

コンパクト不変領域への 漸近性に関する二三の定理

神戸大 理 浦 太郎

1. 以下 X で位相空間, $\mathcal{R}$ で実数全体の集合を表わす.

写像 $\pi: X \times \mathcal{R} \rightarrow X$ が次の条件をみたすとき, π または (X, π) は相空間 X の上の力学系 *dynamical system* を定義するという.

$$(1) \pi(x, 0) = x, \quad (2) \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s),$$

(3) π は $X \times \mathcal{R}$ で連続である.

以下一々の力学系 (X, π) が与えられているとする.

1 bis. $\mathcal{R}^+$ で負でない実数全体の集合を表わす.

$\mathcal{R}^-$ については説明するまでもないであろう (以下同様).

$x \in X$ に対して $\mathcal{V}(x)$ は x の近傍フィルターを表わす.

$\mathcal{R}$ の上の $t \rightarrow \infty$ に対応するフィルターを $\mathcal{F}^+$ で表わす.

2. $x \in X$ のとき, $t \in \mathbb{R}$ に対して $\pi(x, t)$ を対応させる写像 $\mathbb{R} \rightarrow X$ を π_x で表わす.

$C^+(x) = \pi_x(\mathbb{R}^+)$ を x を出る正半軌道,

$C(x) \equiv C^+(x) \cup C^-(x) = \pi_x(\mathbb{R})$ を x を通る (全) 軌道という.

$\mathbb{R}^+$ に従った π_x の cluster set を $L^+(x)$ と書き, x の + limit set という.

$V(x) \times \mathbb{R}^+$ に従った π の cluster set を $D^+(x)$ と書き, x の + prolongation set といふ, $V(x) \times \mathbb{R}^+$ に従った π の cluster set を $J^+(x)$ と書き, + prolongational limit set という. (Cf. [1], [3], [10], [11]).

(J^+ および π^0 の (TV) は本論説の主題と直接の関係はないが, C^+ , L^+ , D^+ との関連性を明らかにするためにつけておいた).

3. $x \in X$ とするとき,

$$C^+(x) = \{x\} \quad (\Leftrightarrow) \quad C^-(x) = \{x\} \Leftrightarrow C(x) = \{x\}$$

ならば, x は特異点 singular point であるという.

4. $x \in X$ とするとき,

$$\exists t \neq 0 \Rightarrow \pi_x(t) = x$$

ならば, x は self intersecting であるという。

それは次の三種類に分類される。

(1) $\exists \min t > 0 \Rightarrow \pi_x(t) = x$. このとき, x は periodic であるという。

(2) $\forall t \in \mathbb{R}, \pi_x(t) = x$ これは 3 に連げた
「 x は特異点である」ことに代わらない。

(3) (1) でも (2) でもない。このとき, x は quasi-singular であるという。 (cf. [5])

定理. X が Hausdorff ならば quasi-singular points はない。 (cf. [5]).

定理. X が Hausdorff であれば, $x \in X$ が self intersecting であることと, $C(x)$ が compact であることは同値である。 (未発表)。

注意 X は Hausdorff であるときよう。 $x \in X$ が self intersecting であることと, $C^+(x)$ が compact であることとが同値なことは, 容易に証明される。この + を取ると非常に難しくなるのである。

5. $x \in X$ とする。

(I) $L^+(x) = \emptyset$ ならば x は + needed である。

い)。

(II) $L^+(x) \neq \emptyset$ とする。

(1) $L^+(x) \ni x$ ($\Leftrightarrow L^+(x) \cap C(x) \neq \emptyset \Leftrightarrow L^+(x) \supset C(x)$)
 ならば, x は + Poisson 安定 stable であるといふ。

(2) $L^+(x) \not\ni x$ ($\Leftrightarrow L^+(x) \cap C(x) = \emptyset$) ならば, x
 は $(L^+(x))^\circ$ + 漸近的 asymptotic (to $L^+(x)$) であ
 るといふ。

(III) $C^+(x)$ が relatively compact ならば, x
 は + Lagrange 安定 stable であるといふ。

(IV) $J^+(x) \ni x$ ($\Leftrightarrow L^+(x) \ni x, \Rightarrow J^+(x) \supset \overline{C^+(x)}$)
 ならば, x は + non-wandering であるといふ。こ
 れは x が - non-wandering であること, 亦即ち
 $J^-(x) \ni x$ と同値であるので, non-wandering には
 向きを指示する必要はない。(cf. [6], [7], [8]).

6. 我々は漸近性 (II-2) を研究しない。漸近性には
 ここで述べたものの他にも, 沢山の定義が与えられる。

それに関しては Bushaw が面白い研究をしている。(未
 発表)。

$L^+(x)$ が singleton $\{y\}$ ならば, y は特異点であ
 り, $X \subset \mathbb{R}^2$ で $L^+(x) \neq \emptyset$ かつ $L^+(x)$ が特異点を

含まなければ, $L^+(x)$ は一つの周期軌道であって,
 $C(x)$ の十分近くの点は, すべて $L^+(x)$ に $+$ 漸近する.
 これらは古典的結果である.

我々は研究の方向を逆にとつて, $M \subset X$ が与えられた
 ときに,

$$\exists x \notin M \Rightarrow M \cap L^+(x) \neq \emptyset$$

とその dual ($\exists x \notin M \Rightarrow M \cap L^-(x) \neq \emptyset$) をしらべる
 こと, およびそのような点 x の性質をしらべることが,
 この論議の目的である. 勿論 M には場合に応じて,
 附加的條件を課さなければならなくなる. なほ関連した新
 しい結果にもふれておく.

7. $\emptyset \neq M \subset X$ とする.

$C^+(M) \subset M (\Leftrightarrow C^+(M) = M)$ ならば, M は $+$ 不変
 invariant であるという.

$C(M) \subset M (\Leftrightarrow C(M) = M)$ ならば, M は不変
 であるという. M は不変集合, 不変領域であるともいう.

$y \in X$ が特異点ならば singleton $\{y\}$, X が
 Hausdorff で x が periodic ならば $C(x)$ は
 コンパクト不変である.

そこで M を不変集合とする.

$x \notin M$, $\phi \neq L^+(x) \subset M$ ならば x は左義で M に + 漸近的であるという。

$x \notin M$, $L^+(x) = M$ ならば x は(狭義で) M に + 漸近的であるという。

M を (コンパクトな) 閉じた不変集合とする。
($N \subset M$ が (コンパクトな) 閉じた不変集合ならば, $N = M$ である) なる命題が成り立つとき, M は (コンパクトな) minimal set であるという。

定理. $x \in X$, $L^+(x) \neq \phi$ ならば $L^+(x)$ は閉じた不変集合である。

定理. M はコンパクトな minimal set であるとする。
 $x (\notin M)$ が左義で M に + 漸近的ならば, x は狭義でも M に + 漸近的である。

8. $\phi \neq M \subset X$ に対して,

$$A_w^+(M) = \{x \mid L^+(x) \cap M \neq \phi\},$$

$$A^+(M) = \{x \mid \phi \neq L^+(x) \subset M\}$$

とおき, $A_w^+(M)$ と $A^+(M)$ とをそれぞれ M の region of + weak attraction, region of + attraction という。

この記号を使えば, M を不変集合, $x \notin M$ とするとき, x が漸近で M に + 漸近的なることと, $x \in A^+(M)$ とは同値である. (Cf. [1], [2], [3]).

9. 今後, 相空間 X は局所コンパクト (Hausdorff) であるとし, M は常に $\emptyset \neq M \subset X$ なるコンパクト不変集合を表わすものとする.

10. $D^+(M) = M$ ならば, M は + 安定 stable であるといひ, $A_\omega^+(M) \in \mathcal{V}(M)$ ならば, M は + weak attractor, $A^+(M) \in \mathcal{V}(M)$ ならば, M は + attractor であるといふ.

11.

定理. M が + weak attractor であることと, $A_\omega^+(M)$ が M を含む開いた不変集合であることは同値である.

M が + attractor であることと, $A^+(M)$ が M を含む開いた不変集合であることは同値である. (Cf. [1], [2], [3]).

12. M が $+$ attractor であると同時に $+$ 安定であるとき, M は $+$ 漸近安定であるという.

定理. M が $+$ weak attractor であれば, $D^+(M)$ はコンパクト, $+$ 漸近安定な不変集合であり, その region of $+$ attraction は $A_w^+(M)$, すなわち

$$A^+(D^+(M)) = A_w^+(M)$$

である. かゝ $N (\supset M)$ がコンパクト, $+$ 漸近安定な不変集合であれば, $N \supset D^+(M)$ である. 言い換え
ると, $D^+(M)$ は M を含む最小のコンパクト, $+$ 漸近安定な不変集合である. (Cf. [1], [2], [3]).

13. $P(N)$ を素数 N ($\in 2^*$) をもつ一つの命題とする. M が $P(N)$ に関して独立しているとは

$$\exists V \in \mathcal{V}(M) \ni \{ (P(N), N \subset V) \Rightarrow N \subset M \}$$

なることをいう.

$\mathcal{Q}$ を X の部分のつくる族, すなわち 2^X の部分集合とあるとき, M が $\mathcal{Q}$ から独立しているとは

$$\exists V \in \mathcal{V}(M) \ni \{ (N \in \mathcal{Q}, N \subset V) \Rightarrow N \subset M \}$$

なることをいう. (Cf. [10]).

14.

定理. M がコンパクト不変集合から孤立しているとする.

(1) M は + 漸近安定である.

(2) M は - 漸近安定である.

(3) 実数 $x, y \notin M$ が存在して, $L^+(x) \subset M$,
 $L^-(x) \subset M$ である.

(1), (2), (3) のいずれか一つが ~~成~~^か起る. もし M が
 閉集合でなければ, 一つだけしか起らない.

15.

定理 (Zubov). M が + 安定ならば, オペラの
 $x \notin M$ に対して $L^-(x) \cap M = \emptyset$ である.

この逆は真でないが, M が + 安定なとき, オペラの
 $x \notin M$ に対して $D^-(x) \cap M = \emptyset$ は同値である.
 (Cf. [10], [11], [12]).

16. 14の定理が得られたので, 以下の議論は

M がコンパクト不変集合から孤立していない場合に向けら
 れる. その一般論は [12] に述べられているが, 複雑
 があるので, ここでは省略する. なお [12] では安定性

を中心として述べられている。

17. これから, 「コンパクトな不変集合より孤立している」という条件を多少弱めても得られる結果と等価である。

今後 M はコンパクトな minimal set とし, α がコンパクトな minimal sets から孤立していると仮定する。また U で

$$N(\subset \bar{U}) \text{ コンパクト minimal} \Rightarrow N = M$$

なるような M の近傍を表わすものとする。

18.

$$N_U^+ = \{x \in \bar{U} - M \mid C^+(x) \subset \bar{U}\}$$

とおく。慣例に反して

$$N_U = N_U^+ \cap N_U^-$$

とおく。 $N_U \neq \emptyset$ ならば, N_U は Bendixson の région nodale fermée である。

定理. $(\exists V \in \mathcal{V}(M) \ni N_V = \emptyset)$ ならば

$$C^-(N_U^+) = A^+(M) \text{ である. (未発表).}$$

定理 $N_U = \emptyset$ ならば, すべての $x \in N_U^+$ に対して, x は M に + 漸近的である. (Cf. [7], [8]).

定理. $\alpha \in N_v^+ - N_v^-$ ならば, α は $L^+(x)$ に漸近的である. (cf. [7], [8]).

19. 以上述べたことは, 適当な修正を施せば, local dynamical systems に拡張せられるが, 簡単のため dynamical systems の枠内で述べておいた. 前者については, 文献 [4], [5], [8], [11] を見られたい.

References

- [1] J. Auslander, N. P. Bhatia, P. Seibert : Attractors in Dynamical Systems, Bol. Soc. Mat. Mexicana, vol. 9 (1964), pp. 55-66.
- [2] N. P. Bhatia : Weak Attractors in Dynamical Systems, Ibid., vol. 11(1966), pp. 56-64.
- [3] N. P. Bhatia, G. Szegő : Dynamical Systems : Stability Theory and Applications, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag 1967, Berlin, Heidelberg, New York.
- [4] O. Hájek : Structure of Dynamical Systems, Comm. Math. Univ. Carolinae, vol. 6(1965), pp. 53-72.
- [5] _____ : Dynamical Systems in the Plane, Academic Press, 1968, New York.
- [6] v. v. Nemytskii, v. v. Stepanov : Qualitative Theory of Differential Equations, Moscow-Leningrad, 1949(Russian); English edition, Princeton Univ. Press 1960, Princeton.
- [7] T. Saito : On the Flow outside an Isolated Minimal Set, Proc. US-Japan Seminar on Diff. and Funct. Equations June 1967 edited by W. A. Harris Jr. and Y. Sibuya, W. A. Benjamin 1967, New York, Amsterdam.
- [8] _____ : Isolated Minimal Sets (to appear).
- [9] G. R. Sell : Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics I, II, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 127(1967), pp. 241-262, 263-286.

- [10] T. Ura : Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace à m dimensions, Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure, vol. 70(1953), pp. 287-360.
- [11] _____ : Sur le courant extérieure à une région invariante; prolongement d'une caractéristique et l'ordre de stabilité, Funkc. Ekvac., vol. 2(1959), pp. 143-200.
- [12] _____ : On the Flow outside a Closed Invariant Set; Stability, Relative Stability and Saddle Sets, Contr. Diff. Eq., vol. 3(1964), pp. 249-294.
- [13] _____ , I. Kimura : Sur le courant extérieur à une région invariante; Théorème de Bendixson, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, vol. 8(1960), pp. 23-39.

