

超準函数解析のいくつかの問題について

東大 教養 斎藤正彦

導入部

A. Robinson [4] は、有界実数列全部の空間上の任意の連続線型形式が $*$ 有限作用素 (才一部定義 1.2 参照) として表わされることを示した。この形の定理は超準解析では非常に有効であり、これに類似したいろいろな定理が個別的に定式化され、証明されている。

この講義の目的は、上記の結果をさあめて一般的な枠組で定式化し、簡単に証明すること、およびそれを個々の問題に適用することである。特につぎの諸結果が一般化されて再現される：

- 1) 上記の Robinson の結果。
- 2) ノルム線型空間 V の再双対空間 V^{**} の元を V の元で表わすこと (Luxemburg [3])。
- 3) シェヴァルツ超函数を (無限小を除いて) $*$ 多項式で表わすこと (Robinson [5])。

4) 測度空間上の積分を $\ast$ 有限作用素で表わすこと (Bernstein [1]).

5) 無原子確率測度を $\ast$ 有限集合上の $\ast$ 平均で表わすこと (Henson [2]).

この講演では最後の定理にだけ証明を付け、他は定義と定理だけを述べる。それについては [6] または [7] を見ていただきたい。ただし、[6] は本稿の結果よりやや弱い形になっている。

主題三つあり、函数空間からの線型写像、正值線型形式および無原子測度である。どれも共通の方法になっているが、論理的には独立である。

B. 超準解析 (non-standard analysis) の基礎は既知と仮定するが、本稿で必要な最小限のことを要約しておく。

まず本稿で扱うあらゆる対象を含む宇宙 U を考える。宇宙 U とはつぎの四条件を満たす空でない集合である：

- 1) $y \in U, x \in y \Rightarrow x \in U$.
- 2) $x, y \in U \Rightarrow \{x, y\} \in U$.
- 3) $x \in U \Rightarrow \bigcup x = \bigcup_{y \in x} y \in U$
- 4) $x \in U \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in U$ ($\mathcal{P}(x)$ は x の冪集合),

選択公理は仮定する。また、関係、函数、順序対等はすべて集合である。

U の元を定項とする論理式の全体を $\mathcal{L}$ とする。論理式 ϕ が n 個の自由変項を含まないとき、 ϕ を n 変項論理式と言い、 $\phi(x_1, \dots, x_n)$ と書く。0 変項論理式を文と言う。束縛変項の変域も U と考えて、任意の文 ϕ は U で解釈することができ、真すに偽の定まった命題を表わす。

$\phi(x, y)$ を 2 変項論理式とする。 U の元 a で、ある U の元 b に対して $\phi(a, b)$ が真になるものの全体を U の左域と言い、 $Q(\phi)$ と書く。 $Q(\phi)$ は必ずしも U に属さない。

定義 $Q(\phi)$ の任意有限個の元 $a_1, \dots, a_n$ に対して U の元 b が存在し、 $\phi(a_i, b)$ ($1 \leq i \leq n$) がすべて真となるとき、 ϕ は有限共起的 (concurrent) であると言う。

もう一つの集合 *U から *U への単射 $*$ を考える。 $\mathcal{L}$ の文 ϕ に対し、そこに現われる定項 (U の元) をすべて $*$ による像と考えることにより、 ϕ は *U で解釈され、真偽の定まった命題を表わす。ただし、束縛変項の変域は *U とする。 *U の元を定項とする論理式の全体を ${}^*\mathcal{L}$ と書く。 $\mathcal{L} \subset {}^*\mathcal{L}$ とみなす。 ${}^*\mathcal{L}$ の文は *U で解釈できる。

定義 $\triangleright$ $\mathcal{U}$ の条件が満たされること、 ${}^*\mathcal{U}$ を $\mathcal{U}$ の拡大 (enlargement) と言う:

1) $\mathcal{L}$ の任意の文 ϕ に対し、 ϕ が $\mathcal{U}$ で真であることと ${}^*\mathcal{U}$ で真であることは同値である (移行の原理)。

2) $\mathcal{L}$ の任意の有限共起的な二変項論理式 $\phi(x, y)$ に対し、 ${}^*\mathcal{U}$ の元 β が存在し、 $\mathcal{Q}(\phi)$ の任意の元 a に対して $\mathcal{L}$ の文 $\phi(a, \beta)$ が ${}^*\mathcal{U}$ で真となる (共起性の原理)。

本稿を通じ、 $\mathcal{U}$ の拡大 (存在する) ${}^*\mathcal{U}$ を一つ固定して考える。 $\mathcal{U}$ の諸概念はすべて ${}^*\mathcal{U}$ に移される。対応する概念には前に $*$ を付けるが、混乱の恐れがなければ省略する。

記号 1) X を位相空間、 $a \in X$ の点とする。 a の近傍系を $\mathcal{V}(a)$ とするとき、

$$\text{Mon}(a) = \bigcap \{ {}^*B ; B \in \mathcal{V}(a) \}$$

を a の単子と言う。 $\alpha \in \text{Mon}(a)$ のとき、 $\alpha \dot{=} a$ と書く。

2) 体はつねに可換体を意味する。

3) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。 $\mathbb{R}$ は実数体、 $\mathbb{C}$ は複素数体、 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0\}$ 、 $\mathbb{R}^{++} = \{x \in \mathbb{R} ; x > 0\}$ 。

第 一 部 函 数 空 間 か ら の 線 型 写 像

A. * 有限作用素による表現

1.1. 定義 K を位相体, V を K 上の位相線型空間とする。つぎの条件がみたされるとき, かりに V を HB 空間 と言うことにする: V の任意の有限個の線型独立な元 $v_1, \dots, v_n$, K 上の位相線型空間 W および W の元 $w_1, \dots, w_n$ に対し, V から W への連続線型写像 z で, $z(v_i) = w_i$ ($1 \leq i \leq n$) となるものが存在する。

つぎの空間はどれも HB 空間である:

- 1) $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上のハウスドルフ局所凸空間,
- 2) 離散体 K 上の離散線型空間,
- 3) K^m , ただし $m \in \mathbb{N}$, K は任意の位相体。

1.2. 記号と定義 第一部ではつぎの記号を使う。

1) K は位相体, V は K 上の HB 空間, W は K 上の位相線型空間, Z は V から W への連続線型写像の全体, $v \in V$, $z \in Z$ に対し, $z(v)$ のかわりに $\langle v, z \rangle$ と書く。

2) X は空でない集合, E は X 上の V 値関数から成る線型空間,

3) X 上の Z 値有限関数 (= 台が有限) の全体を F と書く。 F の元 f に対し, E から W への線型写像 T_f が

$$T_h(f) = \sum_{x \in X} \langle f(x), h(x) \rangle \quad (f \in E)$$

によつて定まる。これを有限作用素と言う。

4) これを *T で解釈することにより、 * 有限作用素が定義される。すなわち、 *F の元 φ に対し、 *E から *W への * 写像 ${}^*T_\varphi$

$${}^*T_\varphi(\psi) = \sum_{\xi \in {}^*X} \langle \psi(\xi), \varphi(\xi) \rangle \quad (\psi \in {}^*E)$$

によつて定義される。

5) $P \in E$ から W への線型写像とする。我々の目標は P を * 有限作用素として表わすことである。

1.3. 定理 1) 上の記号のもと、 * 有限函数 $\varphi \in {}^*F$ が存在し、あらゆる $f \in E$ に対して ${}^*T_\varphi(f) = P(f)$ となる。

2) 特に K が離散でなく、 V も W も $\{0\}$ でなければ、 * 有限函数 $\varphi \in {}^*F$ で、その台が X を含むものが存在し、あらゆる $f \in E$ に対して ${}^*T_\varphi(f) = P(f)$ が成り立つ。

1.4. 系 (Luxemburg [3]) K は位相体、 X は K 上の位相線型空間、 $X' = \text{Hom}(X, K)$ とする (X' の位相は問題にしない)。このとき、 X' 上の任意の線型形式 P に対して *X の元 ξ_P が存在し、あらゆる $f \in X'$ に対して $P(f) = f(\xi_P)$ となる。

1.5. 系 $(X, \mathcal{B}, m)$ を測度空間, E を X 上の実数値可積分関数の全体とする. *X の * 有限部分集合 Γ および Γ 上の ${}^*\mathbb{R}$ 値 * 関数 φ が存在し, 任意の $f \in E$ に対して

$$\int_X f dm = {}^*\sum_{\xi \in \Gamma} {}^*f(\xi) \varphi(\xi)$$

が成り立つ.

B. * 積分による表現

1.6. 定理 K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, V および W を $\{0\}$ でない K 上のバナハ空間, X をハウスドルフ局所コンパクト空間とし, E の元はすべて連続とする. X 上のリタスところ真に正なラドン測度 m に対し, *X から *Z への * 連続 * 関数 φ で, つぎの性質をもつものが存在する:

- a) φ の値域は *Z の * 有限次元部分空間に含まれる.
- b) φ の台は * コンパクトで X を含む.
- c) 任意の $f \in E$ に対して ${}^*m(\langle {}^*f, \varphi \rangle) = P(f)$ が成り立つ. ただし, $\langle {}^*f, \varphi \rangle: \xi \mapsto \langle {}^*f(\xi), \varphi(\xi) \rangle$.

特に X が C^∞ 多標体なら φ は ${}^*C^\infty$ 関数に取れる.

1.7. 系 (Robinson [5]) 特に $X = \mathbb{R}^k$, $V = W = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, m は $\mathbb{R}^k$ 上のルベーグ測度とする. E の関数がすべてコンパクトな台をもつならば, * 多項式 (* フーリエ多項式)

φ が存在し, 任意の $f \in E$ に対して

$$P(f) = \int_{\mathbb{R}^k}^* f(\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad \text{が成り立つ.}$$

第2部 正値線型形式およびその測定

2.1. 定義および記号

1) $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ は順序位相でコンパクトである。
 α が正の無限大実数のとき, $\alpha = +\infty$ となる. $\pm\infty$ を含む
 演算: $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$ に対し, $a + (\pm\infty)$
 $= (\pm\infty) + a = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}^{++}$ に対し, $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a$
 $= \pm\infty$. $0 \cdot (\pm\infty)$ は定義しない.

2) X は集合, E は X 上の $\mathbb{R}^+$ 値関数から成る錐空間とする.
 すなわち, $0 \in E$, $f, g \in E$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ なら $af + bg$
 $\in E$.

3) P は E 上の錐形式. すなわち P は E から $\bar{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$
 への写像でつぎの条件を満たすものとする:

(a) $P(0) = 0$.

(b) $a \in \mathbb{R}^{++}$, $f \in E \Rightarrow P(af) = a P(f)$.

(c) $f, g \in E \Rightarrow P(f+g) = P(f) + P(g)$.

(d) $f, g \in E$, $f \leq g \Rightarrow P(f) \leq P(g)$.

4) $E_P = \{f \in E; P(f) < +\infty\}$ と置く. $0 \in E_P$.

5) F は X 上の $\mathbb{R}^+$ 値有限函数の全体とする.

2.2. 定理 X を含む X の $*$ 有限部分集合 Γ および Γ 上の $\mathbb{R}^+$ 値 $*$ 函数 φ が存在し, 任意の $f \in E$ に対して

$$P(f) \equiv \sum_{\xi \in \Gamma}^* f(\xi) \varphi(\xi) \quad \text{が成り立つ.}$$

2.3. 系 測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ に対し, X を含む X の $*$ 有限部分集合 Γ および Γ 上の $\mathbb{R}^+$ 値 $*$ 函数 φ が存在し, X 上の積分確定 ($\mathbb{R}$ の値を許す) な任意の函数 f に対して

$$\int_X f \, dm \equiv \sum_{\xi \in \Gamma}^* f(\xi) \varphi(\xi) \quad \text{が成り立つ.}$$

2.4. 定理 X を孤立点のないハウスドルフ空間とし, E の函数はすべて連続とする. X を含む X の $*$ 有限部分集合 Γ および $*$ 自然数 p が存在し, 任意の $f \in E$ に対して

$$P(f) \equiv \frac{1}{p} \sum_{\xi \in \Gamma}^* f(\xi) \quad \text{が成り立つ.}$$

第三部 無原子測度

3.1. 定義 測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ が無原子であるとは, 任意の有限可測集合 A に対して $m(A) = 0$ となることである.

3.2. 補題 $(X, \mathcal{B}, m)$ を無原子測度空間, E を X 上の正値可測函数の全体, E_p を正値可積分函数の全体とし, E の元 f

に対して $\int_X f d\mu \in P(f)$ と書く。 E_P の元 $f_1, \dots, f_\ell$,
 $E - E_P$ の元 $f_{\ell+1}, \dots, f_n$, $e \in \mathbb{R}^{++}$, $N \in \mathbb{N}$ および X の有限
 部分集合 D が与えられたとする。 D を含む X の有限部分集合
 C および自然数 r が存在し,

$$|T_{C,r}(f_i) - P(f_i)| \leq e \quad (1 \leq i \leq \ell)$$

$$T_{C,r}(f_i) \geq N \quad (\ell+1 \leq i \leq n)$$

が成り立つ。 ただし, $T_{C,r}(f) = \frac{1}{r} \sum_{x \in C} f(x)$.

証明 $e \leq 1 \leq N$ と仮定し,

$$M = 1 + |D| \cdot \max \{ f_i(x); 1 \leq i \leq n, x \in D \}$$

と置く。 ただし, $|D|$ は D の濃度である。

1° 積分の定義により, $1 \leq i \leq n$ に対し, 正值可積分階段
 函数 g_i が存在し,

$$g_i \leq f_i, \quad P(f_i) - P(g_i) \leq \frac{1}{\delta} e \quad (1 \leq i \leq \ell)$$

$$g_i \leq f_i, \quad P(g_i) \geq 2N \quad (\ell+1 \leq i \leq n)$$

が成り立つ。 $G = \max \{ g_i(x); 1 \leq i \leq n, x \in X \}$ と置き, g_1 ,
 $\dots, g_n$ の台の合併を Y とする。 $m(Y) < +\infty$.

2° Y の可測部分集合 Z を適当にとると, $m(Y-Z) < \frac{e}{\delta G}$
 かつ $f_1, \dots, f_\ell$ は Z 上有界になる。 $1 \leq i \leq \ell$ に対し, $x \in Z$
 のとき $f'_i(x) = f_i(x)$, $x \notin Z$ のとき $f'_i(x) = 0$ として函数 f'_i

を定義する. $x \in Z$ なら $g_i(x) \leq f'_i(x)$ だから, 正值可積分
 段函数 h_i ($1 \leq i \leq l$) が存在し, $h_i \leq f'_i$, $x \in Z$ に対しては
 $g_i(x) \leq h_i(x)$, かつ $x \in X$ に対して

$$f'_i(x) - h_i(x) < \frac{e}{8(1+m(Y))}$$

となる. $l+1 \leq i \leq n$ に対しては, $x \in Z$ のとき $h_i(x) = g_i(x)$,
 $x \notin Z$ のとき $h_i(x) = 0$ として h_i を定義する.

3° Z の可測部分集合の無交分族 $\{A_1, \dots, A_p\}$ を適当に
 取ると, h_i ($1 \leq i \leq n$) は A_j の特性函数 d_{A_j} の正值線型結合
 として表わされる:

$$h_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} d_{A_j} \quad (a_{ij} \geq 0, 1 \leq i \leq n).$$

$a_i = 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p a_{ij}$ と置く. $m(A_1), \dots, m(A_p)$ を有
 理数で近似する: 自然数 $r, g_1, \dots, g_p$ が存在し, $\frac{1}{r} \leq \frac{e}{8M}$

$$\text{かつ} \quad \frac{g_j}{r} \leq m(A_j) \leq \frac{g_j}{r} + \frac{e}{8a_i} \quad (1 \leq j \leq p)$$

が成り立つ. $g = g_1 + \dots + g_p$ と書くと,

$$\frac{g}{r} \leq \sum_{j=1}^p m(A_j) \leq m(Z) \leq m(Y).$$

4° 各 A_j から g_j 個の点を取る. $m(A_j) = 0$ なら $g_j = 0$ だし,
 $m(A_j) > 0$ なら (無原子の仮定により) A_j は無限集合だから

これは可能である。これらの点の全体を C_0 ($|C_0| = q$) とし、
 $C = C_0 \cup D$ と置く。 $1 \leq i \leq n$ に対し、

$$\begin{aligned} T_{C,r}(h_i) &= T_{C_0,r}(h_i) + T_{D-C_0,r}(h_i) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^p \sum_{x \in C_0 \cap A_j} h_i(x) + \frac{1}{r} \sum_{x \in D-C_0} h_i(x) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^p a_{ij} g_j + \frac{1}{r} \sum_{x \in D-C_0} h_i(x). \end{aligned}$$

この等式と $P(h_i) = \sum_{j=1}^p a_{ij} m(A_j)$ とを合わせると、

$$\begin{aligned} |T_{C,r}(h_i) - P(h_i)| &\leq \sum_{j=1}^p a_{ij} \left| \frac{g_j}{r} - m(A_j) \right| + \frac{1}{r} \sum_{x \in D-C_0} h_i(x) \\ &\leq \frac{e}{8} + \frac{e}{4}. \end{aligned}$$

5° $1 \leq i \leq q$ に対し、

$$\begin{aligned} 0 &\leq P(f_i) - P(h_i) = (P(f_i) - P(g_i)) + (P(g_i) - P(h_i)) \\ &\leq \frac{e}{8} + \int_Z (g_i - h_i) + \int_Y g_i \leq \frac{e}{8} + 0 + G \cdot \frac{e}{8G} = \frac{e}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{したがって、} \quad 0 &\leq T_{C,r}(f_i) - T_{C,r}(h_i) = \frac{1}{r} \sum_{x \in C_0} (f_i'(x) - h_i(x)) \\ &+ \frac{1}{r} \sum_{x \in D-C_0} (f_i(x) - h_i(x)) \leq \frac{q}{r} \frac{e}{8(1+m(Y))} + \frac{e}{4M} \cdot M \leq \frac{e}{8} + \frac{e}{4}. \end{aligned}$$

したがって、

$$|T_{C,r}(f_i) - P(f_i)| \leq |T_{C,r}(f_i) - T_{C,r}(h_i)| + |T_{C,r}(h_i) - P(h_i)|$$

$$+ |P(h_i) - P(f_i)| \leq \left(\frac{e}{\delta} + \frac{e}{\tau}\right) + \left(\frac{e}{\delta} + \frac{e}{\tau}\right) + \frac{e}{\tau} = e.$$

6° $l+1 \leq i \leq n$ に対しては,

$$\begin{aligned} T_{C,r}(f_i) &\geq T_{C,r}(h_i) \geq P(h_i) - \left(\frac{e}{\delta} + \frac{e}{\tau}\right) > \int_Z g_i - \frac{1}{2} \\ &= \int_Y g_i - \int_{Y-Z} g_i - \frac{1}{2} \geq P(g_i) - G \cdot m(Y-Z) - \frac{1}{2} \\ &\geq 2N - \frac{e}{\delta} - \frac{1}{2} \geq N. \quad \text{証明終.} \end{aligned}$$

3.3. 定理 無原子測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ に対し, X を含む *X の * 有限部分集合 Γ および * 自然数 ρ が存在し, X 上の任意の積分確定な実数値函数 f に対して

$$\int_X f \, dm = {}^*T_{\Gamma, \rho}({}^*f) = \frac{1}{\rho} \sum_{\xi \in \Gamma} {}^*f(\xi)$$

が成り立つ。

証明 補題の記号を踏襲し, さらに X の有限部分集合の全体を $\mathcal{A}(X)$ と書く. $\mathcal{L}$ の変項論理式 $\phi(x, y)$ として

$$x = (f, e, N, a) \in E \times \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{N} \times X \quad \wedge \quad y = (C, r) \in \mathcal{A}(X) \times \mathbb{N}$$

$$\wedge a \in C \wedge [f \in E_E \rightarrow |P(f) - T_{C,r}(f)| \leq e] \wedge [f \in E - E_E \rightarrow T_{C,r}(f) \geq N]$$

を考える. 補題によつて ϕ は有限共起的である. 共起性の原理により, ${}^*\mathcal{U}$ の元 β が存在し, $\mathcal{Q}(\phi)$ の任意の元 x に対して

$\phi(x, \beta)$ が ${}^*\mathcal{U}$ で真となる。すなわち, ${}^*\mathcal{S}({}^*X) \times {}^*\mathcal{N}$ の元 (Π, ρ) が存在し, 論理式 ϕ の = 行目の性質をもつ。 $a, f, e, \mathcal{N}$ は任意だから, $X \subset \Pi$, $f \in E_\Pi$ なら $P(f) \doteq {}^*T_{\Pi, \rho}({}^*f)$, $f \in E - E_\Pi$ なら ${}^*T_{\Pi, \rho}({}^*f) \doteq +\infty = P(f)$ となる。

任意の積分確定な函数 f に対しては, $f = f^+ - f^-$ と分解する。 f^+, f^- は正值可測函数で, 少なくとも一方は可積分である。それぞれに定理を適用して引けばよい。証明終。

3.4. 系 (Henson [2]) 上の定理で m が確率測度ならば, $\rho = {}^*\rho/\gamma$ とし (γ は ρ の濃度) 。

証明 $\gamma = {}^*\rho(\Pi)$ とする。

$$\frac{\gamma}{\rho} = \frac{1}{\rho} {}^*\rho({}^*X \cap \Pi) \doteq m(X) = 1.$$

$${}^*T_{\Pi, \gamma}({}^*f) = \frac{\rho}{\gamma} {}^*T_{\Pi, \rho}({}^*f) \doteq \int f dm \quad (f \in E). \quad \text{証明終.}$$

文 献

- [1] A. R. Bernstein ; A non-standard integration theory for unbounded functions. Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen der Math. 20 (1974) 97-108.
- [2] C. W. Henson ; On the nonstandard representation of measures. Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972) 437-446.

- [3] W. A. J. Luxemburg ; On some concurrent binary relations occurring in analysis. Contributions to non-standard analysis 85 - 100. North-Holland (1972).
- [4] A. Robinson ; On generalized limits and linear functionals. Pacific J. Math. 14 (1964) 269 - 283.
- [5] A. Robinson ; Non-standard analysis. North-Holland (1966) 第2版 (1974).
- [6] 斎藤正彦 ; 超積と超準解析 — リンスタングード・アタリシス — . 東京図書 (1976).
- [7] M. Saito ; On some problems in non-standard functional analysis, to appear.