

不均一系における非線形波動
～ 底の深さが不均一な 3 次元浅水波～

東大理 物理 飯塚剛 (Takeshi Iizuka)

底の深さがゆっくりと変化する水槽上を伝わる、2 次元浅水重力波に対しては従来から多くの研究がある。(例えば Madsen and Mei 1969) 3 次元に関しては、幅のある運河 (David et al. 1989) を除いて、弱非線形波動に関する限りこれまでの研究はないと思われる。そこでここでは、無限領域に対して、3 次元浅水重力波に対するモデル方程式の提出と、簡単な場合の厳密解を調べる。

Surface elevation; $z = \eta(x, y, t)$ ($z \equiv 0$ ～ 静水面)

Rigid bottom; $z = -H(x, y, t)$

とすると系の基礎方程式は次のように与えられる。

1) 非圧縮、渦無し条件。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(x, y, z, t) = 0$$

$$(-H \leq z \leq \eta)$$

2) ベルヌーイの定理 (力学条件)。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \right\} + g\eta = \frac{T}{\rho R}$$

$$(z = \eta(x, y, t))$$

3) 水面における運動条件。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$(z = \eta(x, y, t))$$

4) 固い底の存在、流体は inviscid。

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

$$(z = -H(x, y, t))$$

但し

$$\frac{1}{R} = (\text{平均曲率}) = [\{1 + (\eta_x)^2\}\eta_{yy} + \{1 + (\eta_y)^2\}\eta_{xx} - 2\eta_x\eta_y\eta_{xy}] \times \{1 + (\eta_x)^2 + (\eta_y)^2\}^{-\frac{3}{2}}$$

弱非線形近似

次の8つのスケール長；

$\Delta\eta \sim$ (特徴的な水面波振幅)

$\Delta_x H \sim$ (x 方向の特徴的深変化)

$\Delta_y H \sim$ (y 方向の特徴的深変化)

$l \sim$ (特徴的深) $\sim O(1)$

$l_x \sim$ (深変化の x 方向の特徴的波長)

$l_y \sim$ (深変化の y 方向の特徴的波長)

$L_x \sim$ (水面波の x 方向の特徴的波長)

$L_y \sim$ (水面波の y 方向の特徴的波長)

に対し

$$\Delta_y H \sim \Delta\eta \ll l \ll L_x \ll L_y \sim l_y \ll l_x$$

と仮定する。 $\Delta_x H$ については、

$$\Delta_x H \sim l \sim O(1) \quad (\text{有限不均一})$$

$$\Delta_x H \sim \Delta\eta \ll l \quad (\text{弱不均一})$$

の両方の場合が取り込められるようにする。また l_y について $L_y \ll l_y \sim l_x$; (等スケールの不均一) なる場合も後に考える。

逓減摂動

以上の仮定に基づいて独立変数変換

$$\xi = \varepsilon \sqrt{\frac{g}{l}} \left(\int^x F(\varepsilon^3 l^{-1} x') dx' - t \right),$$

$$\zeta = \varepsilon^2 l^{-1} y,$$

$$\tilde{\tau} = \varepsilon^3 l^{-1} x,$$

$$\tilde{z} = l^{-1} z,$$

(但し $F(\varepsilon^3 l^{-1} x) = F(\tilde{\tau})$ は、後で決める)

及び従属変数の摂動展開

$$\begin{aligned}\eta(x, y, t) &= l \left(\varepsilon^2 \eta^{(2)}(\xi, \zeta, \tilde{\tau}) + \varepsilon^4 \eta^{(4)}(\xi, \zeta, \tilde{\tau}) + \cdots \right), \\ \Phi(x, y, z, t) &= \sqrt{gl^3} \left(\varepsilon \Phi^{(1)}(\xi, \zeta, \tilde{z}, \tilde{\tau}) + \varepsilon^3 \Phi^{(3)}(\xi, \zeta, \tilde{z}, \tilde{\tau}) + \cdots \right), \\ H(x, y) &= l \left(H^{(0)}(\tau) + \varepsilon^2 H^{(2)}(\tau, \zeta) \right).\end{aligned}$$

を導入する。不均一の「有限成分」 $H^{(0)}$ は $x(\tau)$ にしか依存しないことに注意。これらを基礎方程式に代入して、 ε の各オーダーを比較

$O(\varepsilon^3)$ で

$$F(\tilde{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{glH^{(0)}(\tilde{\tau})}} \equiv \frac{1}{\sqrt{gl}} f(\tilde{\tau})$$

$O(\varepsilon^5)$ で $\eta^{(1)}$ の Closed Equation;

$$\begin{aligned}\left\{ \eta_{\tilde{\tau}}^{(1)} + \left(\frac{1}{6f} - \kappa f^3 \right) \eta_{\xi\xi\xi}^{(1)} + \frac{3f^3}{2} \eta_{\xi}^{(1)} \eta^{(1)} \right. \\ \left. - \frac{f_{\tilde{\tau}}}{2f} \eta^{(1)} + \frac{f^3}{2} H^{(2)} \eta_{\xi}^{(1)} \right\}_{\xi} + \frac{1}{2f} \eta_{\zeta\zeta}^{(1)} = 0\end{aligned}\quad (1)$$

但し $\kappa = T/(\rho gl^2)$ 。ここで新たに変数変換、

$$\begin{aligned}\tau &= \int^{\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} \left(\frac{1}{6f(\tilde{\tau})} - \kappa f^3(\tilde{\tau}) \right), \\ U(\xi, \zeta, \tau) &= \left(\frac{1}{6f} - \kappa f^3 \right)^{-1} \frac{f^3}{4} u^{(1)},\end{aligned}$$

を導入すると (1) は次の 不均一 K P 方程式 となる。

$$\left(U_{\tau} + U_{\xi\xi\xi} + 6U_{\xi}U + A(\tau)U + B(\tau, \zeta)U_{\xi} \right)_{\xi} + C(\tau)U_{\zeta\zeta} = 0, \quad (2)$$

但し $A(\tau)$, $B(\tau, \zeta)$ and $C(\tau)$ は

$$\begin{aligned} A(\tau) &= -\frac{9}{2} \frac{f_\tau}{f} \\ B(\tau, \zeta) &= 3f(\tau)^4 H^{(2)}(\tau, \zeta) \\ C(\tau) &= \frac{1}{2f} \left(\frac{1}{6f} - \kappa f^3 \right)^{-1} \end{aligned}$$

by T.Iizuka and M.Wadati (1992).

Reductions

ここで不均一 K P 方程式 (4) の簡略化を考える。

1) 1 次元化 $U_\zeta = 0$, 有限不均一 $H^{(2)} = 0$

$$U_\tau + U_{\xi\xi\xi} + 6U_\xi U - \frac{9}{2} \frac{f_\tau}{f} U = 0$$

by H.Ono(1972)

2) 1 次元化 $U_\zeta = 0$, 弱不均一 $f(\tau) = 1$

$$U_\tau + U_{\xi\xi\xi} + 6U_\xi U + B(\tau)U_\xi = 0$$

by M.Wadati(1990), H.Ono(1991)

3) 弱不均一化 $f(\tau) = 1$

$$(U_\tau + U_{\xi\xi\xi} + 6U_\xi U + B(\tau, \zeta)U_\xi)_\xi + \frac{3}{(1-6\kappa)} U_{\zeta\zeta} = 0$$

4) 一方向弱不均一化 $f(\tau) = 1$, $H^{(2)} = H^{(2)}(\tau)$

$$(U_\tau + U_{\xi\xi\xi} + 6U_\xi U + B(\tau)U_\xi)_\xi + \frac{3}{(1-6\kappa)} U_{\zeta\zeta} = 0$$

5) 均一化 $f(\tau) = 1$, $B = 0$

$$(U_\tau + U_{\xi\xi\xi} + 6U_\xi U)_\xi + \frac{3}{(1-6\kappa)} U_{\zeta\zeta} = 0$$

by B.B.Kadomtsev and V.I.Petviashvili(1970)

以後しばらく 4) の場合を考える。

一方向弱不均一化

$$\left(U_\tau + U_{\xi\xi\xi} + 6U_\xi U + 3H^{(2)}(\tau)U_\xi \right)_\xi + \frac{3}{(1-6\kappa)}U_{\zeta\zeta} = 0.$$

このモデル方程式に対して、さらに変数変換

$$\begin{aligned} X &= \xi - 3 \int^\tau H^{(2)}(\tau') d\tau', \\ Y &= \sqrt{\frac{1}{|1-6\kappa|}} \zeta \equiv \lambda \zeta, \\ T &= \tau. \end{aligned}$$

を導入すると次の KP 方程式を得る。

$$\begin{aligned} (U_T + U_{XXX} + 6UU_X)_X + 3\sigma U_{YY} &= 0. \\ \sigma &= \text{sgn}(1-6\kappa) = \text{sgn}\left(1 - \frac{6T}{\rho gl}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

今後 $\sigma = +1$, と仮定する。(KPII 方程式) (3) の安定解として、つぎの line soliton solution を考える。

$$\begin{aligned} U &= 2k_1^2 \text{sech}^2(k_1 X + k_2 Y - \omega T), \\ k_1 \omega - 4k_1^4 - 3k_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

変数 (ξ, ζ, τ) あるいは変数 (x, y, t) で表すと

$$\begin{aligned} U &= 2k_1^2 \text{sech}^2 \left\{ k_1 \left(\xi - 3 \int^\tau H^{(2)}(\tau') d\tau' \right) + k_2 \lambda \zeta - \omega \tau \right\}, \\ &= 2k_1^2 \text{sech}^2 \left\{ k_1 \varepsilon (l^{-1} x - \sqrt{\frac{g}{l}} t) \right. \\ &\quad \left. - 3k_1 \int^{\varepsilon^3 x/6l} H^{(2)}(\tau') d\tau' + k_2 \varepsilon^2 \lambda \frac{y}{l} - \frac{\omega \varepsilon^3}{6l} x \right\} \end{aligned}$$

この表式は、ソリトンの変形を示している。

注) 不均一の大きさが有限のとき $f(\tau) \neq \text{const.}$, 一次元のアナロジーから、ソリトンの変形だけでは済まされず、一般にソリトンの分裂, radiationの放射などが起こると考えられる。

ソリトンの変形の具体例

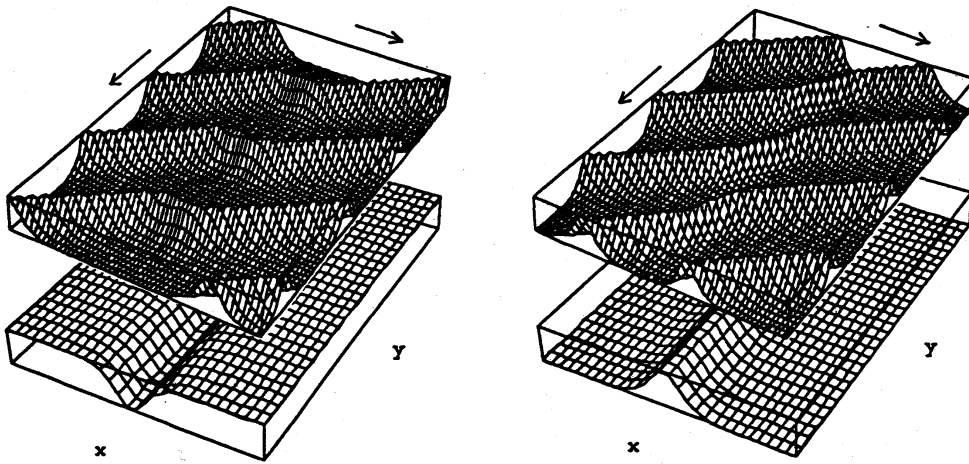
1) 線状の谷 ($a < 0$)、山 ($a > 0$)

$$H^{(2)}(\tau) = a \operatorname{sech}^2 \frac{\tau}{d}$$

変形されたソリトン ;

$$U = 2k_1^2 \operatorname{sech}^2 \Theta \Theta = (k_1 \varepsilon - \frac{\omega}{6} \varepsilon^3) \tilde{x} - 3k_1 a d \tanh \frac{\varepsilon^3 \tilde{x}}{6} \\ + k_2 \varepsilon^2 \lambda \tilde{y} - k_1 \varepsilon \tilde{t}$$

但し $\tilde{x} = l^{-1}x$, $\tilde{y} = l^{-1}y$ and $\tilde{t} = \sqrt{g/l}x$



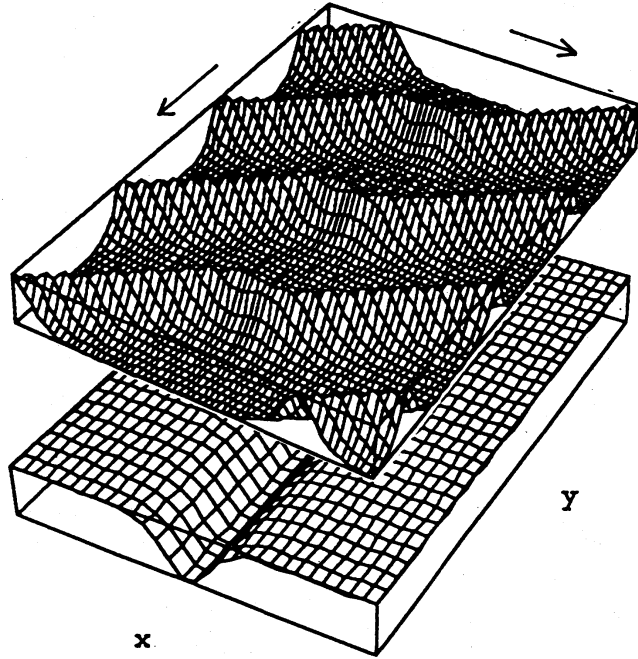
line soliton は谷によって、前方加速して変形し、山によって、前方減速して変形する。

2) 緩やかな段差

$$H^{(2)}(\tau) = a \tanh \frac{\tau}{d}$$

ソリトンの変形；

$$\Theta = (k_1 \varepsilon - \frac{\omega \varepsilon^3}{6}) \tilde{x} - 3k_1 a d \log\left(\frac{\cosh \varepsilon^3 \tilde{x}}{6d}\right) + k_2 \varepsilon^2 \lambda \tilde{y} - k_1 \varepsilon \tilde{t}.$$



当然、深い領域でソリトンの速度は速い。段差のあるところでソリトンは折れ曲がっている、これは屈折現象の非線形アナログと考えることができる。

等スケールの不均一

ここでは、今までの仮定を少々変える。

(深度変化の x 方向の特徴的波長) $\sim$ (深度変化の y 方向の特徴的波長)

これに応じて、 $H^{(2)}$ を次のように書く。

$$H^{(2)} = H^{(2)}(\tau, \varepsilon \zeta) = H^{(2)}(\varepsilon^3 l^{-1} x, \varepsilon^3 l^{-1} y)$$

以下同様に通減摂動法を適用して

$$\begin{aligned} & (U_\tau + U_{\xi\xi\xi} + 6U_\xi U + 3H^{(2)}(\tau, \varepsilon \zeta) U_\xi)_\xi \\ & + \frac{3}{(1-6\kappa)} U_{\zeta\zeta} = 0 \end{aligned}$$

を得る。さらに次の変数変換を導入すると、

$$\begin{aligned} X &= \xi - 3 \int^{\tau} H^{(2)}(\tau', \varepsilon \zeta) d\tau', \\ Y &= \lambda \left(\zeta + 18\varepsilon \int^{\tau} d\tau' \int^{\tau'} d\tau'' \frac{\partial H^{(2)}(\tau'', \varepsilon \zeta)}{\partial(\varepsilon \zeta)} \right), \\ T &= \tau, \end{aligned}$$

$O(\varepsilon^2)$ の誤差で KP 方程式を得る。

$$(U_T + U_{XXX} + 6U_X U)_X + 3\sigma U_{YY} + O(\varepsilon^2) = 0$$

1 ソリトン解の変形は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} U &= 2k_1^2 \operatorname{sech}^2(k_1 X + k_2 Y - \omega T) \\ &= 2k_1^2 \operatorname{sech}^2 \Theta \end{aligned}$$

ここで

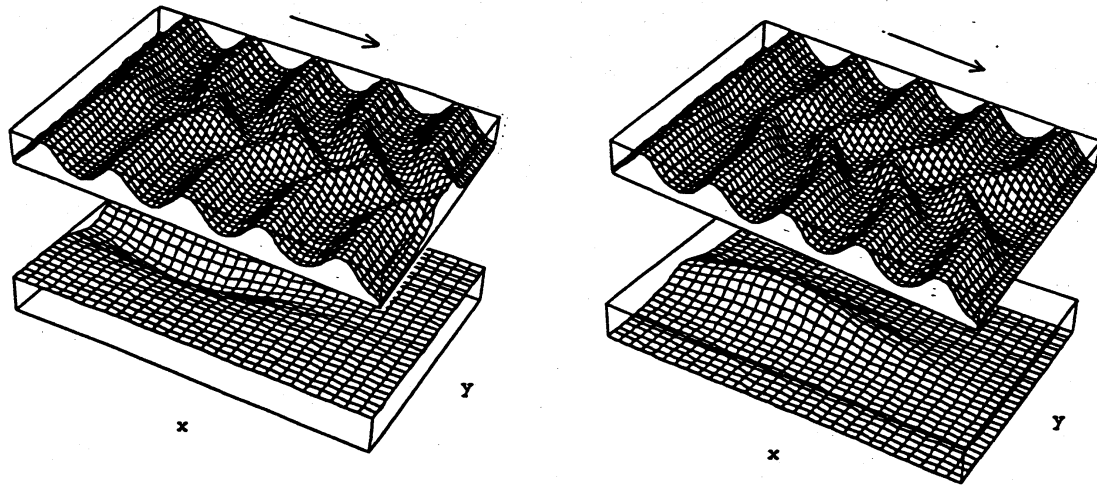
$$\begin{aligned} \Theta &= k_1 \left(\xi - 3 \int^{\tau} H^{(2)}(\tau', \varepsilon \zeta) d\tau' \right) \\ &\quad + k_2 \lambda \left(\zeta + 18\varepsilon \int^{\tau} d\tau' \int^{\tau'} d\tau'' \frac{\partial H^{(2)}(\tau'', \varepsilon \zeta)}{\partial(\varepsilon \zeta)} \right) + \omega \tau \\ &= (k_1 \varepsilon - \frac{\omega}{6} \varepsilon^3) \tilde{x} + k_2 \varepsilon^2 \lambda \tilde{y} - k_1 \varepsilon \tilde{t} \\ &\quad - 3k_1 \int^{\tau} H^{(2)}(\tau', \varepsilon \zeta) d\tau' \\ &\quad + 18k_2 \varepsilon \lambda \int^{\tau} d\tau' \int^{\tau'} d\tau'' \frac{\partial H^{(2)}(\tau'', \varepsilon \zeta)}{\partial(\varepsilon \zeta)} \end{aligned}$$

3) 局在した山 ($a < 0$)、くぼみ ($a > 0$)

$$H^{(2)}(\tau, \varepsilon \zeta) = a \operatorname{sech}^2 \frac{\tau}{d_1} \operatorname{sech}^2 \frac{\varepsilon \zeta}{d_2}$$

$\omega = 0$ とすると位相は次のようになる；

$$\begin{aligned} \Theta &= (k_1 \varepsilon - \frac{\omega}{6} \varepsilon^3) \tilde{x} \\ &\quad - 3k_1 a d_1 \left(\tanh \frac{\varepsilon^3 \tilde{x}}{6d_1} + 1 \right) \operatorname{sech}^2 \frac{\varepsilon^3 \tilde{y}}{d_2} - k_1 \varepsilon \tilde{t} \end{aligned}$$



要約と議論

- 1) 底の深さが不均一な系の3次元浅水波モデル方程式として、つぎの不均一-KP方程式を提出した。

$$\left(U_\tau + U_{\xi\xi\xi} + 6U_\xi U + A(\tau)U + B(\tau, \varepsilon^i \zeta)U_\xi \right)_\xi + C(\tau)U_{\zeta\zeta} = 0, \\ (i = 0, 1)$$

- 2) この方程式は、Surface elavation だけの式なので、数値シミュレーションに適している。

- 3) 「一方向弱不均一」、及び「等スケールの弱不均一」の場合は、それぞれ

$$\left(U_\tau + U_{\xi\xi\xi} + 6U_\xi U + 3H^{(2)}(\tau)U_\xi \right)_\xi + \frac{3}{(1-6\kappa)}U_{\zeta\zeta} = 0.$$

$$(U_\tau + U_{\xi\xi\xi} + 6U_\xi U + 3H^{(2)}(\tau, \varepsilon\zeta)U_\xi)_\xi + \frac{3}{(1-6\kappa)}U_{\zeta\zeta} = 0$$

となって、これらはさらに通常の K P 方程式に変換できた。従って、ソリトンの変形の厳密な表式を得る事ができた。

4) 例として、線状の谷と山、緩やかな段差、局在した山とくぼみなどによる line soliton の変形を示した。

References

N.Asano and H.Ono, Nonlinear Dispersive or Dissipative Waves in Inhomogeneous Media, J.Phy.Soc.Jpn.**31**,1830-1836(1971).

D.David, D.Levi and P.Winternitz, Soliton in Shallow Seas of Variable Depth and Marine Straits, Stud.Appl.Math. **80**,1-23(1989).

T.Iizuka and M.Wadati, Shallow Water Waves Over an Uneven Bottom and an Inhomogeneous KP Equations,Chaos, Solitons and & Fractals Vol.2 No.6,575(1992).

R.S.Johonson, On the developement of a solitary wave moving over an uneven bottom, Proc.Camb.Phil.Soc.**73**,183-203(1973).

B.B.Kadomtsev and V.I.Petviashvili, On the stability of solitary wave in weakly dispersing media, Sov.Phys.-Doklady**15**,539-541(1970).

T.Kakutani, Effect of an Uneven Bottom on Gravity Wave, J.Phys.Soc.Jpn.**3** 276(1971).

O.S.Madsen and C.C.Mei, The transformation of solitary wave over an uneven bottom, J.Fluid.Mech.**39**,781-791(1969).

H.Ono, Nonlinear Wave Propagation under Weak Inhomogeneity, J.Phys.Soc **3692-3697**(1991).

M.Wadati, Deformation of Soliton in Random Media, J.Phys.Soc.Jpn.**59**,420 4203(1990).