).

$$(1.8) \quad \dot{f}(t) \leq C < \infty$$

を仮定する。このとき、定理 1.1 の主張は $m \geq 1$ に於いて正しい。

注意. (1.8) は、(1.7) の十分条件である。

定理 1.3 の完全な証明は、[2] を参照されたい。ここでは、定理 1.3 の主張の一部を証明する。すなわち、

命題 1.4. (1.8) を仮定する。

1. $\int^{\infty} \frac{dr}{h(r)} < \infty$ のとき、 $r(t) \equiv 0$ 以外の解は B の場合になる。すなわち、 $r(t)$ は $t = T < \infty$ で爆発する。
2. $\int^{\infty} \frac{dr}{h(r)} = \infty$ のとき、 $r(t) \equiv 0$ 以外の解は C の場合になる。すなわち、 $r(t)$ は $t = \infty$ で爆発する。

を示そう (これによって、定理 1.3 の $\int^{\infty} \frac{dr}{h(r)} = \infty$ の場合の主張は、示された事になる)。以後、(1.8) も常に仮定する。

2 有限最終値問題の解の一意性

この節では、有限最終値問題の解の一意性を示す。これは、[4] への補遺であるだけでなく、命題 1.4 の証明に必要なものである。

補題 2.1. r_1, r_2 をともに、(1.1), (1.2) の大域解 (すなわち、 $T = \infty$) とする。このとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r_2(t) \in [0, \infty)$$

が成立すれば、 $r_1(t) \equiv r_2(t)$ である。

証明. $\rho(t) = r_1(t) - r_2(t)$ とおく。(1.1) より、

$$(f^m \rho \dot{\rho})' = f^m \dot{\rho}^2 + \mu^2 f^{m-2} (h(r_1)h'(r_1) - h(r_2)h'(r_2)) (r_1 - r_2) \geq 0$$

となる。ここで、 $(hh')' \geq 0$ を用いた。 $f^m \rho \dot{\rho}|_{t=0} = 0$ と $f^m(t) > 0$ ($t > 0$) に注意して 0 から t まで積分すると、

$$(\rho^2)' \geq 0 \quad (t > 0)$$

が得られる。一方、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t)^2 = (\ell - \ell)^2 = 0$$

が成り立つ。ゆえに、 $\rho(t) \equiv 0$ が成り立つ。 $\square$

3 基本不等式

この節では、解が満たす不等式と、それより直ちに導かれる事実を記す。これらは、命題 1.4 の証明に必要である。不等式は、[4] でも紹介した。不等式の証明は、[3, 7] を見られたい。

補題 3.1. $\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{h(r)} < \infty$ とする。(1.2), (1.4) を満たす (1.1) の解は一意的であるので、 $r(t_0)$ は r_0 と t_0 によって一意的に定まる。それを $\phi(r_0, t_0)$ と書く。

$$\phi(r_0, t_0) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{\mu^2 (f(t_0))^{-2} \{h(r)^2 - h(r_0)^2\} + \beta(r_0, t_0)^2}}$$

とおくと、 ϕ は well-defined で

$$f(t_0)^m \int_{t_0}^T \frac{d\tau}{f(\tau)^m} \leq \phi(r_0, t_0) \rightarrow 0 \quad \text{as } r_0 \rightarrow \infty$$

が成り立つ。

系 3.1. $\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{h(r)} < \infty$ のとき、 $T < \infty, \ell = \infty$ となる (1.1), (1.2) の解が存在する。

証明. 命題 1.1 で得られた解を $t > t_0$ に延長する。 t_0 を固定し $r_0 \rightarrow \infty$ としてみると、補題 3.1 より、

$$f(t_0)^m \int_{t_0}^T \frac{d\tau}{f(\tau)^m} \leq \phi(r_0, t_0) < f(t_0)^m \int_{t_0}^{\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)^m}$$

となる。ゆえに、 $T < \infty$ である。命題 1.3 より、 $\ell = \infty$ である。 $\square$

補題 3.2. (1.1), (1.2), (1.4) の非自明解 $r(t)$ に対し、 $t \geq t_0 > 0$ のとき、

$$\int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{h(r)} \leq \mu \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{f(\tau)}$$

が成立する。

系 3.2. $\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{h(r)} = \infty$ のとき、 $T < \infty, \ell = \infty$ となる (1.1), (1.2) の解は存在しない。

証明. このような解が存在したとして、補題 3.2 の不等式において、 $t \uparrow T$ としてみると、

$$\infty = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{h(r)} \leq \mu \int_{t_0}^T \frac{d\tau}{f(\tau)} < \infty$$

となり、矛盾が生じる。□

4 $f(t) = t$ の場合

$f(t) = t$ は、明らかに (1.8) を満たす。この節では、命題 1.4 を $f(t) = t$ の場合に限って証明する。このとき、(1.1), (1.2) は、

$$(4.1) \quad \begin{cases} \ddot{r}(t) + \frac{m}{t}\dot{r}(t) - \frac{\mu^2}{t^2}h(r(t))h'(r(t)) = 0, \\ r(0) = 0 \end{cases}$$

となる。

補題 4.1. $r(t)$ が、(4.1) の解であれば、 $\lambda \geq 0$ に対し $r_{\lambda}(t) = r(\lambda t)$ も (4.1) の解である。

証明. $\lambda = 0$ のときは、 $r_{\lambda=0}(t) \equiv 0$ なので自明である。 $\lambda > 0$ とする。 $x = \log t$ と座標変換し、 $r(t) = \tilde{r}(x)$ とおく。このとき、 $r(t)$ が (4.1) の解である事と、 $\tilde{r}(x)$ が

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\tilde{r}(x) + (m-1)\frac{d}{dx}\tilde{r}(x) - \mu^2 h(\tilde{r}(x))h'(\tilde{r}(x)) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{r}(x) = 0 \end{cases}$$

の解である事は、同値である。明らかに、 $\tilde{r}(x)$ が、(4.2) の解であれば、 $\tilde{r}(x + \log \lambda)$ も (4.2) の解である。ゆえに、 $r_{\lambda}(t)$ も (4.1) の解である。□

系 4.1. $f(t) = t$ のとき、 $T = \infty, \ell < \infty$ となる (1.1), (1.2) の解は $r(t) \equiv 0$ 以外には存在しない。

証明. $T = \infty, \ell < \infty$ となる解 $r(t)$ が存在したとする。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \ell < \infty$$

である。補題 4.1 より、 $r_{\lambda}(t)$ も解で、 $\lambda > 0$ のとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_{\lambda}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(\lambda t) = \ell < \infty$$

である。補題 2.1 より、任意の $\lambda > 0$ に対し、

$$r(t) = r_\lambda(t)$$

でなくてはならない。これは、 r は定数関数である事を意味する。 $r(0) = 0$ より、 $r(t) \equiv 0$ となる。□

系 4.2. $\int_0^\infty \frac{dr}{h(r)} < \infty$ とする。 $f(t) = t$ のとき、 $T = \infty$, $\ell = \infty$ となる (1.1), (1.2) の解は存在しない。

証明. このような解 $r(t)$ が存在したとする。系 3.1 で得られた解を $\tilde{r}(t)$ とする。すなわち、 $\tilde{r}(t)$ は、ある $T^* \in (0, \infty)$ が存在して、

$$\lim_{t \uparrow T^*} \tilde{r}(t) = \infty$$

となる。 $t_0 < T^*$ とする。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$$

なので、 $\lambda > 0$ を十分大きくすると、

$$r_\lambda(t_0) > \tilde{r}(t_0)$$

とできる。 $r_\lambda(t)$ も大域解なので、 t が T^* に十分近いとき、

$$r_\lambda(t) < \tilde{r}(t)$$

となる。中間値の定理より、

$$r_\lambda(t_1) = \tilde{r}(t_1)$$

となる $t_1 \in (t_0, T^*)$ が存在する。 $\rho(t) = r_\lambda(t) - \tilde{r}(t)$ とおくと、補題 2.1 の証明と同様にして、

$$(\rho^2)' \geq 0$$

が示せる。これは、

$$\rho^2(t_0) > 0, \quad \rho^2(t_1) = 0$$

に矛盾する。□

系 3.1-2, 4.1-2 より、命題 1.4 が $f(t) = t$ の場合には証明できた。

5 一般の場合

この節では、命題 1.4 を一般の f に対して証明する。それには、 $f(t) = t$ の場合との比較を行う。一般性を失う事なく、(1.8) の C は 1 以上としてよい。 $\tilde{r}(t)$ を

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{r}}(t) + \frac{Cm}{t}\dot{\tilde{r}}(t) - \frac{\mu^2}{t^2}h(\tilde{r}(t))h'(\tilde{r}(t)) = 0, \\ \tilde{r}(0) = 0 \end{cases}$$

の非自明解とする。

$$\hat{r}_\lambda(t) = \tilde{r}\left(\lambda \exp\left(\int_1^t \frac{d\tau}{f(\tau)}\right)\right) \quad (\lambda > 0)$$

とおく。これは、

$$\begin{cases} \ddot{\hat{r}}_\lambda(t) + m\frac{f'(t)}{f(t)}\dot{\hat{r}}_\lambda(t) - \frac{\mu^2}{f^2(t)}h(\hat{r}_\lambda(t))h'(\hat{r}_\lambda(t)) \leq 0, \\ \hat{r}_\lambda(0) = 0 \end{cases}$$

を満たす。ここで、(1.8) を用いた。前節より、 $\tilde{r}(t)$ に対しては、命題 1.4 は正しいので、

$$(5.1) \quad \lim_{t \uparrow T^*} \hat{r}_\lambda(t) = \infty$$

となる $T^* \in (0, \infty]$ が存在する事が分かる。ここで、

$$(5.2) \quad \begin{cases} \int_1^\infty \frac{dr}{h(r)} < \infty \text{ ならば、 } T^* < \infty, \\ \int_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = \infty \text{ ならば、 } T^* = \infty \end{cases}$$

である。

(1.1), (1.2) の非自明解を $r(t)$ とする。命題 1.2 より、 $t > 0$ のとき、 $r(t) > 0$ である。また、 t_0 を固定すると、

$$\hat{r}_\lambda(t_0) \rightarrow 0 \quad (\lambda \downarrow 0)$$

である。よって、 $t_0 > 0$ と $\lambda > 0$ を十分小さくにとって、

$$r(t_0) > \hat{r}_\lambda(t_0)$$

とする事ができる。 $\rho(t) = r(t) - \hat{r}_\lambda(t)$ とおくと、補題 2.1 の証明と同様にして、

$$(\rho^2)' \geq 0$$

が示せる。よって、 $t \geq t_0$ に対して、

$$r(t) > \hat{r}_\lambda(t)$$

となる事がわかる。(5.1) より、

$$\lim_{t \uparrow T} r(t) = \infty$$

となる $T \in (0, T^*]$ が存在する事が分かる。(5.2) より、

$$\begin{cases} \int^\infty \frac{dr}{h(r)} < \infty \text{ ならば、 } T < \infty, \\ \int^\infty \frac{dr}{h(r)} = \infty \text{ ならば、 } T \leq \infty \end{cases}$$

となる事がわかる。後者の場合、 $T < \infty$ になりえない事は系 3.2 より分かる。以上で命題 1.4 が示せた。□

6 応用

定理 1.2 の応用については、[4] で記したので、ここでは定理 1.3 の応用について記す。

eigenmap の存在については、[6] を参照されたい。以下、eigenmap が存在する m と n の対を考える。 $M = \mathbf{R}^{m+1}$ ($f(t) = t$)、及び $N = \mathbf{R}^{n+1}$ ($h(r) = r$) または $N = \mathbf{H}^{n+1}$ ($h(r) = \sinh r$) は、仮定 (1.3), (1.8) を満たす。よって、定理 1.3 が適用できる。その結果、定義域が $\mathbf{R}^{m+1}$ 全体 (すなわち、 $T = \infty$) である同変調和写像は、定値写像以外には存在しない事が分かる。

立川 [5] は、 $\mathbf{R}^{m+1}$ から $\mathbf{H}^{m+1}$ への回転対称調和写像について、ある仮定のもとで、この結果を示した。 $\mathbf{R}^{m+1}$ から $\mathbf{H}^{n+1}$ への同変調和写像についても、同様の結果が芥川と立川 [1] の議論より導かれる。

我々の結果は、 $f(t) = t$ に限らなくても (1.8) を仮定すればよい。この種の結果は、「全体で定義された有界な同変調和写像は定値写像以外には存在しない。」と言い替えられ、一種の Liouville 型の定理と言える。

参考文献

- [1] Akutagawa, K. & A. Tachikawa, *Nonexistence results for harmonic maps between noncompact complete Riemannian manifolds*, Tokyo J. Math. **16** (1993), 131–145.
- [2] Nagasawa, T., *Initial-final value problems for equivariant harmonic maps, II: Blowup solutions*, preprint.
- [3] Nagasawa, T. & K. Ueno, *Initial-final value problems for equivariant harmonic maps*, preprint.

- [4] 長澤壯之, 上野慶介, 同変調和写像に対する初期値・最終値問題, 京都大学数理解析研究所講究録 (掲載予定) .
- [5] Tachikawa, A., *A non-existence result for harmonic mappings from $\mathbf{R}^n$ into $\mathbf{H}^n$* , Tokyo J. Math. 11 (1985), 311–316.
- [6] Ueno K., *Some new examples of eigenmaps from S^m into S^n* , Proc. Japan Acad. 69 (1993), 205–208.
- [7] Ueno K., *A study of ordinary differential equations arising from equivariant harmonic maps*, preprint.