

量子 Bruhat グラフを用いた レベル・ゼロ LS パスの表示

佐垣 大輔 (Daisuke SAGAKI)

筑波大学 数理物質系 数学域

Institute of Mathematics,
University of Tsukuba

sagaki@math.tsukuba.ac.jp

1 概要と記号.

本小論説は, 共同研究 [LNS³1], [LNS³2] で得られた結果の一部をまとめたものである. 主な内容は, 量子 Bruhat グラフを用いたレベル・ゼロ LS パス (を cl で射影したもの) の表示, および, それを用いた次数関数 (= エネルギー関数) の記述である.

1.1 記号. 本小論説で使用する記号は以下の通り (詳しくは [Kac] を参照):

$\mathfrak{g}$: ($\mathbb{C}$ 上の) 有限次元単純リー代数, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: Cartan 部分代数,

Δ : $\mathfrak{g}$ のルート系, $\Delta^+ \subset \Delta$: 正ルート全体,

$\{h_j\}_{j \in I}$: $\mathfrak{g}$ の単純余ルート, $\{\alpha_j\}_{j \in I}$: $\mathfrak{g}$ の単純ルート,

$Q_+ := \sum_{j \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_j$, $Q^\vee := \bigoplus_{j \in I} \mathbb{Z} h_j$,

P : $\mathfrak{g}$ の整ウェイト格子, $P_+ \subset P$: 優整ウェイト全体,

$\{\varpi_i\}_{i \in I}$: $\mathfrak{g}$ の基本ウェイト,

$W := \langle r_j \mid j \in I \rangle$: $\mathfrak{g}$ の Weyl 群 (但し, r_j : α_j に関する単純鏡映).

$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$: (untwisted) アフィン・リー代数, 但し,

c : $\widehat{\mathfrak{g}}$ の中心の元, d : 次数作用素,

$\widehat{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$: $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Cartan 部分代数.

※ 以下では $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を, $\lambda(c) = \lambda(d) = 0$ と定めることで, $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ とみなす.

$\widehat{I} := I \sqcup \{0\}$, $\{h_j\}_{j \in \widehat{I}}$: $\widehat{\mathfrak{g}}$ の単純余ルート, $\{\alpha_j\}_{j \in \widehat{I}}$: $\widehat{\mathfrak{g}}$ の単純ルート,

Δ_{re}^+ : $\widehat{\mathfrak{g}}$ の正実ルート全体の集合, δ : $\widehat{\mathfrak{g}}$ の null root,

$\widehat{P} : \widehat{\mathfrak{g}}$ の整ウェイト格子 ($P \hookrightarrow \widehat{P}$ に注意),

$\widehat{W} := \langle r_j \mid j \in \widehat{I} \rangle : \widehat{\mathfrak{g}}$ の Weyl 群.

$U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) : \text{量子アフィン代数}, \quad U'_q(\widehat{\mathfrak{g}}) : \text{次数作用素 } q^d \text{ なしの量子アフィン代数}.$

2 復習.

2.1 Lakshmibai-Seshadri (LS) パス. まず, Littelmann [L] によって導入された LS パスについて復習しよう. このサブセクションでは $\lambda \in \widehat{P}$ とする.

定義 2.1.1. $\mu, \nu \in \widehat{W}\lambda$ とする. 以下をみたす $\widehat{W}\lambda$ の元の列 $\mu = \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k = \nu$ と正実ルートの列 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in \Delta_{\text{re}}^+$ が存在するとき, $\mu > \nu$ と定める: 各 $l = 1, 2, \dots, k$ に対して, $\mu_l = r_{\xi_l}(\mu_{l-1})$ かつ $\langle \mu_{l-1}, \xi_l^\vee \rangle < 0$ が成立する. ここで, $\xi \in \Delta_{\text{re}}^+$ に対して, $r_\xi \in \widehat{W}$ は ξ に関する鏡映を表し, $\xi^\vee$ は ξ の余ルートを表す. $\mu > \nu$ であるとき, $\text{dist}(\mu, \nu)$ で上の条件をみたす列のうち最長のものの長さ k を表すことにする.

定義 2.1.2. $0 < \sigma < 1$ を有理数とし, $\mu, \nu \in \widehat{W}\lambda, \mu > \nu$ とする. (μ, ν) に対する σ -chain とは, 以下を満たす $\widehat{W}\lambda$ の元の列 $\mu = \mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_k = \nu$ のことである: 各 $l = 1, 2, \dots, k$ に対して, $\text{dist}(\mu_{l-1}, \mu_l) = 1$, かつ, $\sigma \langle \mu_{l-1}, \xi_l^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ が成立する. ここで, ξ_l は $\mu_l = r_{\xi_l}(\mu_{l-1})$ を満たす唯一つの正実ルートである ($\mu_{l-1} > \mu_l$ および $\text{dist}(\mu_{l-1}, \mu_l) = 1$ に注意).

定義 2.1.3. $\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma})$ を $\widehat{W}\lambda$ の元の列 $\underline{\nu} : \nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_s$ と有理数の列 $\underline{\sigma} : 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_s = 1$ の組とする. 各 $u = 1, 2, \dots, s-1$ について, (ν_u, ν_{u+1}) に対する σ_u -chain が存在するとき, π を **型 λ の LS パス** と呼ぶ. $\mathbb{B}(\lambda)$ で型 λ の LS パス全体の集合を表す.

以下では $\pi = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s; \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \mathbb{B}(\lambda)$ を次の区分的に線形で連続な写像 $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{P}$ と同一視する:

$$\pi(t) = \sum_{q=1}^{p-1} (\sigma_q - \sigma_{q-1}) \nu_q + (t - \sigma_{p-1}) \nu_p \quad \text{for } \sigma_{p-1} \leq t \leq \sigma_p, \quad 1 \leq p \leq s.$$

さて, $[L]$ に基づいて, $\mathbb{B}(\lambda)$ に $(\widehat{P}$ をウェイト格子とする) クリスタルの構造を定めよう. まず, $[L, \text{Lemma 4.5 a)]}$ より, 各 $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して $\pi(1) \in \widehat{P}$ となることが分かる. そこで,

$$\text{wt}(\pi) := \pi(1) \in \widehat{P} \quad \text{for } \pi \in \mathbb{B}(\lambda)$$

と定める. $\mathbb{B}(\lambda)$ 上の Kashiwara 作用素はルート作用素によって与えられる: $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in \widehat{I}$ に対して,

$$H_j^\pi(t) := \langle \pi(t), h_j \rangle \quad \text{for } t \in [0, 1],$$

$$m_j^\pi := \min\{H_j^\pi(t) \mid t \in [0, 1]\},$$

とおく.

注意 2.1.4 ($[L, \text{Lemma 4.5 d)]}$). 関数 $H_j^\pi(t)$ の極小値はすべて整数である. したがって特に, m_j^π は 0 以下の整数であり, $H_j^\pi(1) - m_j^\pi$ は 0 以上の整数である.

この注意を踏まえて, ルート作用素 e_j , $j \in \widehat{I}$, を定義しよう. まず, $m_j^\pi = 0$ のときは, $e_j\pi := \mathbf{0}$ と定める. ここで, $\mathbf{0}$ は $\mathbb{B}(\lambda)$ に含まれない元である. $m_j^\pi \leq -1$ の場合は,

$$(e_j\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_0, \\ \pi(t_0) + r_j(\pi(t) - \pi(t_0)) & \text{if } t_0 \leq t \leq t_1, \\ \pi(t) + \alpha_j & \text{if } t_1 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

と定める. 但し,

$$t_1 := \min\{t \in [0, 1] \mid H_j^\pi(t) = m_j^\pi\},$$

$$t_0 := \max\{t \in [0, t_1] \mid H_j^\pi(t) = m_j^\pi + 1\}$$

である (注意 2.1.4 より, $H_j^\pi(t)$ は $[t_0, t_1]$ で狭義単調減少していることが分かる).

次に, ルート作用素 f_j , $j \in I$, だが, $H_j^\pi(1) - m_j^\pi = 1$ の場合は, $f_j\pi := \mathbf{0}$ と定め, $H_j^\pi(1) - m_j^\pi \geq 1$ の場合は,

$$(f_j\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_0, \\ \pi(t_0) + r_j(\pi(t) - \pi(t_0)) & \text{if } t_0 \leq t \leq t_1, \\ \pi(t) - \alpha_j & \text{if } t_1 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

と定める. 但し,

$$t_0 := \max\{t \in [0, 1] \mid H_j^\pi(t) = m_j^\pi\},$$

$$t_1 := \min\{t \in [t_0, 1] \mid H_j^\pi(t) = m_j^\pi + 1\}$$

である (注意 2.1.4 より, $H_j^\pi(t)$ は $[t_0, t_1]$ で狭義単調増加していることが分かる).

定理 2.1.5 ([L, §2, §4]). 任意の $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in \hat{I}$ に対して $e_j\pi, f_j\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \cup \{0\}$ となる. さらに,

$$\begin{cases} \varepsilon_j(\pi) := \max\{n \geq 0 \mid e_j^n \pi \neq 0\} & \text{for } \pi \in \mathbb{B}(\lambda) \text{ and } j \in \hat{I}, \\ \varphi_j(\pi) := \max\{n \geq 0 \mid f_j^n \pi \neq 0\} & \text{for } \pi \in \mathbb{B}(\lambda) \text{ and } j \in \hat{I}, \end{cases}$$

と定めると, $(\mathbb{B}(\lambda), \text{wt}, e_j, f_j, \varepsilon_j, \varphi_j)$ は ($\hat{P}$ をウェイト格子とする) クリスタルになる.

$\mathbb{B}(\lambda)$ のクリスタル構造については [NS5] を参照されたい.

2.2 レベル・ゼロ LS パス. ここからは $\lambda \in P_+ \hookrightarrow \hat{P}$ とする; $\langle \lambda, c \rangle = 0$ なので λ は「レベル・ゼロ」である. また, 勝手な $\mu \in \widehat{W}\lambda$ に対して $\langle \mu, c \rangle = 0$ となるので, 勝手な $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して $\langle \pi(t), c \rangle = 0$ となる. よって, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ も「レベル・ゼロ」である.

$\text{cl} : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{P} \rightarrow (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{P})/\mathbb{R}\delta$ を標準射影とする. $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して $\text{cl}(\pi) : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{P})/\mathbb{R}\delta$ を $(\text{cl}(\pi))(t) := \text{cl}(\pi(t))$, $t \in [0, 1]$, で定め,

$$\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} := \{\text{cl}(\pi) \mid \pi \in \mathbb{B}(\lambda)\}.$$

とおく. このとき, 定理 2.1.5 で述べた $\mathbb{B}(\lambda)$ のクリスタル構造は, $\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ 上の ($\hat{P}_{\text{cl}} := \text{cl}(\hat{P})$ をウェイト格子とする) クリスタル構造を誘導する. すなわち, $\eta = \text{cl}(\pi) \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ ($\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$) であるとき,

$$\text{wt}(\eta) := \text{cl}(\text{wt}(\pi)) \in \hat{P}_{\text{cl}},$$

$$e_j\eta := \text{cl}(e_j\pi), \quad f_j\eta := \text{cl}(f_j\pi) \quad \text{for } j \in \hat{I},$$

$$\varepsilon_j(\eta) := \varepsilon_j(\pi), \quad \varphi_j(\eta) := \varphi_j(\pi) \quad \text{for } j \in \hat{I}$$

と定める (但し, $\text{cl}(0) := 0$ とする); ここで, $\langle \delta, h_j \rangle = 0$ ($\forall j \in \hat{I}$) や $r_j\delta = \delta$ ($\forall j \in \hat{I}$) に注意すれば, これらが $\eta = \text{cl}(\pi)$ を満たす $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ の取り方には依らず, well-defined であることが分かる.

定理 2.2.1 ([NS1], [NS2], [NS3]). (1) 各 $i \in I$ に対して, $\mathbb{B}(\varpi_i)_{\text{cl}}$ は, Kashiwara [Kas] によって導入された $U'_q(\mathfrak{g})$ のレベル・ゼロ基本表現 $W(\varpi_i)$ の結晶基底に (クリスタルとして) 同型である.

(2) $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ を I の元の列とし (同じものがあってもよい), $\lambda_{\mathbf{i}} := \varpi_{i_1} + \varpi_{i_2} + \dots + \varpi_{i_p}$ とおく. このとき, クリスタルの同型

$$\Psi_{\mathbf{i}} : \mathbb{B}(\lambda_{\mathbf{i}})_{\text{cl}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}(\varpi_{i_1})_{\text{cl}} \otimes \mathbb{B}(\varpi_{i_2})_{\text{cl}} \otimes \dots \otimes \mathbb{B}(\varpi_{i_p})_{\text{cl}}$$

が存在する.

注意 2.2.2. 各 $i \in I$ について, レベル・ゼロ基本表現 $W(\varpi_i)$ は有限次元既約 $U'_q(\mathfrak{g})$ -加群であり, その Drinfeld 多項式 $\{P_i(u)\}_{i \in I}$ は

$$P_i(u) = 1 - au \ (\exists a \in \mathbb{Q}(q)), \quad P_j(u) = 1 \ (j \in I, j \neq i)$$

という形をしている (例えば [N, Remark 3.3] を参照). この結果により, $W(\varpi_i)$ は ([HKOTY, §2.3] の記号の下で) Kirillov-Reshetikhin (KR) 加群 $W_1^{(i)}$ に対応していることが分かる. $W(\varpi_i) \cong W_1^{(i)}$ の結晶基底は, 定数倍を除いて一意的なので (例えば [NS4, Lemma 1.5.3] を参照), $W(\varpi_i)$ の結晶基底は, いわゆる (one-column) KR クリスタル $B^{i,1}$ である. したがって, 定理 2.2.1 より, $\mathbb{B}(\varpi_i)_{\text{cl}}$ は KR クリスタル $B^{i,1}$ と同型であり, $\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ ($\lambda \in P_+$) は $B^{i,1}$ 達 ($i \in I$) の幾つかのテンソル積に同型である.

2.3 $\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ 上の次数関数. 引き続き $\lambda \in P_+ \mapsto \hat{P}$ とする. このサブセクションでは, [NS6, §3.1] で導入した $\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ 上の **次数関数**

$$\text{Deg}_{\lambda} : \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\leq 0}$$

について復習する.

まず, 記号を幾つか準備する: $\mathbb{B}_0(\lambda)$ を $\pi_{\lambda} := (\lambda; 0, 1)$ を含む $\mathbb{B}(\lambda)$ の連結成分とする. また, $\pi = (\nu_1, \dots, \nu_s; \sigma_0, \dots, \sigma_s) \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して, $\iota(\pi) := \nu_1$ とおく; すなわち, 十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $\iota(\pi) = \pi(\epsilon)/\epsilon$ である.

さて, [NS6, Proposition 3.1.3] より, 各 $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ に対して, $\pi_{\eta} \in \mathbb{B}_0(\lambda)$ であって $\text{cl}(\pi_{\eta}) = \eta$ かつ $\iota(\pi_{\eta}) \in \lambda - Q_+$ を満たすものが唯一つ存在する. このとき,

$\text{wt}(\pi_\eta) = \pi_\eta(1)$ は次の形をしている ([NS6, Lemma 3.1.1]):

$$\pi_\eta(1) = \lambda - \beta + K\delta \quad (\exists \beta \in Q_+, \exists K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

ここで, η の次数 $\text{Deg}_\lambda(\eta) \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を

$$\text{Deg}_\lambda(\eta) := -K \in \mathbb{Z}_{\leq 0}.$$

で定める.

注意 2.3.1 ([NS6, Lemma 3.2.1] を参照). $\text{Deg}_\lambda : \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\leq 0}$ は, 以下を満たす唯一つの $\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ 上の関数である:

- (i) $\text{Deg}_\lambda(\eta_\lambda) = 0$. 但し, $\eta_\lambda := \text{cl}(\pi_\lambda)$;
- (ii) $e_j \eta \neq 0$ を満たす $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ と $j \in \hat{I}$ に対して,

$$\text{Deg}_\lambda(e_j \eta) = \begin{cases} \text{Deg}_\lambda(\eta) - 1 & \text{if } j = 0 \text{ and } \iota(e_0 \pi_\eta) = \iota(\pi_\eta), \\ \text{Deg}_\lambda(\eta) - \langle \iota(\pi_\eta), h_0 \rangle - 1 & \text{if } j = 0 \text{ and } \iota(e_0 \pi_\eta) = r_0(\iota(\pi_\eta)), \\ \text{Deg}_\lambda(\eta) & \text{if } j \neq 0. \end{cases}$$

$\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ を I の元の列とし (同じものがあってもよい), $\lambda_{\mathbf{i}} := \varpi_{i_1} + \varpi_{i_2} + \dots + \varpi_{i_p}$ とおく. このとき, 定理 2.2.1 (2) より, クリスタルの同型

$$\Psi_{\mathbf{i}} : \mathbb{B}(\lambda_{\mathbf{i}})_{\text{cl}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}(\varpi_{i_1})_{\text{cl}} \otimes \mathbb{B}(\varpi_{i_2})_{\text{cl}} \otimes \dots \otimes \mathbb{B}(\varpi_{i_p})_{\text{cl}} =: \mathbb{B}_{\mathbf{i}}$$

が存在する. $D_{\mathbf{i}} : \mathbb{B}_{\mathbf{i}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を $\mathbb{B}_{\mathbf{i}}$ 上のエネルギー関数とする (詳細は [HKOTY, §3], [HKOTT, §3.3] や [NS6, §4.1] を参照).

定理 2.3.2 ([NS6, Theorem 4.1.1]). 各 $\eta \in \mathbb{B}(\lambda_{\mathbf{i}})_{\text{cl}}$ に対して,

$$\text{Deg}_{\lambda_{\mathbf{i}}}(\eta) = D_{\mathbf{i}}(\Psi_{\mathbf{i}}(\eta)) - D_{\mathbf{i}}^{\text{ext}}$$

が成り立つ. ここで, $D_{\mathbf{i}}^{\text{ext}} \in \mathbb{Z}$ は (η に依らない) ある定数である.

3 量子 Bruhat グラフと量子 LS パス.

3.1 量子 Bruhat グラフ. $\lambda \in P_+$ とし, $J := \{i \in I \mid \langle \lambda, h_i \rangle = 0\}$ とおく. $W_J := \langle r_j \mid j \in J \rangle \subset W$ とすると, W_J を法とする W の各剰余類には長さが最小

の元が唯一つ存在することが知られている; この元をその剰余類の minimal coset representative とよぶ. $W^J (\cong W/W_J) \subset W$ を minimal coset representatives 全体の集合とし, $[\cdot] = [\cdot]_J : W \rightarrow W^J \cong W/W_J$ を標準射影とする. また,

$$\Delta_J := \Delta \cap \left(\bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}\alpha_j \right), \quad \Delta_J^\pm := \Delta^\pm \cap \Delta_J,$$

$$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha, \quad \rho_J := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_J^+} \alpha.$$

とおく.

定義 3.1.1 ([LNS³1, §4]). (放物型) 量子 Bruhat グラフ $\text{QB}(W^J)$ とは, 以下のように定義される, $\Delta^+ \setminus \Delta_J^+$ で色付けされた有向グラフである: まず, 頂点集合は W^J である. そして, $w \in W^J$ と $\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$ に対して, 以下の (i), (ii) のいずれかが成り立つとき $w \xrightarrow{\beta} [wr_\beta]$ と定める.

$$(i) \ell([wr_\beta]) = \ell(w) + 1;$$

$$(ii) \ell([wr_\beta]) = \ell(w) - 2\langle \rho - \rho_J, \beta^\vee \rangle + 1.$$

$\text{QB}(W^J)$ において, 勝手な頂点 $x \in W^J$ から勝手な頂点 $y \in W^J$ への向きのついた道が存在することが分かる ([LNS³1, Remark 6.13]). $x \in W^J$ から $y \in W^J$ への向きのついた道

$$\mathbf{p} : x = x_0 \xrightarrow{\beta_1} x_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_n} x_n = y$$

が与えられたとき, $\mathbf{p}$ のウェイト $\text{wt}(\mathbf{p}) \in Q^\vee$ を

$$\text{wt}(\mathbf{p}) := \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \text{ s.t.} \\ \ell(x_k) = \ell(x_{k-1}) - 2\langle \rho - \rho_J, \beta_k^\vee \rangle + 1}} \beta_k^\vee$$

で定める.

命題 3.1.2 ([LNS³1]¹). $x, y \in W^J$ とし, $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ を $\text{QB}(W^J)$ における x から y への向きのついた最短の道とする. このとき, $\text{wt}(\mathbf{p})$ と $\text{wt}(\mathbf{q})$ は $Q_J^\vee := \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}h_j$ を法として等しい.

¹この命題は (本稿執筆時点では) arXiv:1211.2042 には含まれていないが, 正式の論文には含まれる予定である.

$x, y \in W^J$ に対して,

$$\text{wt}_\lambda(x \Rightarrow y) := \langle \lambda, \text{wt}(\mathbf{p}) \rangle$$

で定める. ここで, $\mathbf{p}$ は x から y への最短の道である; 命題 3.1.2 および $J = \{i \in J \mid \langle \lambda, h_i \rangle = 0\}$ であることから, $\text{wt}_\lambda(x \Rightarrow y)$ は $\mathbf{p}$ の取り方にはよらないことが分かる.

3.2 量子 LS パス. 各有理数 $\sigma \in \mathbb{Q}$ に対して, $\text{QB}(W^J)$ の (充満) 部分グラフ $\text{QB}_{\sigma\lambda}(W^J)$ を次で定義する: 頂点集合は $\text{QB}(W^J)$ と同じで W^J である. そして, $\text{QB}(W^J)$ の矢印 $\xrightarrow{\beta}$ のうち, $\langle \sigma\lambda, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ を満たすもののみを残す (満たさないものをすべて取り除く).

定義 3.2.1. 型 $\lambda \in P_+$ の量子 LS パスとは, W^J の元の列 $\underline{x} : x_1, x_2, \dots, x_s$ と有理数の列 $\underline{\sigma} : 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_s = 1$ の組 $\eta = (\underline{x}; \underline{\sigma})$ で次の条件を満たすもののことである: 各 $1 \leq u \leq s-1$ について, $x_u \neq x_{u+1}$ であり, かつ, $\text{QB}_{\sigma_u\lambda}(W^J)$ において x_{u+1} から x_u への向きのついた道が存在する. $\text{QLS}(\lambda)$ で型 λ の QLS パス全体の集合を表す.

以下では $\eta = (x_1, x_2, \dots, x_s; \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \text{QLS}(\lambda)$ を次の区分的に線形で連続な写像 $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ と同一視する:

$$\eta(t) = \sum_{q=1}^{p-1} (\sigma_q - \sigma_{q-1}) x_q \lambda + (t - \sigma_{p-1}) x_p \lambda \quad \text{for } \sigma_{p-1} \leq t \leq \sigma_p, \quad 1 \leq p \leq s.$$

4 主結果.

4.1 レベル・ゼロ LS パスと量子 LS パスの関係. $\lambda \in P_+ \mapsto \hat{P}$ とする. まず, $\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ は, $[0, 1]$ から $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{P})/\mathbb{R}\delta$ への区分的に線形で連続な写像全体の集合 ($\mathbb{P}_{\text{cl}}$ とする) の部分集合であったことを思い出そう. 一方, $\text{cl} : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{P} \rightarrow (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{P})/\mathbb{R}\delta$ を $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P (\hookrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{P})$ に制限したものは単射なので, $\text{QLS}(\lambda)$ も $\mathbb{P}_{\text{cl}}$ の部分集合とみなせる.

定理 4.1.1 ([LNS³²]). $\lambda \in P_+ \mapsto \hat{P}$ とする. このとき, $\mathbb{P}_{\text{cl}}$ の部分集合として,

$$\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} = \text{QLS}(\lambda)$$

である.

4.2 次数関数に関する公式. $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}}$ とする. 定理 4.1.1 より, $\mathbb{B}(\lambda)_{\text{cl}} = \text{QLS}(\lambda)$ であるから, $\text{QLS}(\lambda)$ の定義に従って

$$\eta = (\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_s}_{W^J \text{ の元の列}}; \underbrace{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s}_{\text{有理数の列}}) \in \text{QLS}(\lambda)$$

と書くことができる. このとき,

定理 4.2.1.

$$\text{Deg}(\eta) = - \sum_{u=1}^{s-1} (1 - \sigma_k) \text{wt}_\lambda(x_{u+1} \Rightarrow x_u).$$

References

- [HKOTT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Z. Tsuboi, Paths, crystals and fermionic formulae, in “MathPhys Odyssey 2001, Integrable Models and Beyond” (M. Kashiwara and T. Miwa, Eds.), Prog. Math. Phys. Vol. 23, pp. 205–272, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada, Remarks on fermionic formula, in “Recent Developments in Quantum Affine Algebras and Related Topics” (N. Jing and K.C. Misra, Eds.), Contemp. Math. Vol. 248, pp. 243–291, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [Kac] V. G. Kac, “Infinite Dimensional Lie Algebras”, 3rd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- [Kas] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117–175.
- [LNS³1] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals I: Lifting the parabolic quantum Bruhat graph, preprint, arXiv:1211.2042.
- [LNS³2] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II, in preparation.
- [L] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* (2) **142** (1995), 499–525.
- [NS1] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra, *Int. Math. Res. Not.* **2003** (2003), no. 32, 1731–1754.
- [NS2] S. Naito and D. Sagaki, Crystal of Lakshmibai-Seshadri paths associated to an integral weight of level zero for an affine Lie algebra, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), no. 14, 815–840.

- [NS3] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra. II, *Adv. Math.* **200** (2006), 102–124.
- [NS4] S. Naito and D. Sagaki, Construction of perfect crystals conjecturally corresponding to Kirillov-Reshetikhin modules over twisted quantum affine algebras, *Commun. Math. Phys.* **263** (2006), 749–787.
- [NS5] S. Naito and D. Sagaki, Crystal structure on the set of Lakshmibai-Seshadri paths of an arbitrary level-zero shape, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **96** (2008), 582–622.
- [NS6] S. Naito and D. Sagaki, Lakshmibai-Seshadri paths of level-zero weight shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations, *Compos. Math.* **144** (2008), 1525–1556.
- [N] H. Nakajima, Extremal weight modules of quantum affine algebras, in “Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups” (T. Shoji et al., Eds.), Adv. Stud. Pure Math. Vol. 40, pp.343–369, Math. Soc. Japan, 2004.