

セル複体に付随するグラフの向き付けとその最適解

筑波大学大学院システム情報工学研究科 八森正泰 (Masahiro Hachimori)
Graduate School of Systems and Information Engineering,
University of Tsukuba

本稿では、セル複体に対して、それに付随するグラフの向き付けに関するある目的関数の最小化問題を考える。そして、特に立方的複体の場合にその最適解からその複体のトポロジック情報であるベッチ数についての不等式を導くことができること、および、関連する諸定理を紹介する。本稿は主に [6] の内容をベースにしており、そちらも参照されたい。

1 セル複体

本稿ではセル複体のクラスとして次のものを主に扱う。(注：本稿ではセルの数が有限個である有限セル複体のみを扱い、以降「有限」という形容詞がついていなくても有限であることを仮定する。)

CW 複体:

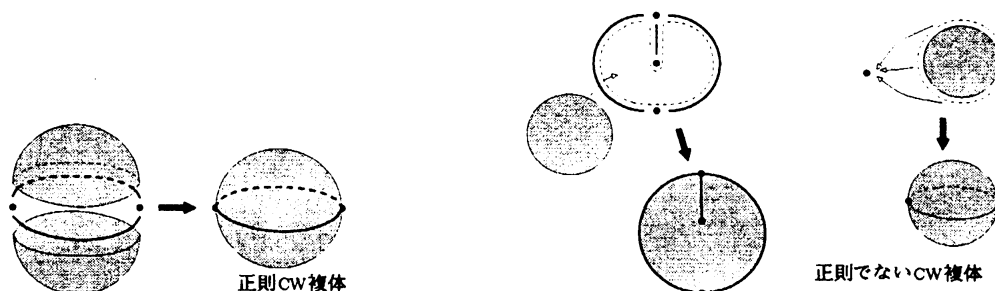
空間 $X = \bigcup_{n=0}^d X^n$ を次のように再帰的に定義する。

- (i) X^0 は有限個の点 (=0 次元セル) からなる離散空間、
- (ii) X^n は有限個の n 次元セル (n 次元球体) を X^{n-1} に貼り付けたもので、この貼り合わせを表す各 n 次元セルの特性写像 $\phi_i: B^n \rightarrow X^n$ は、 n 次元球体 B^n の内部への制限が同相写像、 B^n の境界への制限が X^{n-1} への連続写像である。 $(X^n$ には商位相を入れるものとする。)

(今は有限次元で考えているので関係ないが、無限次元を考える際には $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ には「 $X \subset A$ が開集合 $\Leftrightarrow$ 各 $X^i \cap A$ が開集合」という弱位相を入れる。) X^k に含まれる k 次元セルを k 次元面と呼ぶ。(有限)CW 複体 Γ は X に含まれる面全体の集合を指し、空間 X 自体のことは Γ の基礎集合と呼び、 $|\Gamma|$ と表記することとする。(空集合も Γ の面とみなし、その次元は -1 であるとする。)

正則 CW 複体:

CW 複体において、各セルにおける上記定義中の貼り合わせ写像 ϕ_i が境界まで含めた同相写像になっているとき、正則 CW 複体という。



面 τ が面 σ の境界に含まれるとき、 τ は σ の面であるという。これを半順序関係 $\tau \leq \sigma$ として与えられる半順序集合(ポセット)を Γ の面ポセット $P(\Gamma)$ という。面ポセットはセル複体 Γ の組合せ的構造を表すものである。正則 CW 複体は面ポセットという組合せ構造によって完全に記述することの出来るクラスであり、組合せ的な文脈において扱えるセル複体として最も一般性のあるクラスだと思ってよい([1])。特に正則 CW 複体の面ポセットは階層ポセットとなり、各極大鎖は下から順にセルの次元が1ずつ上がっていく形になる。

多面体的複体・単体的複体・立方的複体:

正則 CW 複体 Γ において、任意の二つの面 σ と τ に対して $\sigma \cap \tau$ が σ および τ 両者の面になっているとき、 Γ は intersection property を持つという。Intersection property を持つ正則 CW 複体で、各セルとその面全体からなる面ポセットが凸多面体の面ポセットと同型であるものを、**多面体的複体**という。

その中でも特徴的なクラスとして、各セルとその面全体からなる面ポセットが単体の面ポセットと同型になっているときには**単体的複体**、(超)立方体の面ポセットと同型になっているときには**立方的複体**という。

セル複体 Γ において、その面ポセット $P(\Gamma)$ における極大要素の面は**ファセット**と呼ばれる。ファセットの次元がすべて同じであるようなセル複体は**純**であるという。本稿で扱う複体は純なものに限定していないことに注意する。

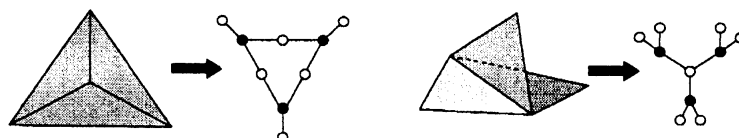
2 セル複体の構造を表現するグラフ

正則 CW 複体はその面ポセット全体を情報として与えれば完全に復元できるのであるが、本稿は、面ポセット全体の情報は用いず、極大要素であるファセット同士のつながり具合だけを組合せ的数据として用いて Γ の性質を議論することができるかどうかを考えたい、ということから話が始まる。

ファセット同士のつながり具合を表す一つの方法としては、2つのファセットがその1つ下の次元の面を共有するときに隣接するとし、ファセットの隣接関係をグラフとして表すという方法がある。これは例えば多様体のセル分割の場合には有効な表現方法であり、[10, 11]などで用いられている。[8]で0次元面(頂点)と1次元面(辺)の作るグラフを情報として用いているのもファセットの隣接関係を用いる議論の双対と見ることができる。しかし、この方法は一般の場合にはだいぶ粗い情報となってしまう。例えば、2次元の3つのファセットが隣接している下図の2つのケースはどちらも同じ隣接関係としてしかとらえられないことになる。



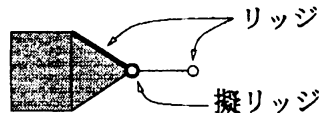
これはかなり大きい情報の欠落であり、ファセットの隣接グラフだけで議論するのはちょっと難しいように思われる。そこでこのようなケースを区別して扱えるようにするためにもう少しデータを増やし、1つ下の次元の面もグラフに登場させることを考える。



ここで加えた「ファセットの1つ下の次元の面」をリッジと呼ぶ。(図ではファセットを黒丸、リッジを白丸で表している。)ただし、純でない複体の場合も後の話が整合的に進むように、次のような定義をしておく。

定義 2.1. 面ポセットにおいて面 τ をカバーする面がすべてファセットであるとき、 τ はリッジであるという。(σ が τ をカバーするとは、 $\tau < \sigma$ であり、かつ、 $\tau < \eta < \sigma$ となる η が存在しないことをいう。または、 $\tau < \sigma$ かつ τ の次元と σ の次元の差が 1、と言っても同じである。)

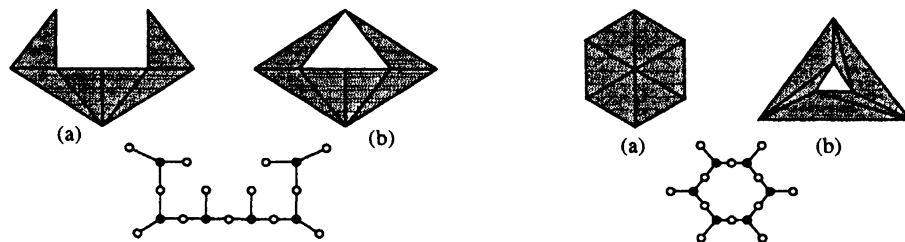
面 τ があるファセットにカバーされているが、ファセットでない面にもカバーされている場合には τ を擬リッジと呼ぶ。



ここで隣接関係のグラフに導入するのはリッジのみで、擬リッジについてはとりあえず考えないこととする。

定義 2.2. 正則 CW 複体 Γ のファセットとリッジをノードとし、 Γ の面ポセットにおいてファセット σ がリッジ τ をカバーするときに σ と τ を辺で結んで得られるグラフを $G(\Gamma)$ とする。 Γ のファセット-リッジ接続グラフと呼ぶ。

ただし、この $G(\Gamma)$ も Γ の情報を完全に表すには情報が足りない。例えば次のような例では異なる複体が同じファセット-リッジ接続グラフを持っている。



特に右側の例では (a) と (b) は根本的にトポロジーが異なっている。形 (や性質) の全く異なる 2 つの複体が同じグラフを持つという例があるので、このグラフのみから複体の性質を議論するのはまだ少し難しいように見える。このような状況で Γ について、これに少し付加的な情報を付け加えることによってどのくらいの情報を $G(\Gamma)$ から取り出せるのか、というのが本稿の主題となる。

(注：純でない複体の場合、ファセットリッジ接続グラフはファセットの次元が変わるところで必ず非連結になる。)

3 ファセット-リッジ接続グラフの向き付けと shellability

正則 CW 複体が shellable であるとは、次のように定義される。

定義 3.1. 正則 CW 複体 Γ において、ファセットの全順序 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t$ が次の条件を満たすとき、**shelling** という。

- (i) σ_1 の境界複体 (σ_1 の境界上の面すべてのなす複体) は shelling を持つ。

- (ii) 各 $i \geq 2$ に対して、 $(\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \cdots \cup \sigma_{i-1}) \cap \sigma_i$ は純な $(\dim \sigma_i - 1)$ 次元の複体で、 σ_i の境界複体には shelling $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ で $(\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \cdots \cup \sigma_{i-1}) \cap \sigma_i = \tau_1 \cup \tau_2 \cup \cdots \cup \tau_s$ となるようなものがある。

ただし、 Γ の次元が 0 のときは任意の全順序が shelling であるとする。(定義が次元について再帰的になっていることに注意。) Γ が shelling を持つとき、**shellable** であるという。

Shellability に関しては [12, Lect. 8] に解説があるが、この文献では純な場合に限っている。上の定義は [2] によるもので、純でない場合でも使える形の定義である。

多面体的複体の場合は、凸多面体の境界複体は必ず shellable であることが知られているため ([3])、(i) の条件は省略できる。さらに、

- 単体的複体の場合には、(ii) の条件は「 $(\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \cdots \cup \sigma_{i-1}) \cap \sigma_i$ が $(\dim \sigma_i - 1)$ 次元で純」で置き換えてもよい。
- 立方的複体の場合には、(ii) の条件は「 $(\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \cdots \cup \sigma_{i-1}) \cap \sigma_i$ が $(\dim \sigma_i - 1)$ 次元で純、かつ、連結」で置き換えてもよい。

ということが簡単に確かめられる。立方的複体のときの条件は、 $(\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \cdots \cup \sigma_{i-1}) \cap \sigma_i$ が $(\dim \sigma_i - 1)$ 次元で純であれば、向かい合う 2 つのファセットのみでさえなければ連結になるので、比較的簡単にチェックできる条件になっていることに注意しておく。

前章で導入したファセット-リッジ接続グラフを用いてセル複体の性質を議論できるよい例は、単体的複体の shellability の特徴付けである。

以下、ファセット-リッジ接続グラフの向き付け O が **admissible** であるとは、各リッジの入次数が 1 以上であることをいう。また、**acyclic** であるとは、有向サイクルを持たないことである。向き付け O を与えられたグラフ G を G^O で表す。

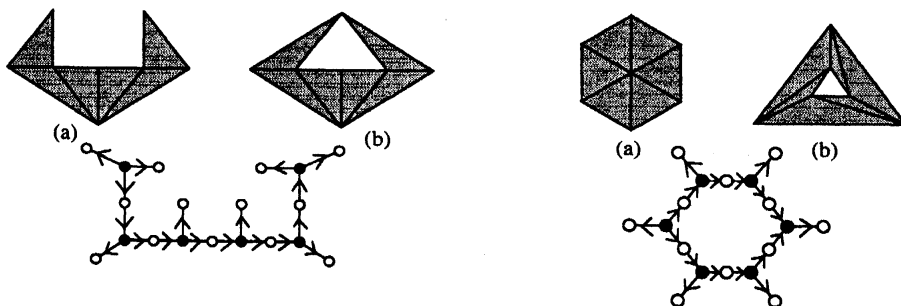
定理 3.2. 単体的複体 Γ のファセット-リッジ接続グラフ $G(\Gamma)$ に対して、以下の不等式が成立する。

$$\min_{\substack{O \text{ is acyclic} \\ \text{and admissible}}} \sum_{\sigma: \text{facet of } \Gamma} 2^{\deg\text{-out}_{G^O(\Gamma)}(\sigma)} \geq f(\Gamma),$$

ただし、 $f(\Gamma)$ は Γ の面の総数である。そして、この不等式が等式で成立するのは Γ が shellable なとき、そのときに限る。

この定理の証明は概略を次章で紹介する。

例えば先の例においては、次の向き付けがそれぞれ最適解の 1 つになり、それぞれ、最適値は 28 と 26 である。面の数は左の例では (a) が 28 で (b) が 27、右の例では (a) が 26 で (b) が 25 となっている。(空集合も面の 1 つであることに注意。) 両者とも、(a) が shellable、(b) が nonshellable である。



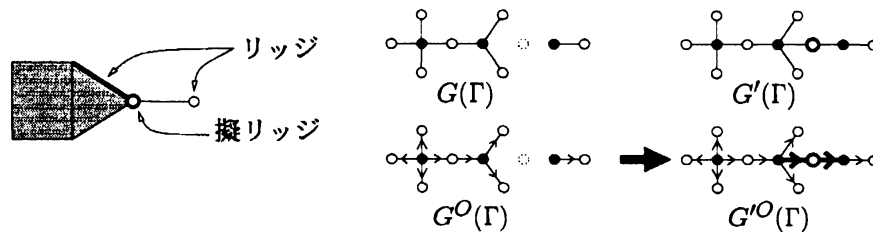
これらの例のように同じファセット-リッジ接続グラフを持つ単体的複体が複数存在する場合、それらが shellable かどうか単に面の総数のみに支配されているというのが面白い現象である。Shellable な複体は定理 3.2 の不等式を満たすようにできる限り多くの面を持っているということになり、ある意味、nonshellability は低い次元の面の欠如によってもたらされていると言える。

Shellable な場合、この最適解の向き付けに沿ったファセットの全順序 ($G^O(\Gamma)$ の線形拡大をファセットのみに制限したもの) が shelling に対応するため、定理 3.2 の最適化問題の解は shellability を判定するだけでなく、shelling を与えるのにも用いることができる。ただし、現在のところ、この形の最適化問題を効率的に解く方法は知られていない。(Shellability 判定が NP 完全かどうかは未解決であるが、おそらく NP 完全であろうと思われるため、この最適化問題もおそらく一般には効率良くは解けないであろうと思われる。)

4 定理 3.2 の成り立つ仕組み

前章の単体的複体の shellability の特徴付けのようなことを他の種類のセル複体にも出来ないかを考えたい。そのためには、定理 3.2 の目的関数 $\sum_{\sigma: \text{facet of } \Gamma} 2^{\deg\text{-out}_{G^O(\Gamma)}(\sigma)}$ が何を意味しているのかを理解する必要があるので、その概要を紹介する。

ファセット-リッジ接続グラフ $G(\Gamma)$ にはファセットとリッジの接続関係しか入れていなかったが、これに擬リッジも加え、擬リッジとそれを含むファセットの間に辺を加えたグラフを $G'(\Gamma)$ と表記することにする。このとき、ファセット-リッジ接続グラフ $G(\Gamma)$ に向き付け O が与えられている場合には、カバーしないファセットから擬リッジに向けて、および、擬リッジからカバーするファセットに向けて向きをにつけることによって向き付けを $G'(\Gamma)$ に拡張することとし、この拡張された向き付けも同じ O で表記することにする。 $(G^O(\Gamma)$ と $G'^O(\Gamma)$ は acyclic および admissible という性質に関して同じ性質を持つことに注意する。)



ファセット-リッジ接続グラフ $G(\Gamma)$ に向き付け O を与えたとき、次のような記号を導入する。

$$\begin{aligned} S^O(\sigma) &= \{\eta \in \Gamma : \eta \subseteq \tau \subseteq \sigma \text{ な任意の (擬) リッジ } \tau \text{ に対して } G'^O(\Gamma) \text{ で } \sigma \rightarrow \tau\} \cup \{\sigma\}, \\ S^{cO}(\sigma) &= \{\eta \in \Gamma : \eta \subseteq \tau \subseteq \sigma \text{ なある (擬) リッジ } \tau \text{ に対して } G'^O(\Gamma) \text{ で } \tau \rightarrow \sigma\} \\ &= \bigcup \{\tau : G'^O(\Gamma) \text{ において } \tau \rightarrow \sigma\}. \end{aligned}$$

σ の面は $S^O(\sigma)$ と $S^{cO}(\sigma)$ に分割されることになる。ここで、 $S^O(\sigma)$ には次のような性質があることが簡単に確認できる。

命題 4.1. Γ の面 η とファセット σ に対して、 $\eta \in S^O(\sigma)$ であることと、 σ が $G'^O_{\supseteq \eta}(\Gamma)$ においてソースとなっていることは同値。ただし、 $G'^O_{\supseteq \eta}(\Gamma)$ は $G'^O(\Gamma)$ を η を含むファセットとリッジのみに制限した部分グラフのことである。 $\square$

定理 3.2 では、acyclic かつ admissible (各リッジの入次数が 1 以上) である向き付けを考えていた。向き付け O が acyclic であれば、その部分グラフ $G_{\supseteq \eta}^O(\Gamma)$ も acyclic であり、したがって、必ずソースを 1 つ以上持つ。そして、admissible の条件からそのソースはリッジではあり得ないので、必ずソースとなるファセットが 1 つ以上あることになる。すると、上の命題により、任意の η はあるファセット σ に対して $S^O(\sigma)$ に含まれることになる。つまり、 $\{S^O(\sigma)\}$ は Γ の被覆となる。ここから、次の命題が示される。

命題 4.2. 正則 CW 複体 Γ に対して、次が成立する。

$$\min_{\substack{O \text{ is acyclic} \\ \text{and admissible}}} \sum_{\sigma: \text{facet of } \Gamma} \#S^O(\sigma) \geq f(\Gamma).$$

ただし、 $f(\Gamma)$ は Γ の面の総数である。 □

単体的複体の場合、実は $\#S^O(\sigma) = 2^{\deg\text{-out}_{GO}(\Gamma)(\sigma)}$ となっている。これは、単体的複体の面全体の集合がブール束をなすことを考えると簡単に示すことができる。つまり、定理 3.2 の前半は上の命題から示されることになる。

この不等号が等号で成立するのは、 $\{S^O(\sigma)\}$ が Γ の分割になるような向き付け O が存在するときである。ただし、その分割は acyclic な向き付け O から作られているので、単に分割であるだけでなく、もう少し強い性質を持っている。

$\{S^O(\sigma)\}$ が分割になっているとき、 $\tilde{G}^O(\Gamma)$ を Γ のファセットをノードとし、2 つのファセット σ と τ の間に「 $S^O(\sigma) \rightarrow S^O(\tau) \Leftrightarrow$ ある面 $\eta \subset \tau$ について $\eta \in S^O(\sigma)$ 」のように辺を定義した有向グラフとする。このとき、以下が成り立つ。

命題 4.3. G^O が acyclic であることと $\tilde{G}^O(\Gamma)$ が acyclic であることは同値である。 □

この、 $\tilde{G}^O(\Gamma)$ が acyclic であるような分割 $\{S^O(\sigma)\}$ を **acyclic な分割**と呼ぶことにしよう。上の命題の証明はここでは省略するが、それほど難しくない。これに加えて、次の命題により、定理 3.2 が成立することになる。

命題 4.4. 単体的複体 Γ に対して、 $\tilde{G}^O(\Gamma)$ が acyclic になるような分割 $\{S^O(\sigma)\}$ が存在することと、 Γ が shellable であることは同値である。 □

つまり、単体的複体が acyclic な分割を持つということと shellable であるということとは同値であるということである。この命題は [2] の Proposition 2.5 に示されている。([4] にも一般化された形で登場する。) 以上から定理 3.2 の単体的複体の shellability の特徴付けが示されるわけである。

以上の証明において省略した部分等は [6] を参照されたい。([7] でもほぼ同じ証明を与えているが、記述が単体的複体の場合のみ用になっているので、 $S^O(\sigma)$ の扱いが省略されている。)

5 立方的複体のファセット-リッジ接続グラフの向き付け

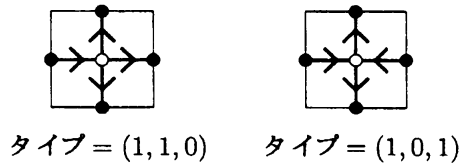
この一連の話を単体的複体以外のセル複体に用いるためには、2 つのポイントがある。1 つは、 $\#S^O(\sigma)$ を計算する公式があるようなセル複体のクラスであること、もう 1 つは $\{S^O(\sigma)\}$ が $\tilde{G}^O(\Gamma)$ が acyclic であるような分割であることから何が言えるのか、ということである。1 つ目のポイントの方は、各ファセットの形が標準化されているもう一つの特例ケースとして、立方的複体を対象にするのがよさそうである。

立方的複体の場合、1つのファセットに対して、そのカバーする(擬)リッジを向かい合うペアごとに分けて考えるとよい。ファセットが k 次元立方体であるとき、このファセットは k 組の向かい合う(擬)リッジのペアをカバーしている。(注:その他にカバーではなく次元が2以上低くなる擬リッジと接続している可能性はあるが、ここではそれらについては考えない。)これらの k ペアの(擬)リッジとの間の辺の向き付けから、次のように定義する。

定義 5.1. 立方的複体 Γ のファセット-リッジ接続グラフ $G(\Gamma)$ の向き付け O を与えたときに、ファセット σ に対して擬リッジも加えたグラフ $G'(\Gamma)$ において、

- $t_0^O(\sigma) = \sigma \rightarrow \tau$ かつ $\sigma \rightarrow \tau'$ となる向かい合うペア (τ, τ') の個数
- $t_1^O(\sigma) = \sigma \rightarrow \tau$ かつ $\sigma \leftarrow \tau'$ となる向かい合うペア (τ, τ') の個数
- $t_2^O(\sigma) = \sigma \leftarrow \tau$ かつ $\sigma \leftarrow \tau'$ となる向かい合うペア (τ, τ') の個数

とする。 $(t_0^O(\sigma), t_1^O(\sigma), t_2^O(\sigma))$ を σ のタイプと呼ぶ。



この定義を用いると、次のように $\#S^O(\sigma)$ を計算できる。

$$\#S^O(\sigma) = \begin{cases} 2^{t_1^O(\sigma)} 3^{t_0^O(\sigma)} & (t_0^O < \dim \sigma) \\ 2^{t_1^O(\sigma)} 3^{t_0^O(\sigma)} + 1 & (t_0^O = \dim \sigma). \end{cases}$$

この後者の「+1」は空集合の分である。 $(t_0^O = \dim \sigma)$ の場合には $\emptyset \in S^O(\sigma)$ となる。)単体的複体の場合にはすべての場合で共通の式で計算できていたが、立方的複体のときにこの「+1」の有無で場合分けする形になるのは面倒である。そこで、空集合を除いて考えると都合がよい。

定義 5.2. 正則CW複体 Γ に対して、 $\check{\Gamma} = \Gamma \setminus \{\emptyset\}$ とする。同様に、 $\check{S}^O(\sigma) = S^O(\sigma) \setminus \{\emptyset\}$ 、 $\check{S}^{co}(\sigma) = S^{co}(\sigma) \setminus \{\emptyset\}$ のように定義する。

この定義で、4章と同じことが同じ議論で成立する。すなわち、次の命題が成り立つ。

命題 5.3. 正則CW複体 Γ において、 $\check{\Gamma}$ の各面 η に対して、 $\eta \in \check{S}^O(\sigma)$ であることと、 η が $G'_{\supseteq \eta}^O(\check{\Gamma})$ においてソースとなっていることは同値。ただし、 $G'_{\supseteq \eta}^O(\check{\Gamma})$ は $G'^O(\check{\Gamma})$ を η を含むファセットとリッジのみに制限した部分グラフのことである。□

命題 5.4. 正則CW複体 Γ に対して、次が成立する。

$$\min_{\substack{O \text{ is acyclic} \\ \text{and admissible}}} \sum_{\sigma: \text{facet of } \check{\Gamma}} \# \check{S}^O(\sigma) \geq f(\check{\Gamma}).$$

ただし、 $f(\check{\Gamma})$ は $\check{\Gamma}$ の面の総数である。□

特に立方的複体の場合は、次のようになる。

命題 5.5. 立方的複体 Γ に対して、次が成立する。

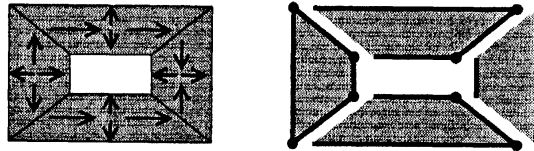
$$\min_{\substack{O \text{ is acyclic} \\ \text{and admissible}}} \sum_{\sigma: \text{facet of } \tilde{\Gamma}} 2^{t_1^O(\sigma)} 3^{t_0^O(\sigma)} \geq f(\tilde{\Gamma}).$$

ただし、 $f(\tilde{\Gamma})$ は $\tilde{\Gamma}$ の面の総数である。 □

この命題において等号が成立するのは、 $\{\check{S}^O(\sigma)\}$ が $\tilde{\Gamma}$ の分割になるときである。

Remark $\{\check{S}^O(\sigma)\}$ が $\tilde{\Gamma}$ の分割になるというのは、 $\{S^O(\sigma)\}$ が Γ の分割になるということよりも若干弱くなっている。前者は空集合のところで重なりが出てよいことになっている。

さて、若干条件は弱いものの、立方的複体に対して $\{\check{S}^O(\sigma)\}$ が $\tilde{G}^O(\Gamma)$ が acyclic であるような $\tilde{\Gamma}$ の分割となる条件を命題の不等式が等号で成り立つこととして特徴付けることが出来ることが分かった。しかし、残念ながら $\{S^O(\sigma)\}$ が Γ の分割になるとしてもこれが shellability の特徴付けになるわけではない。例えば次の例は、 $\{S^O(\sigma)\}$ が Γ の acyclic な分割 ($\tilde{G}^O(\Gamma)$ が acyclic であるような分割) になっているが、この Γ は shellable ではない。



(実際、 Γ が acyclic な分割を持つことは、shellability の定義 (定義 3.1) の (ii) を「 $(\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_{i-1}) \cap \sigma_i$ は純な $(\dim \sigma_i - 1)$ 次元の複体」に置き換えたものと同値である。これは単体的複体の場合には shellability と同値であるが、一般にはそうではない。)

しかし、この場合は各ファセットが立方体であるという特徴に注目するとこの分割から Γ のトポロジーについての情報を得ることができる。

立方的複体 Γ において、命題の不等式が等号で成り立ち、 $\{\check{S}^O(\sigma)\}$ が $\tilde{\Gamma}$ の分割になるとする。特に O は acyclic かつ admissible な向き付けである。 O は acyclic なので、その (ある 1 つの) 線形拡大をファセットに制限することにより、ファセットの全順序 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t$ を得る。この全順序に従い、空集合から始めて 1 つずつファセットを付け加えることによって Γ を作ることを考える。その各段階の複体は $\Gamma_i = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_i$ である。このとき、 Γ_i は Γ_{i-1} に σ_i を $\check{S}^{CO}(\sigma_i)$ を張り合わせ面として張り合わせて得られることに注目する。この $\check{S}^{CO}(\sigma_i)$ の基礎集合は、 $t_1^O(\sigma_i) > 0$ の場合、球体と同相になり、 $t_1^O(\sigma_i) = 0$ の場合には $\partial I^{t_2^O(\sigma_i)} \times I^{t_0^O(\sigma_i)}$ と同相になる。したがって、

- $t_1^O(\sigma_i) > 0$ の場合には $|\Gamma_i|$ は $|\Gamma_{i-1}|$ とホモトピー同値、
- $t_1^O(\sigma_i) = 0$ の場合には $|\Gamma_i|$ は $|\Gamma_{i-1}|$ に $t_2^O(\sigma_i)$ 次元セルを境界で張り合わせたものとホモトピー同値、

であることが分かる。このことから、次の定理が示される。

定理 5.6. 立方的複体 Γ に対して、

$$\min_{\substack{O \text{ is acyclic} \\ \text{and admissible}}} \sum_{\sigma: \text{facet of } \tilde{\Gamma}} 2^{t_1^O(\sigma)} 3^{t_2^O(\sigma)} \geq f(\tilde{\Gamma})$$

が成立する。ただし、 $f(\tilde{\Gamma})$ は $\tilde{\Gamma}$ の面の総数である。そして、この等号が成立するとき、 $p_i(\Gamma) = \#\{\sigma : t_1^O(\sigma) = 0 \text{ かつ } t_2^O(\sigma) = i\}$ とすると、 Γ は p_i 個の i 次元セルからなる CW 複体とホモトピー同値である。特に、 Γ のベッチ数 $\beta_i(\Gamma)$ について、次の不等式が成立する。

$$\beta_k(\Gamma) - \beta_{k-1}(\Gamma) + \cdots + (-1)^{k-1} \beta_0(\Gamma) \leq p_k(\Gamma) - p_{k-1}(\Gamma) + \cdots + (-1)^{k-1} p_0(\Gamma) \quad (0 \leq k \leq \dim \Gamma),$$

$$p_0(\Gamma) - p_1(\Gamma) + \cdots + (-1)^{\dim \Gamma - 1} p_{\dim \Gamma}(\Gamma) = \chi(\Gamma),$$

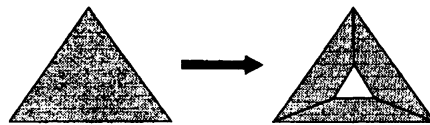
$$\beta_i(\Gamma) \leq p_i \quad (0 \leq i \leq \dim \Gamma),$$

ただし、 $\chi(\Gamma)$ はオイラー標数である。

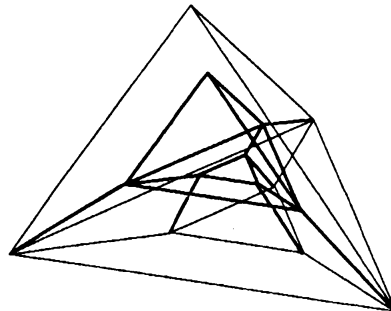
定理の最後のベッチ数についての不等式はいわゆるモースの不等式で、 p_i 個の i 次元セルからなる CW 複体がこれらの不等式を満たすことは例えば [9] などにある。

(上では p_i 個の i 次元セルからなる CW 複体とホモトピー同値、という形で説明したが、 p_i 個の i -ハンドルへの分解、と説明してもよい。)

この定理 5.6 に現れる最適化問題は、定理 3.2 の最適化問題の等号成立の判定問題と同等以上の難しさを持っている。というのは、任意に単体的複体 Γ に対して、 Γ が shellable であることと、 Γ の各ファセットに



のような変換を施して立方的複体にした複体 Γ' において $\{S^O(\sigma)\}$ が Γ' の acyclic な分割になることが同値であることは比較的簡単に確かめることができるためである。上の図は 2 次元の例であるが、 d 次元の場合には、 d 次元単体の中に d 次元単体を各 $(d-1)$ 次元面が平行になるように入れ、双方の $(d-1)$ 次元面に再帰的に分割を与え、平行な面同士を結んでいくことで分割を構成していけばよい。(1 次元の場合はそのまま分割はしない。)



上の絵は 3 次元の場合の構成法の途中までを書き入れた図である。単体の下面になっているファセット対上に 3 つの立方体が出来ている。(真中の三角柱は空洞。) この後残り

の3組のファセット対に3つずつ、合計12個のファセットで置き換えられることになる。一般にこの構成法をすることで d 次元単体が $3 \times 4 \times \cdots \times (d+1)$ 個の立方体に置き換えられることになるが、複体の次元を定数とすれば、ファセットの増加は高々定数倍である。このため、もし定理5.6の最適化問題を解くことが多項式時間でできるとすると、任意の単体的複体に対して多項式時間でshellability判定、すなわち、定理3.2の最適化問題の等号成立判定の問題が多項式時間で解けることになるわけである。

6 立方的複体の shellability と球面定理

前章において、立方的複体の場合には命題5の最適化問題の最適解によって複体の分割を与えてもそれがshellabilityの特徴付けにならないとしたが、若干の条件を付加すれば一応shellabilityの特徴付けを得ることはできる。というのは、定義3.1の後につけた補足を考えると、

- $t_0^O(\sigma) = \dim \sigma$ であるファセット σ はちょうど1つ、
- $t_1^O(\sigma) = 0$ のときには $t_2^O(\sigma) = 0$ または $t_2^O(\sigma) = \dim \sigma$ 、

の2つの条件を満たせば、前章で作ったファセットの全順序がshellingになることが簡単に確認でき、逆にshellingが与えられると、この2つの条件を満たす分割を与えることもできるためである。ただし、この条件の付け方はきれいではないので、shellabilityの特徴付けとして定理に定式化するのはあまり意味がなさそうである。

ただし、この状況が自然に生じるケースもあり、その場合にはこのshellabilityとの等価性を利用して意味のある帰結を得ることができる。そのような例として、多様体の立方分割の例を挙げよう。

立方的複体 Γ の基礎集合 $|\Gamma|$ が多様体 M と同相であるとき、 Γ は M の立方分割であるという。

定理 6.1. Γ を d 次元多様体 M の立方分割とする。 Γ に対して、定理5.6の最適化問題の最小値に関する不等式を等号で満たす最適解で、 $p_0 = p_d = 1$ かつ $p_i = 0$ ($0 < i < d$) を満たすものが存在するとする。このとき、 M は PL 球面である。

PL 球面とは、単体の境界と区分的線形な同相写像によって同相であるような球面のことである。この定理の証明は次のように簡単に与えられる。まず、 $p_0 = p_d = 1$ かつ $p_i = 0$ ($0 < i < d$) であるような最適解は、上のshellabilityを特徴付けるための付加的な条件を満たしているので、 Γ はshellableであることが分かる。そして、多様体の正則CW分割がshellableであればその多様体はPL球面である([1])ので、定理の帰結が導かれる。

この定理の面白いのは、モース理論における球面定理とのアナロジーになっていることである。定理5.6において、 $t_1^O(\sigma) = 0$ を満たすファセットはモース関数における指数 $t_2^O(\sigma)$ の臨界点とみなすことができ、 p_i は指数 i の臨界点の個数を数えているようなものである。球面定理は、なめらかな d 次元多様体が指数0の臨界点1つと指数 d の臨界点1つの合わせて2つのみしか臨界点を持たないようなモース関数を持てばその多様体は球面と微分同相である、ということを主張するのであるが、上の定理はこの定理のアナロジーになっている。モース理論の組合せ的アナロジーとしては[5]が有名であるが、今回の立方的複体に関する結果はこれとは異なる形のものとなっている。

7 終わりに

本稿ではセル複体の組合せ論に絡んだ少し変わった形の最適化問題の役割を紹介した。定理 3.2 では与えられたグラフの向き付け全体の空間の中で、向き付けが acyclic かつ admissible という制約のもと、各頂点の出次数をパラメータとする関数を最小化する問題が用いられている。定理 5.6 の方では、出次数よりももう少し複雑な関数の最小化をしているが、各ノードの出入りのパターンをパラメータとする関数であり、同様の系統の問題と見ることが出来るだろう。制約の「admissible」の方は同じく出次数による制約と見ることができるので、「acyclic な向き付け全体の空間中での、各ノードの出入りのパターンによる制約下における出入りパターンの関数の最小化問題」と言うことができるだろう。今回紹介した定理 3.2 および定理 5.6 の最適解からの議論は共に acyclic な向き付けの線形拡大に沿った逐次構成を元に行っているが、他の組合せ的な構造においても逐次構成に沿った性質に対しても同じように acyclic な向き付けの空間中の最適化の形で議論することは可能かもしれない。このようなタイプの組合せ最適化問題が同様の枠組で今後他にも議論されることが期待される。

Acknowledgement

本研究は、科研費 (15740052, 18310101, 19510137, 20560052) の補助を受けている間に行なわれた。

References

- [1] A. Björner, Posets, regular CW complexes and Bruhat order, *Europ. J. Combinatorics*, **5** (1984), 7-16.
- [2] A. Björner and M. Wachs, Shellable nonpure complexes and posets. I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996) 1299-1327 & **349** (1997), 3945-3975.
- [3] H. Brugesser and P. Mani, Shellable decompositions of cells and spheres, *Math. Scand.*, **29** (1971), 197-205.
- [4] M.K. Chari, On discrete Morse functions and combinatorial decompositions, *Discrete Math.*, **217** (2000), 101-113.
- [5] R. Forman, Morse theory for cell complexes, *Adv. Math.*, **134** (1998), 90-145.
- [6] M. Hachimori, Orientations on simplicial complexes and cubical complexes, preprint.
- [7] M. Hachimori and S. Moriyama, A note on shellability and acyclic orientations, *Discrete Math.*, **308** (2008), 2379-2381.
- [8] G. Kalai, A simple way to tell a simple polytope from its graph, *J. Combin. Theory, Ser B*, **49** (1988), 381-383.
- [9] J. Milnor, "Morse Theory", Princeton University Press, 1963.
- [10] A. Vince, Graphic matroids, shellability and the Poincare Conjecture, *Geometriae Dedicata*, **14** (1983), 303-314.
- [11] A. Vince, A nonshellable 3-sphere, *European J. Combin.*, **6** (1985), 91-100.
- [12] G.M. Ziegler, "Lectures on Polytopes", Springer-Verlag, Berlin, 1994, Second revised printing 1998.