

外国投資の為替リスク管理のための数理モデル

法政大学工学部 浦谷 規 (Tadashi Uratani) 廣谷 清二 (Seiji Hirotani)
College of Engineering, Hosei University

1 はじめに

日本政府の低金利政策は海外の債券投資を魅力的にさせている。しかし、為替の変動は情報化社会の進展とともに著しく大きくなっている。これは、リアルタイムの情報に投資家が過敏に反応し、しかも投資家に無差別に伝達される IT 技術に起因するのであろう。

この為替レートの変動はボラティリティによって計測され、この変動指標は近年特に大きくなっている。したがって、海外の債券投資の高収益率は一旦円高が始まれば一夜にして損失に転じてしまう。このリスクを回避することが為替リスク管理に特化したベンチャー会社の存在する理由となっている。リスク管理は現在でも、古典的テクニカル分析、伝統的ポートフォリオ理論、ファンダメンタル PPP 理論から金融イノベーションを用いる方法まで種々存在している。

金融イノベーションの方法は派生証券をある理論的ルールにしたがってポートフォリオに組み込む金融工学的手法である。リスク資産に対して完全にそのリスクをヘッジするのはプロテクティブ・ブット、確保したい投資元金を行使価格とするヨーロッパ型ブット・オプションの保有戦略である。しかし、CAPM 理論から明らかなように高収益資産は高ボラティリティであり、したがって高オプション・プレミアムである。均衡においては、オプション費用を差し引くとプロテクティブ・ブット戦略は国内の低い投資収益率に等しくなる。リスク回避費用を軽減し、多少のリスクを許容する方法が LOR で有名なダイナミック・ヘッジング [2] や CPP I [4] や [1] などのポートフォリオ・インシュランスである。LOR をはじめ多くのポートフォリオ・インシュランスは 87 年 10 月のブラック・マンデー以降、暫く論文を見なくなった。ブラック・マンデーの犯人探しの容疑者にされたからであろうか。

しかし、ポートフォリオ・インシュランス (PI) の悪玉説の中心的論客であったグロスマンが、下方リスクを柔軟にコントロールを可能とする DrawDown ポートフォリオインシュランス [3] のアイデアに触発され、再び最近盛んに研究されるようになった。

現実の市場では、為替リスクの管理方法は通貨オーバーレイ (Currency Overlay) とよばれ、ロンドンを中心に種々のベンチャー企業 [6] が生まれている。為替リスク管理ビジネスは、アメリカ合衆国企業の円為替管理と日本企業のドル為替管理をマッチングするだけでも、運営可能な事業である。

しかし、本論文では PI 理論の応用として分析する数理モデルを紹介する。第 2 節で、通貨リスク管理のモデルをポートフォリオ・インシュランスの観点から明らかにする。ダイナミックヘッジング、CPPI の基本的 PI を明らかにする。第 3 節では、従来の PI の欠点を克服できる DrawDown PI モデルの仕組みの解説とその単純な戦略を提案し、通貨管理のリスク管理、高収益率補足のそれぞれの状況を 1991 年始から 2000 年末までの日次為替データで検証してみた。最後に考察すべき問題点をまとめた。

2 通貨リスク管理のモデル

国債はデフォルトつまり元金および利子払いが滞りしない。なぜなら、その国は通貨発行権を有するのでいざとなれば通貨を好きなだけ発行できるからである。しかし、そのときには為替レートが悪化することは明らかである。

年表記の時点 t における外国通貨の自国通貨での価格（たとえば1 US ドルを120円）を $X(t)$ とする。さらに、外国国債の満期 T の t における（外国通貨での）割引債価格を $S(t, T)$ とする。

いま、外国債を $S(t, T)X(t)$ で購入すると、満期には額面の1を外国通貨で受け取るので自国通貨では $X(T)$ であるから、裸の (Uncovered) 海外投資の年あたり収益率は、

$$r_u = \log\left(\frac{X(T)}{S(t, T)X(t)}\right)/(T - t)$$

である。この投資が正の収益率であるためには、

$$\frac{X(T)}{X(t)} \frac{1}{S(t, T)} > 1$$

である。この式の左辺第1項はドルの収益率であり、第2項は外国国債の収益率である。その積1より大きいときに、外国国債投資が正の収益率となる。したがって、円為替の変化率と米国割引債の収益率の積が1より大きいとき正の米ドル投資収益率が得られることは明らかである。

1 期間モデル $T - t = 1$ の場合を考えよう。

$$\begin{aligned} e^{r_u} &= \frac{X(t+1)}{X(t)S(t, t+1)} \\ &= e^{r_x} e^{r_s} \end{aligned} \quad (1)$$

ただし為替レートの変化率 r_x 、外国国債の収益率 r_s 、国内国債の収益率 r_p はそれぞれ、

$$e^{r_x} = \frac{X(t+1)}{X(t)}, \quad e^{r_s} = 1/S(t, t+1), \quad e^{r_p} = 1/P(t, t+1)$$

である。海外投資が自国安全投資より高収益であるためには、

$$r_u > r_p$$

でなければならない。(1)より、

$$e^{r_x} > \frac{e^{r_p}}{e^{r_s}}$$

が外国投資が正の収益率になる条件である。つまり、

$$r_s - r_p > -r_x$$

となる。 $r_s > r_p$ だから円高による損失率 $-r_x$ が海外国債と国内国債の収益率の差以下である限り、海外投資は収益がある。

2.1 為替予約とリスクヘッジ

時点 T の為替レート $X(T)$ の確定は、為替予約で可能である。為替予約は先渡し契約であり、現時点 t で確定する時点 T の為替レートを $F(t, T)$ (先渡し価格ともよばれる) とする。

ところで、為替予約をしたときの (Covered) 収益率は、リスクは完全にヘッジされるために、安全資産である国内国債の収益率と同じでなければならないから、

$$\begin{aligned} e^{r_c(T-t)} &= \frac{F(t, T)}{S(t, T)X(t)} \\ &= \frac{1}{P(t, T)} \end{aligned}$$

である。ただし、 $P(t, T)$ は満期 T の (国内の) 割引国債の価格 (額面 1 円) とする。したがって、為替の先渡しレートは

$$F(t, T) = X(t) \frac{S(t, T)}{P(t, T)}$$

である。

海外投資の動機は外国国債の収益率が自国国債より高いからである。すなわち、

$$\frac{1}{P(t, T)} < \frac{1}{S(t, T)}$$

であるから、

$$F(t, T) < X(t)$$

となる。これは、我が国のように低金利の国の為替予約は現物の為替レートより低い。したがって、トラベラーズチェックの方がドルを手数料を払っても、安く買える旅行者にとって好ましいことの理由である。しかしながら、投資家にとっては満期時の受け取り額が $F(t, T)$ になるわけだから、国内投資と同一の収益率で海外投資の魅力は全くなくなる。

為替が円安になって、海外投資の収益率が高いときに海外投資の比率を増加し、円高で収益が負になるときは外国投資を削減する動的なポートフォリオ戦略を以下に紹介する。

2.2 ダイナミック・ヘッジングと CPPI

円高で収益率減少のリスクをヘッジしながら、円安時の高収益を確保する方法が、いわゆるポートフォリオ・インシュランスである。時点 T で確保したい額を K 円とし、初期投資額 $KP(t, T)$ で外国国債を $KP(t, T)/X(t)$ 単位購入する。 K を確保するためには、 $S(t, T)X(t) \equiv Z(t)$ を源資産とし行使価格 K のヨーロッパ型プットオプションを追加購入したポートフォリオで可能となる。プット・コールパリティ条件から、このポートフォリオは t には、行使価格 K のコールオプションと $KP(t, T)$ の国内国債投資のポートフォリオと同一である。しかし、 $Z(t)$ を源資産とし、期間 $T-t$ のヨーロッパ型オプションは必ずしも市場に存在しない。そこで、オプションを安全資産と源資産で離散時点において複製するのが、ダイナミック・ヘッジングである。

2.2.1 オプションのダイナミックヘッジングによるポートフォリオ・インシュランス

時点 T で K を保証する PI は $Ke^{r(T-t)}$ の安全資産と行使価格 K のコールオプションのポートフォリオに等しい。コールオプション価格を $C(t)$ とする。このとき、このポートフォリオを複製する取引戦略は源資産を $\theta(t)$ 単位と安全資産を $\alpha(t)$ 保有するとしよう。源資産が幾何ブラウン運動に従うとき、複製戦略は

$$\theta(t) = N(d) \quad (2)$$

$$d = \frac{\log Z(t)/K + (r_P + \sigma_Z^2/2)(T-t)}{\sigma_Z \sqrt{T-t}}$$

$$\alpha(t) = C(t) - Z(t)\theta(t)$$

である。つまり、株式の保有数は標準正規分布の確率点 d 以下の確率となる。ダイナミックヘッジングでは、可能な限りこの保有数に保たれるようにリバランスする戦略である。そのためにリバランス回数が多くなり取引費用がそれに比例して増大する。LOR では危険資産と安全資産のリバランスには、危険資産のロング保有と先物のショートで行い、先物の保有量の変化に対する取引コストの少ない点を利用した。

ダイナミック戦略の最大の欠点は、オプション公式に依存しているため、オプションのパラメータ、特にボラタリティの計測にポートフォリオインシュランスの有効性が左右される。資産分布およびそのパラメータに依存しない戦略が CPPI(Constant Proportion Portfolio Insurance) である。

2.2.2 CPPI

いま、投資ポートフォリオの価値を $W(t)$ とし、時点 T で確保したい額 K の時点 t の価値を $H(t)$ とする。したがって $H(t) = KP(t, T)$ である。危険資産である海外投資額を決めるために、

$$Y(t) = W(t) - H(t) \quad (3)$$

をクッション (Cushion) として定義する。CPPI ではこのクッションの定数 λ 倍を危険資産への投資額 $A(t)$

$$A(t) = \lambda Y(t)$$

とする。 $W(t)$ の残額は国内国債に投資する。定数 $\lambda < 1$ のとき、ポートフォリオは国内国債と外国国債の両方を保有する。 $\lambda = 1$ のとき、外国国債だけの投資である。さらに、 $\lambda > 1$ のときは国内で借入をして外債を買う、いわゆるレバレッジ・ポジションである。海外投資の自国通貨での価格プロセスを

$$Z(t) = S(t, T)X(t)$$

とおき、この海外投資の収益率のプロセスを

$$\frac{dZ(t)}{Z(t)} = \mu_Z(t)dt + \sigma_Z(t)dw(t) \quad (4)$$

とする。投資ポートフォリオ $W(t)$ のプロセスは

$$dW(t) = A(t)\frac{dZ(t)}{Z(t)} + (W(t) - A(t))\frac{dP(t, T)}{P(t, T)}$$

である。クッションのプロセスは (3) から、

$$\begin{aligned} dY(t) &= dW(t) - dH(t) \\ &= A(t)\frac{dZ(t)}{Z(t)} + (W(t) - A(t))\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} - KdP(t) \\ &= \lambda Y(t)\frac{dZ(t)}{Z(t)} + (W(t) - KP(t, T) - A(t))\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} \\ &= \lambda Y(t)\frac{dZ(t)}{Z(t)} + (Y(t) - \lambda Y(t))\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} \end{aligned}$$

となり、その収益率のプロセスは

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = \lambda \frac{dZ(t)}{Z(t)} + (1 - \lambda) \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} \quad (5)$$

となる。これを時点 t における 1 期間で近似すると、

$$\begin{aligned} r_Y &= \lambda \{\mu_Z \Delta_t + \sigma_Z \Delta_w\} + (1 - \lambda) r_P \Delta_t \\ &= \{(1 - \lambda) r_P + \lambda \mu_Z\} \Delta_t + \lambda \sigma_Z \Delta_w \end{aligned}$$

となる。さらに、これ以後の各期の金利およびパラメータが一定で変化しないとすると、危険資産は Black-Scholes Model となり、CPPI で管理されたポートフォリオは Perold [4] のクッション関数

$$\frac{Y(t)}{Y(t_0)} = g(t) \left(\frac{Z(t)}{Z(t_0)} \right)^\lambda$$

ただし、 $g(t)$ は確定的関数で

$$g(t) = \exp\left\{(1 - \lambda)\left(r_P + \frac{\lambda \sigma_Z^2}{2}\right)t\right\}$$

である。危険資産の $\log Z(t)$ は平均 $\log Z(t_0) + (\mu_Z - \frac{\sigma_Z^2}{2})t$ 分散 $\sigma_Z^2 t$ の正規分布に従うから、

$$\log Y(t) = \log Y(t_0) + \log g(t) + \lambda(\log Z(t) - \log Z(t_0))$$

から、クッションは

$$\log Y(t) \sim N\left(\log Y(t_0) + \log g(t) + \lambda\left(\mu_Z - \frac{\sigma_Z^2}{2}\right)t, \lambda^2 \sigma_Z^2 t\right)$$

の正規分布である。

乗数パラメータ λ を 1 以上に設定すると、クッション関数の第 1 項は $0 \leq g(t) \leq 1$ であり、平均を減少させ、分散を拡大することになる。一方、 λ を 1 未満にとると、ポートフォリオの分散を減少させ平均を大きくする。したがって、 λ によってポートフォリオの収益分布をコントロールすることになる。

この CPPI の特徴は明らかなように危険資産の分布に依存しない。ポートフォリオインシュランス可能である。しかし、ポートフォリオインシュランスのリバランスを離散時点で行うと、ポートフォリオの価値が保証レベル以下になる可能性がある。この欠点を克服するのが次の Drawdown 戦略である。

3 ポートフォリオインシュランスの Drawdown 戦略

変動する外国投資資産のプロセス $Z(t)$ が対数正規に従うと仮定し、ポートフォリオ $W(t)$ を管理すると、管理する関数 $f(t, Z(t), W(t))$ によって、

$$dW(t) = \mu f(t, Z(t), W(t))dt + \sigma f(t, Z(t), W(t))dw(t)$$

表せる。これは、Smirnov [7] に示された。

CPPI では、このコントロール関数は

$$f(t, Z, W) = \begin{cases} \lambda(W - H) & \text{if } W > H \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

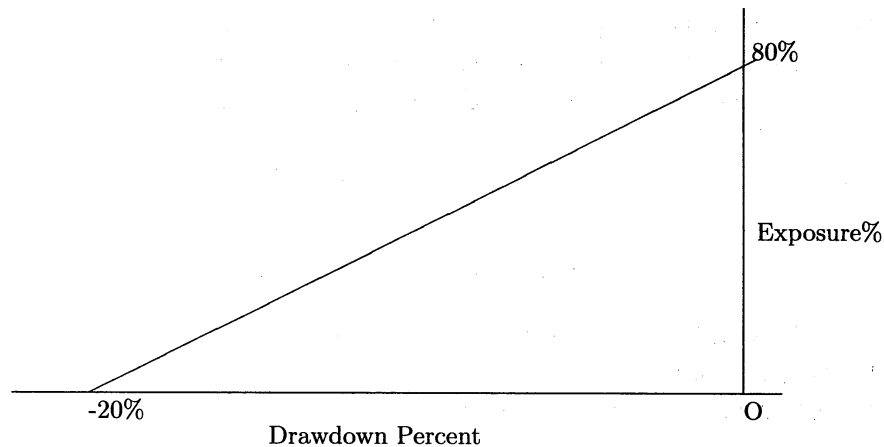


図 1: DrawDown ポートフォリオインシュランス $d = 20\%$, $\lambda = 4$

である。

また、オプションのダイナミックヘッジングでは、前述の式 (3) のとおり

$$f(t, Z, W) = N(d)Z$$

ただし、 $N(d)$ はコールオプションのデルタである。

3.1 Drawdown ポートフォリオインシュランス (DDCPI)

時刻 t までのポートフォリオの最大値を $M(t)$ とする。

$$M(t) = \text{Max}(W(s), s < t)$$

ポートフォリオの絶対 Drawdown $ADD(t)$ は、過去の最大値からの下げ幅とし、

$$ADD(t) = W(t) - M(t)$$

で定義する。さらに、Drawdown の%比率を $PDD(t)$ とし、

$$PDD(t) = ADD(t)/M(t)$$

とする。Drawdown の許容可能比率の限界パーセントを d とし、 λ を外国資産のクッションに対する乗数とする。このとき、フロアーを

$$H(t) = (1 - d)M(t)$$

Drawdown ポートフォリオインシュランスのコントロール関数を

$$f(t, Z, W) = \begin{cases} \lambda(W(t) - H(t)) & \text{if } W(t) > H(t) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると、危険資産の保有比率 (Exposure) は図-1 の通りに、過去の最大値を $d\%$ (図-1 では 20%) まで割り込むまで危険資産投資比率を下げていく。 λ を 4 とすると、フロアが過去の最大値に等しいとき最大の危険資産投資比率である 80% を保有する戦略である。

ポートフォリオの価値は、フロアより常に大でなければならないから

$$H(t) = (1 - d)M(t) \leq W(t)$$

から

$$PDD(t) = \frac{W(t) - M(t)}{M(t)} \geq -d$$

したがって、過去の最大値以下になる限界 d の決定が保証されたなら、CPPI のような保証ができない底割れ状態にならない。

このときの危険資産への比率 $f(t)/M(t)$ は、

$$\begin{aligned} f(t)/M(t) &= (1 - d) + \lambda \times PDD(t) \\ \lambda &= \frac{1 - d}{d} \end{aligned}$$

となる。したがって安全資産の保有額は

$$B(t) = W(t)(1 - f(t)/M(t))$$

となる。

3.2 Drawdown パラメータ d の選択

Drawdown 戦略の有効性を決定するパラメータ d を次のケースについて考えてみる。

1. 最大 Drawdown (MaxDD)
2. 平均 Drawdown (AvDD)

固定のケースでは、最大 Drawdown(MaxDD) は、期間 $[0, T]$ で $PDD(t)$ の最大値とする。

$$MaxDD(t) = \max_{0 \leq t \leq T} [PDD(t)]$$

平均 Drawdown(AvDD) は、期間 $[0, T]$ の Drawdown 関数の平均値とする。

$$AvDD(t) = \frac{1}{T} \int_0^T PDD(t) dt$$

3.3 シミュレーション

CPPI と DDCPI(MaxDD および AvDD) の比較を円/ドルの為替レートの 1991 年 1 月 2 日から 2000 年 12 月 29 日の 10 年間の日次データ (2538 個) を用いて、シミュレーションしてみた。

d 初期設定として、時点 $t=2$ を 1993 年 1 月 4 日、このときまでの最大 PDD を $d(2)$ として、固定する。この時点から、2000 年 12 月 29 日までをシミュレーションする。ただし、初期のポートフォリオの価値を 100 とした。

また、CPPI では期末のフロア $H(T)=100$ 、安全資産利子率 $r=0.01$, $\lambda=10$ とした。

DDCPI では最大 Drawdown の $\text{MaxDD}(t)$ に次の設定をした。まず、時点 $t=2$ より以前のデータ (2 年間) を用いて、 $d(2)$ を求める。よって図 2 とおりに、 $d(2)=15.91\%$ となる。つぎに、 MaxDD ケースとは時点 $t=2$ 以降、 $d(2)$ を上回る $d(t)$ が存在する場合には、

$$d(t) = \max_{2 \leq s \leq t} \{d(2), d(s)\}$$

とする。

平均 PDD つまり、 AvDD による d の設定は、時点 $t=2$ から時点 $t=T$ までの平均を $d(t)$ と設定する。ただし、初期の平均値はそれまでの平均値を用いた。

以上の初期設定を前提とし、シミュレーションを行った。CPPI と DDCPI の MaxDD および AvDD のそれぞれについてである。なおポートフォリオの価値 $W(t)$ とパフォーマンス評価する際、ベンチマークとしてドル 100% のポートフォリオを利用する。

CPPI, MaxDD , AvDD のシミュレーションにおいて、図 3 でそれぞれのポートフォリオの価値 $W(t)$ をしめした。円安進行時には AvDD が最も良く高収益をあげている。

また図 4 で危険資産への投資比率 f/M を比較した。CPPI は、円高が進行した時点で安全資産に投資が移ってしまいさらに、円高でフロアー割れになっている。

DDCPI の MaxDD と AvDD の戦略間の Drawdown に対する反応パラメータ、いわゆるレバレッジ率 λ を図 5 で比較した。 AvDD はつねに、 MaxDD よりも高いレバレッジ率を維持しているので全体として高い収益率をあげられた。

この近年 10 年間の期間だけであるが、以上のシミュレーションをまとめると、

- CPPI は高い危険比率定数 $\lambda = 10$ を用いているので、ドルの急落によって、フロアー割れを起こした。よって危険資産への投資額が 0 になった。最終的なパフォーマンスは一番よい結果であったが、安全資産のみに意味のある投資戦略とはいえない。
- Drawdown の平均 DD の AvDD 方式は相場の変動に伴い危険資産への投資額を効果的に減少しているために、ポートフォリオの価値は最も高いパフォーマンスが挙げられた。
- MaxDD は、危険資産への投資額の上限と下限の幅が最も小さくなっていることが分かる。この方法は、長期的な運用をすると効果がでると考えられる。

参考文献

- [1] Black, F. and Jones, R. "Simplifying Portfolio Insurance", The Journal of Portfolio Management, 1987 Fall, pp48-51.
- [2] Brennan, M.J. and R. Solanki "Optimal Portfolio Insurance", Journal of Financial and Quantitative Analysis 16 (Sep. 1981), pp 279-300
- [3] Grossman, S. and Zhou, Z. "Optimal Investment Strategies for Controlling Drawdowns", Math Finance 3, (3), 1993, pp241-276
- [4] Perold, A. F. "Constant Proportion Portfolio Insurance", Harvard Business School, (Aug. 1986)
- [5] Johnson, N. L. Kotz, S. "Continuous Univariate Distribution" John Wiley & Sons, 1994

- [6] Web ページを公開している会社の 1 例 <http://www.rtml.co.uk/background.html>
- [7] Smirnov, M. "Nonlinear Portfolio Insurance and Changes in Distributions of Portfolio Returns and Drawdowns. Jafee International conference,(Dec. 2000)

図表

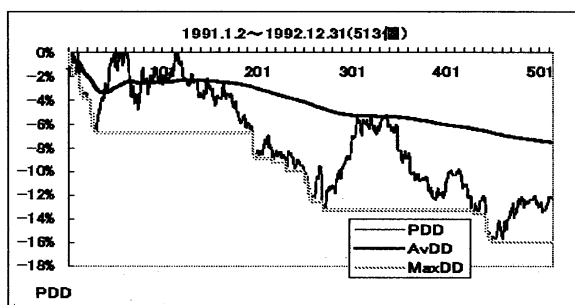
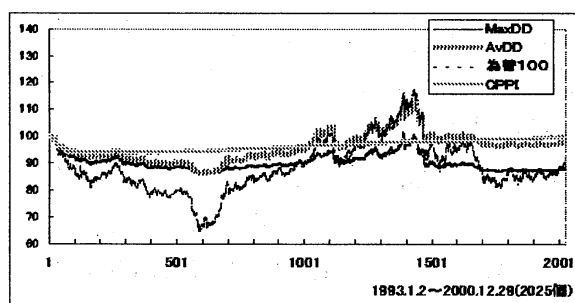
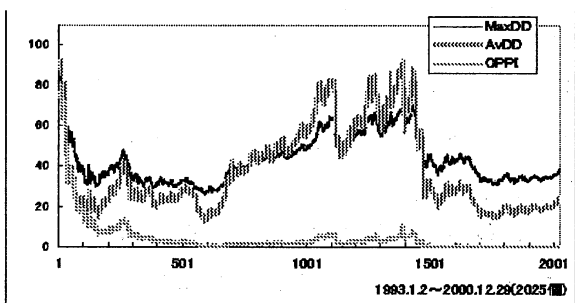
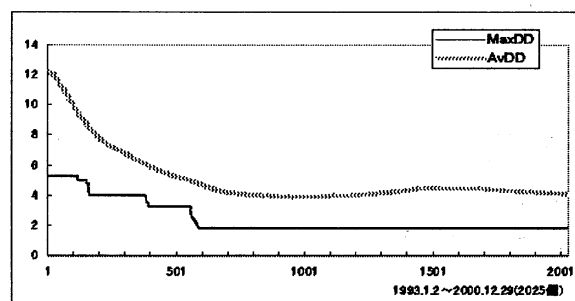
図 2 :MaxDD の $d(2)$ の決定図 3 :ポートフォリオの価値 $W(t)$ 

図 4 :危険資産への投資率

図 5 :MaxDD と AvDD の λ