

球面枠付き曲線と extrinsic flat great circular surface

北海道大学大学院理学院数学専攻 本多 俊一

(Department of Mathematics, Hokkaido University, Shun'ichi HONDA)

1 はじめに

当稿では, [2] によって与えられた 3 次元球面内の特異点を持つ曲線から生成される 4 種類の extrinsic flat great circular surface とその特異点型の特徴付けを紹介する. Extrinsic flat great circular surface は [4] によって導入された $\mathbb{R}^3$ の可展面に対応する概念である. 特異点を持つ曲線としては球面枠付き曲線を考える. 球面枠付き曲線は特異点を持つ曲線と枠の組である.

2 準備

3 次元球面 S^3 を $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ とする. S^3 における内積は $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S^3$ に対して, $\mathbb{R}^4$ の標準内積

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$$

を用いる. 任意の $\mathbf{a}_i = (a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4) \in \mathbb{R}^4$ ($i = 1, 2, 3$) に対して, ベクトル積 $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ を

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}$$

と定義する. ここで, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ は $\mathbb{R}^4$ の標準基底である. $\mathbb{R}^4$ の正規直交 3 枠 (orthonormal 3-frame) とは, $\mathbb{R}^4$ の中の 3 個のベクトルの組 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ であって, 次の条件 (1) (2) をみたすものをいう:

- (1) $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ ($i = 1, 2, 3$),
- (2) $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, 3$).

$\mathbb{R}^4$ の中の直交 3 枠全体のなす集合を $V_{4,3}$ と書く.

定義 2.1 (球面枠付き曲線) 写像 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow V_{4,3}$ が任意の $t \in I$ に対して次の条件 (1) (2) をみたすとき, (γ, ν_1, ν_2) を球面枠付き曲線 (spherical framed curve) という:

$$(1) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_1(t) = 0, \quad (2) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_2(t) = 0.$$

球面枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) に対して, $\mu(t) = \gamma(t) \times \nu_1(t) \times \nu_2(t)$ とすれば, $\{\gamma(t), \nu_1(t), \nu_2(t), \mu(t)\}$ は $\mathbb{R}^4$ の中の正規直交基底をなす.

命題-定義 2.2 (フレネ・セレ型の公式, [2]) 写像 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow V_{4,3}$ を球面枠付き曲線とする。このとき、以下のフレネ・セレ型の公式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\nu}_1(t) \\ \dot{\nu}_2(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha(t) \\ 0 & 0 & \ell(t) & m(t) \\ 0 & -\ell(t) & 0 & n(t) \\ -\alpha(t) & -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}.$$

ここで、 $\alpha(t)$, $\ell(t)$, $m(t)$, $n(t)$ は以下で与えられる I 上の関数である：

$$\alpha(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \mu(t), \ell(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \nu_2(t), m(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \mu(t), n(t) = \dot{\nu}_2(t) \cdot \mu(t).$$

このとき、写像 $(\alpha, \ell, m, n) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ を球面枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) の曲率と呼ぶ。

定義 2.3 (球面枠付き曲線の合同) 2 つの球面枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) と $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$ が合同であるとは、ある回転行列 $A \in SO(4)$ が存在して、任意の $t \in I$ に対して

$$(1) \tilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)), \quad (2) \tilde{\nu}_i(t) = A(\nu_i(t)) \quad (i = 1, 2)$$

をみたすときをいう。

枠付き曲線の存在定理と一意性定理 ([3]) の特別な場合として、以下の存在定理と一意性定理が成り立つ。

定理 2.4 (球面枠付き曲線の存在定理, [2]) 写像 $(\alpha, \ell, m, n) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ に対して、球面枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow V_{4,3}$ で (α, ℓ, m, n) が曲率であるものが存在する。

定理 2.5 (球面枠付き曲線の一意性定理, [2]) 2 つの球面枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) と $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$ に対して、これらの曲率が一致するとする。このとき、 (γ, ν_1, ν_2) と $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$ は合同である。

球面枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow V_{4,3}$ に対して、 $(b_1, b_2) \in \Delta$ を

$$b_1(t) = \cos \theta(t) \nu_1(t) - \sin \theta(t) \nu_2(t), \quad b_2(t) = \sin \theta(t) \nu_1(t) + \cos \theta(t) \nu_2(t)$$

と定義する。ここで、 Δ は $\Delta = \{(v_1, v_2) \in S^3 \times S^3 \mid v_1 \cdot v_2 = 0\}$, $\theta(t)$ は滑らかな関数である。このとき、 $(\gamma, b_1, b_2) : I \rightarrow V_{4,3}$ は再び球面枠付き曲線となり、単位接ベクトルを保つ：

$$\mu_b(t) = \gamma(t) \times b_1(t) \times b_2(t) = \mu(t).$$

$\{\gamma(t), b_1(t), b_2(t), \mu(t)\}$ を $\theta(t)$ に依る回転された枠という。特に、 $\theta(t)$ が条件 $\dot{\theta}(t) = \ell(t)$ を満たすとき、 $\{\gamma(t), b_1(t), b_2(t), \mu(t)\}$ を $\theta(t)$ によるビショップ枠という ([1])。ビショップ枠の取り方は $\gamma(t)$ に対して一意ではなく、積分定数程度の自由度が存在する。ビショップ枠による球面枠付き曲線 (γ, b_1, b_2) は、以下のフレネ・セレ型の公式を持つ：

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \dot{b}_1(t) \\ \dot{b}_2(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha(t) \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{m}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{n}(t) \\ -\alpha(t) & -\tilde{m}(t) & -\tilde{n}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ b_1(t) \\ b_2(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}.$$

ここで、 $\tilde{m}(t)$, $\tilde{n}(t)$ は

$$\tilde{m}(t) = \cos \theta(t) m(t) - \sin \theta(t) n(t), \quad \tilde{n}(t) = \sin \theta(t) m(t) + \cos \theta(t) n(t)$$

である。一方, $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ の仮定の下, $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) \in \Delta$ を

$$\mathbf{n}_1(t) = \frac{n(t)\boldsymbol{\nu}_1(t) - m(t)\boldsymbol{\nu}_2(t)}{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}}, \quad \mathbf{n}_2(t) = \frac{m(t)\boldsymbol{\nu}_1(t) + n(t)\boldsymbol{\nu}_2(t)}{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}}$$

と定義する。このとき, $(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) : I \rightarrow V_{4,3}$ は再び球面枠付き曲線となり, 単位接ベクトルを保つ:

$$\boldsymbol{\mu}_n(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) \times \mathbf{n}_1(t) \times \mathbf{n}_2(t) = \boldsymbol{\mu}(t).$$

$\{\boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{n}_1(t), \mathbf{n}_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ をフレネ型の枠と呼ぶ。フレネ型の枠による球面枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ は, 以下のフレネ・セレ型の公式を持つ:

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \\ \dot{\mathbf{n}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{n}}_2(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha(t) \\ 0 & 0 & \bar{\ell}(t) & 0 \\ 0 & -\bar{\ell}(t) & 0 & \bar{n}(t) \\ -\alpha(t) & 0 & -\bar{n}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}(t) \\ \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{n}_2(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix}.$$

ここで, $\bar{\ell}(t), \bar{n}(t)$ は

$$\bar{\ell}(t) = \ell(t) + \frac{m(t)\dot{n}(t) - \dot{m}(t)n(t)}{m^2(t) + n^2(t)}, \quad \bar{n}(t) = \sqrt{m^2(t) + n^2(t)} \neq 0$$

である。

3 双対曲面と tangent extrinsic flat great circular surface

本節では extrinsic flat great circular surface の具体例として, 球面枠付き曲線から生成される双対曲面と tangent extrinsic flat great circular surface を紹介する。Great circular surface 及び extrinsic flat great circular surface については [4] もしくは本稿の付録を参照のこと。

定義 3.1 (双対曲面) $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \rightarrow V_{4,3}$ を球面枠付き曲線とする。写像 $\mathcal{DS}_{\boldsymbol{\gamma}} : I \times [0, 2\pi) \rightarrow S^3$ を

$$\mathcal{DS}_{\boldsymbol{\gamma}}(t, \theta) = \cos \theta \boldsymbol{\nu}_1(t) + \sin \theta \boldsymbol{\nu}_2(t)$$

と定義する。このとき, $\mathcal{DS}_{\boldsymbol{\gamma}}$ を $\boldsymbol{\gamma}$ の双対曲面 (dual surface) と呼ぶ。

$\mathcal{DS}_{\boldsymbol{\gamma}}$ は $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, -\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}_2) : I \rightarrow SO(4)$ による great circular surface である。このとき, 以下の関係式が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\nu}}_1(t) \\ -\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha(t) & 0 \\ 0 & 0 & -m(t) & \ell(t) \\ \alpha(t) & m(t) & 0 & n(t) \\ 0 & -\ell(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}(t) \\ \boldsymbol{\nu}_1(t) \\ -\boldsymbol{\mu}(t) \\ \boldsymbol{\nu}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Extrinsic flat である条件式 (1) より, $\mathcal{DS}_{\boldsymbol{\gamma}}$ は extrinsic flat great circular surface である。

注意 3.2 Non-cyclic である条件式 (2) より, $\mathcal{DS}_{\boldsymbol{\gamma}}$ が non-cyclic であるための必要十分条件は $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ が成り立つことである。定義 3.1 より, $\mathcal{DS}_{\boldsymbol{\gamma}}$ の像は $\{\boldsymbol{\nu}_1(t), \boldsymbol{\nu}_2(t)\}$ の回転に依らないので, non-cyclic な双対曲面を調べるときにはフレネ型の枠が有用である。

以下, $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ を仮定し, フレネ型の枠 $\{\boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{n}_1(t), \mathbf{n}_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を考える。計算により, $\mathcal{DS}_{\boldsymbol{\gamma}}$ の特異点が $(t, 0)$ と (t, π) であり, 特異値が $\pm \mathbf{n}_1(t)$ であることがわかる。

命題 3.3 ([2]) $(\pm \mathbf{n}_1, \gamma, \mu) : I \rightarrow V_{4,3}$ は球面枠付き曲線である。

命題 3.3 より, $\pm \mathbf{n}_1(t)$ の双対曲面は以下で与えられる：

$$\mathcal{F}_T(t, \theta) = D\mathcal{S}_{\mathbf{n}_1}(t, \theta) = \cos \theta \gamma(t) + \sin \theta \mu(t).$$

このとき, $\mathcal{F}_T$ を *tangent extrinsic flat great circular surface* と呼ぶ. $\mathcal{F}_T$ は [4] における tangent extrinsic flat great circular surface の一般化である. Δ -双対性 ([4]) より, 以下のダイアグラムが成り立つ：

$$\begin{array}{ccc} D\mathcal{S}_{\gamma} & \xrightarrow{\text{taking singular value}} & \pm \mathbf{n}_1 \\ \Delta\text{-dual} \uparrow & & \downarrow \Delta\text{-dual} \\ (\pm)\gamma & \xleftarrow{\text{taking singular value}} & \mathcal{F}_T \end{array}$$

[4] における extrinsic flat great circular surface の特異点型の判定法を利用することにより, 以下の命題を得る：

命題 3.4 ([2]) (t_0, θ_0) を $D\mathcal{S}_{\gamma}$ の特異点とする. このとき, 以下が成り立つ：

- (i) $D\mathcal{S}_{\gamma}$ が (t_0, θ_0) においてカスプ状曲面 **ce** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\alpha(t_0)\bar{\ell}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.
- (ii) $D\mathcal{S}_{\gamma}$ が (t_0, θ_0) においてツバメの尾 **sw** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\bar{\ell}(t_0) = 0$ 及び $\alpha(t_0)\dot{\bar{\ell}}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.
- (iii) $D\mathcal{S}_{\gamma}$ が (t_0, θ_0) においてカスプ状交叉帽子 **cc** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\alpha(t_0) = 0$ 及び $\dot{\alpha}(t_0)\bar{\ell}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.

ここで, カスプ状曲面 **ce** は $\mathbf{ce}(u, v) = (u, v^2, v^3)$, ツバメの尾 **sw** は $\mathbf{sw}(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$, カスプ状交叉帽子 **cc** は $\mathbf{cc}(u, v) = (u, uv^3, v^2)$ である.

命題 3.5 ([2]) (t_0, θ_0) を $\mathcal{F}_T$ の特異点とする. このとき, 以下が成り立つ：

- (i) $\mathcal{F}_T$ が (t_0, θ_0) においてカスプ状曲面 **ce** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\alpha(t_0)\bar{\ell}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.
- (ii) $\mathcal{F}_T$ が (t_0, θ_0) においてツバメの尾 **sw** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\alpha(t_0) = 0$ 及び $\dot{\alpha}(t_0)\bar{\ell}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.
- (iii) $\mathcal{F}_T$ が (t_0, θ_0) においてカスプ状交叉帽子 **cc** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\bar{\ell}(t_0) = 0$ 及び $\alpha(t_0)\dot{\bar{\ell}}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.

注意 3.6 正則曲線 $\gamma : I \rightarrow S^3$ に対して, 命題 3.4(iii) 及び 3.5-(ii) の状況は起きない.

4 焦曲面と縮閉線

本節では, 球面枠付き曲線の焦曲面, 縮閉線及び縮閉線の双対曲面を紹介する. 以降, フレネ型の枠による球面枠付き曲線 $(\gamma, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) : I \rightarrow V_{4,3}$ に対して, $\bar{\ell}(t) \neq 0$ を仮定する. このとき, 以下の命題が成り立つ：

命題 4.1 ([2]) $(\mu, \zeta, \mathbf{n}_1) : I \rightarrow V_{4,3}$ は球面枠付き曲線である。ここで、 $\zeta(t)$ は

$$\zeta(t) = \frac{\bar{n}(t)\gamma(t) - \alpha(t)\mathbf{n}_2(t)}{\sqrt{\alpha^2(t) + \bar{n}^2(t)}}$$

である。

注意 4.2 $\mu(t)$ は正則球面曲線である。

定義 4.3 写像 $FS_\gamma : I \times [0, 2\pi) \rightarrow S^3$ を

$$FS_\gamma(t, \theta) = DS_\mu(t, \theta) = \cos \theta \zeta(t) + \sin \theta \mathbf{n}_1(t)$$

と定義する。このとき、 FS_γ を γ の焦曲面 (focal surface) と呼ぶ。

計算により、 (t_0, θ_0) が FS_γ の特異点であるための必要十分条件は

$$\frac{\alpha(t_0)\dot{\bar{n}}(t_0) - \dot{\alpha}(t_0)\bar{n}(t_0)}{\sqrt{\alpha^2(t_0) + \bar{n}^2(t_0)}} \cos \theta_0 + \bar{\ell}(t_0)\bar{n}(t_0) \sin \theta_0 = 0$$

が成り立つことである。よって、 FS_γ の特異値は

$$\mathcal{E}_\gamma^\pm(t) = \frac{\pm \bar{\ell}(t)\bar{n}^2(t)\gamma(t) \mp (\alpha(t)\dot{\bar{n}}(t) - \dot{\alpha}(t)\bar{n}(t)) \mathbf{n}_1(t) \mp \alpha(t)\bar{\ell}(t)\bar{n}(t)\mathbf{n}_2(t)}{\sqrt{\bar{\ell}^2(t)\bar{n}^4(t) + (\alpha(t)\dot{\bar{n}}(t) - \dot{\alpha}(t)\bar{n}(t))^2 + \alpha^2(t)\bar{\ell}^2(t)\bar{n}^2(t)}}$$

で与えられる。 $\mathcal{E}_\gamma^\pm$ を γ の縮閉線 (evolute) と呼ぶ。

命題 4.4 ([2]) $(\mathcal{E}_\gamma^\pm, \eta, \mu) : I \rightarrow V_{4,3}$ は球面枠付き曲線である。ここで、 $\eta(t)$ は

$$\eta(t) = \frac{\alpha(t)\gamma(t) + \bar{n}(t)\mathbf{n}_2(t)}{\sqrt{\alpha^2(t) + \bar{n}^2(t)}}$$

である。

命題 4.4 より、 $\mathcal{E}_\gamma^\pm(t)$ の双対曲面は以下で与えられる：

$$DS_{\mathcal{E}_\gamma^\pm}(t, \theta) = \cos \theta \eta(t) + \sin \theta \mu(t).$$

筆者の知る限りでは、 $\mathbb{R}^3$ において $DS_{\mathcal{E}_\gamma^\pm}$ に対応する概念はなく、球面幾何学ならでは対象であると言える。 Δ -双対性より、以下のダイアグラムが成り立つ：

$$\begin{array}{ccc} FS_\gamma & \xrightarrow{\text{taking singular value}} & \mathcal{E}_\gamma^\pm \\ \Delta\text{-dual} \uparrow & & \downarrow \Delta\text{dual} \\ (\pm)\mu & \xleftarrow{\text{taking singular value}} & DS_{\mathcal{E}_\gamma^\pm} \end{array}$$

関数 $\theta(t), \sigma(t)$ を

$$\theta(t) = \arctan \left(\frac{\alpha(t)\dot{\bar{n}}(t) - \dot{\alpha}(t)\bar{n}(t)}{\bar{\ell}(t)\bar{n}(t)\sqrt{\alpha^2(t) + \bar{n}^2(t)}} \right) \text{ and } \sigma(t) = - \left(\frac{\alpha(t)\bar{\ell}(t)}{\sqrt{\alpha^2(t) + \bar{n}^2(t)}} + \dot{\theta}(t) \right)$$

と定義する。このとき、以下の定理が成り立つ：

定理 4.5 ([2]) (t_0, θ_0) を FS_γ の特異点とする。このとき、以下が成り立つ：

- (i) FS_γ が (t_0, θ_0) においてカスプ状曲面 **ce** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\sigma(t_0) \neq 0$ が成り立つことである。
- (ii) FS_γ が (t_0, θ_0) においてツバメの尾 **sw** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\sigma(t_0) = 0$ 及び $\dot{\sigma}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである。
- (iii) カスプ状交叉帽子は現れない。

定理 4.6 ([2]) (t_0, θ_0) を $DS_{\mathcal{E}_\gamma^\pm}$ の特異点とする。このとき、以下が成り立つ：

- (i) $DS_{\mathcal{E}_\gamma^\pm}$ が (t_0, θ_0) においてカスプ状曲面 **ce** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\sigma(t_0) \neq 0$ が成り立つことである。
- (ii) $DS_{\mathcal{E}_\gamma^\pm}$ が (t_0, θ_0) においてカスプ状交叉帽子 **cc** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\sigma(t_0) = 0$ 及び $\dot{\sigma}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである。
- (iii) ツバメの尾は現れない。

ビショップ枠 $\{\gamma(t), b_1(t), b_2(t), \mu(t)\}$ に対して、 $\gamma(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ は全て共通の接ベクトル $\mu_b(t)$ を持つので、以下が成り立つ：

命題 4.7 ビショップ枠 $\{\gamma(t), b_1(t), b_2(t), \mu(t)\}$ に対して以下が成り立つ：

- (i) $FS_\gamma(t, \theta) = FS_{b_1}(t, \theta) = FS_{b_2}(t, \theta)$,
- (ii) $\mathcal{E}_\gamma(t) = \mathcal{E}_{b_1}(t) = \mathcal{E}_{b_2}(t)$.

付録 Extrinsic flat great circular surface

本付録で [4] による great circular surface と extrinsic flat great circular surface の要点をまとめる。 $(a_0, a_1, a_2, a_3) : I \rightarrow SO(4)$ を C^∞ -級写像とする。このとき、以下の関係式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_0(t) \\ \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \dot{a}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \\ -c_1(t) & 0 & c_4(t) & c_5(t) \\ -c_2(t) & -c_4(t) & 0 & c_6(t) \\ -c_3(t) & -c_5(t) & -c_6(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}.$$

ここで、 $c_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) は

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \dot{a}_0(t) \cdot a_1(t) = -a_0(t) \cdot \dot{a}_1(t), & c_2(t) &= \dot{a}_0(t) \cdot a_2(t) = -a_0(t) \cdot \dot{a}_2(t), \\ c_3(t) &= \dot{a}_0(t) \cdot a_3(t) = -a_0(t) \cdot \dot{a}_3(t), & c_4(t) &= \dot{a}_1(t) \cdot a_2(t) = -a_1(t) \cdot \dot{a}_2(t), \\ c_5(t) &= \dot{a}_1(t) \cdot a_3(t) = -a_1(t) \cdot \dot{a}_3(t), & c_6(t) &= \dot{a}_2(t) \cdot a_3(t) = -a_2(t) \cdot \dot{a}_3(t) \end{aligned}$$

である。写像 $F_A : I \times [0, 2\pi) \rightarrow S^3$ を

$$F_A(t, \theta) = \cos \theta a_1(t) + \sin \theta a_3(t).$$

とする。このとき、 F_A を *great circular surface*, a_1 を *base curve*, a_3 を *directrix* と呼ぶ。また、ある $t_0 \in I$ に対して与えられる大円 $\cos \theta a_1(t_0) + \sin \theta a_3(t_0)$ を *generating great circle* と呼ぶ。 F_A の extrinsic Gaussian curvature が恒等的に零であるとき、 F_A を *extrinsic flat great*

circular surface もしくは *E-flat great circular surface* と呼ぶ。 $F_A(t, \theta)$ が E-flat であるための必要十分条件は

$$c_1(t)c_6(t) + c_3(t)c_4(t) = 0 \quad (1)$$

が成り立つことである。

F_A が任意の $t \in I$ に対して

$$(c_1(t), c_3(t), c_4(t), c_6(t)) \neq (0, 0, 0, 0) \quad (2)$$

をみたすとき, F_A は *non-cyclic* であるという。

参考文献

- [1] R. L. Bishop, There is more than one way to frame a curve, *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), 246-251.
- [2] S. Honda, Spherical framed curves and extrinsic flat great circular surfaces, preprint (2017).
- [3] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, *Adv. Geom.* **16** (2016), no. 3, 265-276.
- [4] S. Izumiya, T. Nagai and K. Saji, Great circular surfaces in the three-sphere, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), no. 3, 409-425.