

関孝和の代数方程式論 Seki Takakazu's theory on algebraic equations

小川 東
Tsukane Ogawa *

Abstract

Seki Takakazu (?-1708) has long been known as one of the founders of mathematics in Pre-modern Japan. His personal profile, documentary legacy, and view of mathematics have been studied by numerous scholars in numerous papers. Here, I confirm that his primary interest was in the theory of algebraic equations, a topic on which he left several manuscripts. He was the first person to grasp equations systematically and abstractly as mathematical objects per se. His theory was based on the “side writing” system that he developed to solve the problems set in Sawaguchi Kazuyuki's *Mathematical Method Old and New* (*Kokon Sanpouki*, 1671). It has previously been pointed out that this side writing system allowed problems to be resolved into simultaneous equations of differing degrees (simple, quadratic, etc.) which led immediately to elimination theory as a new subject of study.

Seki's theory on algebraic equations has two aspects. One is still of mathematical interest today while the other belongs more to the historical context. I discuss the former quickly and the latter in rather more detail, referring to a problem treated in Seki's *Method for Restoring Defective Problems* (*Byoudai Meichi*).

§ 1. はじめに

関孝和（？～1708年）は近世日本数学の確立者として名高く，すでにその業績も列挙されてきた（[1][14][15][16]¹）．しかし「近世日本数学の確立者」というときの内実，その根拠は何なのか，という点に関しては必ずしも十分な議論がなされているとはいえない．傍書法を発明したとか，関に帰される業績全体をもって漠然とそう考えられてきただけではなかろうか．近世日本数学史における関の業績の本質は何かという問題はもう一度考察する価値がある．

Received February 14, 2020, Revised February 24, 2020.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 01A27, 01A45, 01A50, 01A55

Key Words: History of Japanese Mathematics, Seki Takakazu

Supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP19K03609

*四日市大学 Yokkaichi University, 1200 Kayo, Yokkaichi, 512-8512 JAPAN

email: ogawa@yokkaichi-u.ac.jp

¹列挙された文献はごく一部に過ぎない．以下同様である．

本稿では近世日本数学の確立者としての関の第一の意義がその方程式論にあることを改めて確認するものである．関は近世日本において方程式そのものを抽象的に考察する必要性，重要性を認識した初めての数学者であった²．

まず第2節では関孝和以前の数学のあり方，成り行きを方程式に焦点を当てて概観する．それによって関の意義を明確に理解できる．第3節で関の方程式論の特徴を明かにする．ここでは関が方程式論という現代にも通じる数学思想を保持していたことに加えて，特に同時代の数学からの要請を受けて発展させた「分術」と呼ばれる特殊な理論について考察する．分術は数学史上の意義はもちろん持つが，現代数学の立場から見るとその意義を見出しにくく，また理論上完備したものでもないため，現在でも理解できない点もある．第4節では関以降の数学の発展を概観して関の意義を改めて考察する．

§ 2. 関孝和以前

関孝和以前の数学は『算学啓蒙』（元・朱世傑，1299）『算法統宗』（明・程大位，1592）などによって中国の方法（珠算，天元術と開方術）の導入と模倣によって，それまでのいわゆる算数から数学へ飛躍した時代ということができる．その発展を支えたのが「遺題」の継承である．遺題とは文字通り本の著者が読者に対して解答なしに提出した問題のことである．そしてこの提出された問題を解いた者が改めて新しい問題を遺題として提出することで遺題の継承が確立した．遺題の継承によって近世日本の数学文化は花開き，ひいては一般の人々も数学を楽しむという，世界にも稀な文化現象が生じた．その痕跡はおよそ900面の算額が現存している点に見ることができる．遺題あるいは算額において提出された多くの問題が平面図形における求長問題であったことが数学の普及を推進した一因であった．遺題の継承はその一方で問題の急速な難問化をうながした．それは自らが解けない問題であっても遺題として提出できたからである．

問題の難問化は方程式の高次化という形で端的に現れる．以下ごく簡単に推移を確認しておく．

まず吉田光由『塵劫記』（1627）には15128の平方根および1728の3乗根を求める問題があり，そろばんを並べて求める計算法が述べられている．これは2次方程式および3次方程式の問題であるが，一般的な方程式の問題とは捉えられておらず，個別の開平計算法，開立計算法として意識されていた．吉田の『新編塵劫記』（1641）は遺題継承の発端となった書である．

今村知商『豎亥録』（1639）「帯縦開平」には

作歩於仮令自横至縦長一尺五寸，而以知縦横之尺数式也．

とあり，横が1522.756寸のときの縦横を解いている．これは $x(x+15)=1522.756$ を解く問題である．また，3次方程式 $x^2(x+30)=188000$ に還元される問題も与えられ（近似）解を次のように求めている．まず初商を40として

$$188000 - (40^3 + 30 \cdot 40^2) = 76000$$

²あるいは東アジアにおいても実質的にそうだったのかも知れないが，その問題について本稿では触れない．

とし、次商を 8 として

$$76000 - \{(3 \cdot 40^2 + 30 \cdot 2 \cdot 40) \cdot 8 + 3 \cdot 40 \cdot 8^2 + 30 \cdot 8^2 + 8^3\} = 8288$$

より (近似) 解 $x = 48$ を得る. これは原理としては次のようになろう. 初商を a , 余りを b とすると, $x = a + b$ であるから

$$(2.1) \quad (a + b)^3 + 30(a + b)^2 = a^3 + 30a^2 + (3a^2 + 30 \cdot 2a)b + (3a + 30)b^2 + b^3 = 188000$$

が成り立つ. (2.1) と与方程式より

$$(2.2) \quad (3a^2 + 30 \cdot 2a)b + (3a + 30)b^2 + b^3 = 188000 - (a^3 + 30a^2)$$

である. (2.2) で $a = 40$ とすると

$$(2.3) \quad (3 \cdot 40^2 + 30 \cdot 2 \cdot 40)b + (3 \cdot 40 + 30)b^2 + b^3 = 76000$$

となる. (2.3) の左辺において $b = 8$ とおくと

$$(3 \cdot 40^2 + 30 \cdot 2 \cdot 40)8 + (3 \cdot 40 + 30)8^2 + 8^3 = 67712$$

より

$$\begin{aligned} 188000 &= (40^3 + 30 \cdot 40^2) + 76000 \\ &= (40^3 + 30 \cdot 40^2) + \{(3 \cdot 40^2 + 30 \cdot 2 \cdot 40)8 + (3 \cdot 40 + 30)8^2 + 8^3\} + 8288 \\ &= (40 + 8)^3 + 30(40 + 8)^2 + 8288 \end{aligned}$$

を得る. そこで $x = 48$ で余り 8288 とする³. このように『豎亥録』には 3 次方程式を解く問題が現れるが, その解法は伝来した開方術による解法⁴とは著しく異なっている.

ところで, 百川治兵衛『諸勘分物』(1622) 末尾には『豎亥録』と同様の問題が数値を替えて書き込まれている⁵.

間積百九拾貳歩有り. 是ヲ縦より横八四間短シ. 縦横幾何と問.

これは 2 次方程式 $x(x + 4) = 192$ を解く問題であるが, ここでは図 1 のような幾何学的図形を用いる解法が与えられている. この解法は『算学啓蒙』から伝来したものと考えられるが, いつの書き込みかは不明である. 建部賢弘の『算学啓蒙諺解大成』や『綴術算経』(1722) においても取り上げられており, 近世を通じて簡便な方法として人口に膾炙した.

この他に山田正重『改算記』(1659), 磯村吉徳『算法闕疑抄』(1659) も同様の方法で 2 次, 3 次の方程式を解いている. このように比較的早くから 2 次方程式, 3 次方程式が

³この方法は 2 次方程式の場合にも適用できる.

⁴組立除法を繰り返す, いわゆるホーナー法. 正確にはホールドレッド法というべきであろう. ただし「開方術」と呼ばれる方法にも微細な点で異なるものが種々ある.

⁵東北大学岡本写 1069. 末尾に「大正六年七月佐渡伊東勉二氏所蔵巻物ヲ影写す」とある.

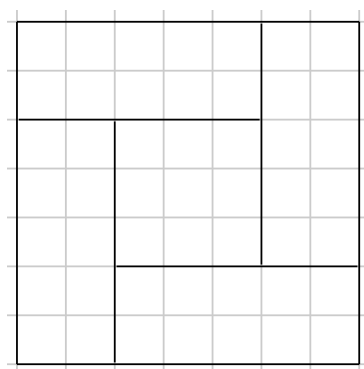


図 1. 連立方程式解法のための図形

現れるが、これらの解法は平方根、立方根を求める方法から類推されたものかも知れない。ちなみに磯村の『算法闕疑抄』は吉田が『新編塵劫記』で提出した遺題を解いたものである。

日本においては初めて円周率を 3.14 とした村松茂清の『算俎』(1663)では種々の 2 次方程式が扱われている。3 次方程式は現れないが、注目すべきことは方程式を立てるとき、中国伝来の「天元の一」という用語が用いられているが、一般の 2 次方程式に帰着される「句股弦」などでは用いられていないことから、正しく理解はされていなかったと思われる。

4 次の方程式が現れるのは佐藤正興『算法根源記』(1669)である。本書上巻第 58 問、59 問の術に「三乗ノ翻法二之ヲ開」とあるのがそれである。同時にこれらの術には「天元ノ法六十二二五九二ヲ負隅二立」(第 58 問)、「天元ノ法二十七二分ヲ負隅二立」(第 59 問)という文も見える。佐藤は「天元ノ一」を最高次の係数と考えているのである([15])⁶。『算法根源記』は『算法闕疑抄』、野沢定長の『童介抄』(1664)両書の遺題に答えたものである⁷。このように 1660 年代は天元術の受容が次第に進んだ過渡期である。しかし『算法根源記』においても「天元の一」そのものの意味は正しく理解できていなかった。

すでに指摘されているように天元術を正しく運用して方程式を立て、開方術によって解を求めることを述べたのは澤口一之『古今算法記』(1671)である。本書は日用算からはじまり珠算、算木計算へと当時の数学が整った構成、形式のもとにまとめられている。本書は『算法根源記』に答えた書もあり、遺題も提出している。関孝和がその遺題を解いて『発微算法』を刊行したのは、『古今算法記』全 7 巻によって当時の数学全般のありようを理解した上で、その遺題に新しい数学の発展の可能性を見出したのかも知れない。1673 年には前田憲舒がやはり『算法根源記』の遺題を解いた上で遺題を提出しているが、関はこれには解答を与えていない。関が他の書物ではなくまさにこの『古今算法記』の遺題を解いたのは、それが難問だったということに加えて、そこに解く意義を見出したからである。そしてその関の解答が近世日本の数学の発展に大きな貢献をしたことを考えると、近

⁶このような「天元ノ一」の用い方は他の問題にも現れる。

⁷『童介抄』は『算法闕疑抄』に答えた書でもある。

世日本数学史おける『古今算法記』の意義は大きい。

§ 3. 関孝和の時代

§ 3.1. 一般論

関孝和は『発微算法』(1674)によって近世日本数学史に登場した。関が『発微算法』で解いた『古今算法記』の遺題 15 問はすべて連立高次方程式を解く問題であり、それまでの一変数多項式の表現方法では解答することは不可能といってよい。関は伝来した天元術の表記法に未知数を傍書することによって連立高次方程式を表現した⁸。そのように問題を連立方程式に帰着した時点でただちに課題となったのは未知数の消去である。関にとって未知数消去の方法、理論の展開は喫緊の課題であった。『発微算法』において関は問題の特性を生かした方法のほかいくつかの方法を試みている(詳細は[2][19])。関による傍書法とそれを用いた未知数消去法はその後の近世日本の数学に大きな影響を与えた。関の傍書法はわずかの例外的表記を除いてそのまま近世の終わりまで踏襲されたし、未知数消去の方法は行列式の展開公式を用いるものを除いて関以上の理論は展開されなかったのであるから、『発微算法』はまさにエポック・メイキングな書物であった。関が生前刊行した唯一の書が『発微算法』であったことは、まさに関の慧眼を象徴する出来事であった。ところで『発微算法』に記載されたのは数値解ではなく、未知数を消去したあとの漢文で書かれた一変数の高次方程式のみである。得られた方程式の次数は 6 次, 9 次, 10 次, 16 次, 18 次, 27 次, 52 次, 54 次, 72 次, 108 次, 1458 次であるから、これを実際に解くことは 10 次まではあるいは可能かも知れないが、高次のものは長時間を要し、実際には不可能である⁹。しかし、関は数値解を得ることを断念したというよりは、開方術によって高次であっても理論的には解けると確信していたと考えるべきであろう。『発微算法』の刊行された時点ですでに組立除法を繰り返す開方術が浸透していたと思われる。

当時誰がどの程度、関に師事したのかは不明な点も多いが、その中で最も優れていたのは建部賢弘、建部賢明の兄弟である。彼らはもうひとりの兄弟、建部賢之とともに関の計算の解説をし、『発微算法演段諺解』(1685)を刊行した。本書によって関の傍書術は公開されたのである¹⁰。宮城清行門下の持永豊次と大橋宅清は『改算記綱目』(1687)の序に

予が師清行先生曰く、今時の算書を見るに邪正雑術多くして難好を解の真術式を顕せる人鮮し。惟関氏孝和の編る所の発微算法演段諺解に平方冪に三位相消あり、また立方冪に十位相消あり。誠に如斯の術式深く味之孝和之新意の妙旨至れるを知るべし

⁸算木表現に文字を傍書すること自体は『算学啓蒙』にも見られるが、『算学啓蒙』では 3 元一次連立方程式の表現に用いらただけで、いわゆる整式の計算などは行われていない。関が『算学啓蒙』のこの傍書表現から示唆を得た可能性は十分にある。

⁹最後の 1458 次の方程式に関しては、関は未知数を一つ消去するたびに次数がどのくらい高くなるかを計算し、最終的に 1458 次になるとだけ述べている。

¹⁰厳密に言えば関の傍書法がその通りだったかはわからないが、その通りか、あるいはそれに近いと考えるのは自然である。

とあるから、建部兄弟が公開した関の傍書法と計算法は公開後ただちに受容されたことがわかる。

さて、方程式に関する関の研究成果は『大成算経』に収録されている（『大成算経』について多くの研究が発表され（[3] [10] [20]）、英訳も進められている（[5] [17]、[20] [21]））。『大成算経』は関孝和、建部賢弘、賢明による著作となっているが、誰が主導したのかは明確ではない。仮に建部兄弟に促されて関が原稿を用意したと考えるならば、関孝和著として残されている写本類は『大成算経』の原稿ということになる（[6]）。それらの内、整式や方程式論に関するものとしては次のものがある。

1. 『解隠題之法』
2. 『解伏題之法』
3. 『開方翻變之法』
4. 『病題明致之法』

『解隠題之法』は多項式の加減乗除、方程式の数値解を求めるアルゴリズムなど基本的な計算法を述べたものである（[6] [11] [19]）。冒頭の「天元一」の概念、すなわちそれが何を意味しているのかは明示されていないが、その後の処理そのものは現代と同じである。『解伏題之法』は「行列式」を述べたものとして夙に有名である（[4] [11]、[12] [13] [18]¹¹）。厳密に言えば、関自身は行列式の概念は持たず、いわゆる斜乗を示すテンプレートを何回か適用して未知数を消去しようとしたのである。2次、3次の場合は1回の適用で済むから行列式の斜乗そのものである。4次の場合は3回適用して正しく消去できることから、関は5次以上の場合も適用できると帰納的に推論したのである。

『開方翻變之法』は方程式を論じたもので、第1章開出商数、第2章驗商有無、第3章適尽諸級、第4章諸級替数、第5章視商極数の全5章からなる（[7] [8]に詳細な解説、検討がある）。その内容は画期的なものである。

第1章開出商数では方程式を

1. 全商式（解を一つだけもつ方程式）
2. 変商式（解が2個以上で、すべてが正またはすべてが負である方程式）
3. 交商式（正負の解を持つ方程式）
4. 無商式（解を持たない方程式）

に分類する。また解をすべて求める方法や無商式の次数は必ず偶数であることなどを述べる。第1章開出商数における方程式の分類は画期的であった。というのも、この分類は関が方程式そのものを数学研究の対象としたことを示しているからである。それまで方程式は解を求めるための単なる道具にすぎなかったが、関は方程式を本格的に研究対象にした日本で最初の数学者であった。第2章の驗商有無では正の解、負の解を判定する方法を述べる。第3章の適尽諸級は方程式の判別式を論じたもので、4次までの判別式が述べられる。第4章諸級替数では正の解を持たない方程式の係数を変更して正の解を持つように

¹¹2000年代になって多くの著者によって『解伏題之法』の数学的分析が進み、現在では一段落しているように見受けられる。

することが述べられる．この種の問題はすでに澤口一之の『古今算法記』に，ふたつの異なる正の解を持つ方程式（翻狂）から係数を変更して一つの正の解を持つようにする問題として扱われている．しかし関ほどには体系的ではなく，澤口は関の研究への道を備えたというべきであろう．第5章視商極数は今日の導関数にあたる多項式が導かれてその零点が問題とされる．各章とも詳しく議論する価値があるが，ここでは触れない．

§ 3.2. 特殊な理論

関は現代においても自然に思われる問題だけでなく，時代の要請に応じた歴史的ともいえる問題についても考察している．それは「病題」である『開方翻變之法』第4章諸級替数はその問題の一部をなすものである．そこでは『古今算法記』における翻狂だけが考察の対象であったが、『題術辨議之法』第1章病題において関は誤った問題（病題）を3つに分類している．すなわち，

1. 条件が不足した問題（転題）
2. 解がなかったり負になったりして題意を満たさない問題（虚題）
3. 条件が過剰な問題（繁題）

である．ちなみに第2章邪術は誤った解法の分類で，

1. 題意より得られた方程式の解が正答以外の解を含むもの（重術）
2. 問題の特殊性に基づいた解法で，数値が変わると解けないもの（滞術）
3. 答だけが正しく理論が誤っているもの（攀術）
4. 題意より得られる方程式が恒等式となってしまうもの（戻術）

となっている．また最終第3章権術は誤りではないが望ましくない解答を

1. 結果だけが述べられていて途中経過が述べられていない解答（塞）
2. 求めるべきものを後回しにしている解法（断）
3. 問題中の数値を近似値に変えた解法（疎）
4. 逐次近似してゆく解法（碎）

と分類している．4番目の碎に分類される近似解法は真の答えとは誤差があるから権術なのである．以上のように『題術辨議之法』は問題論，出題論，解法論というべきものである．

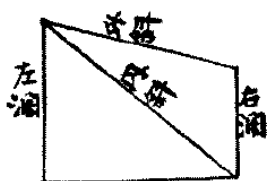
関は『開方翻變之法』第4章諸級替数に関連して『病題明致之法』で病題を訂正する方法を述べる．今日の視点から視ると本書は歴史的な意義を持つ特殊な理論であるが，もちろん関にとっては考察に値すべき問題であった．『病題明致之法』は第1章題辞添削，第2章虚題増損，第3章変題定究からなる．第1章では不足している条件追加することが述べられ，第2章では方程式の解がない場合，解があっても題意を満たさない場合の変更方法が述べられる．ここでは問題の方程式が無商式の場合，負商式の場合，図意に反する商が得られる場合を区別して述べられる．第3章では題意を満たす解が複数ある場合，解を唯一にする方法が，条件を追加する「加辞」，数値を変更する「易数」にわけて述べられる．

以下，第3章変題定究，加辞の第1問（通し番号11問）について考察する．まず原文を読み下しておく¹²．

加辞

加辞は分術によって式を得る．商名を傍書して，開出商数の法の如く実を尽くして変式を得る．変商の件数に随って変式の方級より逐って下り辞を加える．

仮如，半梯有り．外斜一尺六寸，内斜一尺九寸．只云う，左右の濶の和一尺八寸．右の濶を問う．



右の濶を得る術．題数を用いて開方の式 $[-105, 36, -3]$ を得る．これを開きて

$$\text{右の濶} \begin{cases} \text{初七寸} \\ \text{後五寸} \end{cases}, \text{左の濶} \begin{cases} \text{初一尺一寸} \\ \text{後一尺三寸} \end{cases}$$

を得る．

分術に曰く，天元の一を立て右の濶と為す． $[0, 1]$ ．以て只云ふ数を減じて，余りを左の濶と為す． $\left[\begin{cases} 1 \text{ 右} \\ 1 \text{ 左} \end{cases}, -1 \right]$ ．これを自して，以て内斜の冪を減じて，余りを長冪と為す $\left[\begin{cases} 1 \text{ 長巾} \\ -1 \text{ 右巾} \\ -2 \text{ 右左} \end{cases}, \begin{cases} 2 \text{ 右} \\ 2 \text{ 左} \end{cases}, -1 \right]$ ．左に寄す．左の濶を列し，内右の濶を減じて，余り $\left[\begin{cases} 1 \text{ 右} \\ 1 \text{ 左} \end{cases}, -2 \right]$ ．これを自して得る数，以て外斜冪を減じて，余りを又た長冪と為す． $\left[\begin{cases} 1 \text{ 長巾} \\ -4 \text{ 右左} \end{cases}, \begin{cases} 4 \text{ 右} \\ 4 \text{ 左} \end{cases}, -4 \right]$ ．左に寄せたると相消して式 $\left[\begin{cases} 1 \text{ 右巾} \\ -2 \text{ 右左} \end{cases}, \begin{cases} 2 \text{ 右} \\ 2 \text{ 左} \end{cases}, -3 \right]$ を得る．商名を傍書して開出商数の法の如く実を尽くして，変式 $\left[0, \begin{cases} -3 \text{ 右} \\ 2 \text{ 左} \end{cases}, -3 \right]$ を得る．変商是一件．故に変式の方級において正負に依りて（乃二を以てこれを遍約す）辞を加う．

初めの商を答の数と為すは，則ち辞を加へて云う，左の濶は倍の右の濶より少なしと．

¹²算木による式はブラケットで囲み，算木による数字はアラビア数字で表記にする．

後の商を答の数と為すは、則ち辞を加へて云う、左の濶は倍の右の濶より多しと。

冒頭に書かれているのは「加辞」の概要である。「加辞は分術によって式を得る」とは解が複数得られた場合「分術によって式を得て、それによって条件を追加（加辞）する」という意味である。今、解の一つを x_0 とする。これ以外の解を除去する条件を求めるために（変数を変えた）方程式を求める方法がここで述べられる分術である。すなわち任意の解（未知数）を X として、 $Y = X - x_0$ とおき、以下で具体例で説明されるように組み立て除法を繰り返し適用して Y の方程式 $g(Y) = f(Y + x_0) = 0$ に変換する。これを「変式」という（「開出商数の法の如く実を尽くして変式を得る」）。 $X = x_0$ とすると $Y = 0$ であるから $g(Y)$ の定数項は 0 である。そこで $G(Y) = Yg_1(Y)$ として $g_1(Y) = 0$ の解が題意を満たさないように、解の個数によって 1 次の係数から昇順に条件を加える（「変商の件数に随って変式の方級より逐って下り辞を加える」）。本書の説明が分かりにくいのは、最初の方程式が中国伝統数学以来の記法で未知数を表さずに係数のみを記していることと、方程式の解の一つを x_0 などと記す記法がなかったことによる。

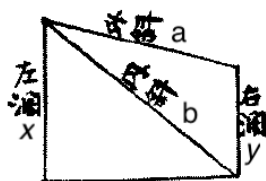
さて、加辞の例題として提示されている問題は次のようである。

半梯（等脚台形を二等分した底角の一つが直角の台形）があり、外斜は 1 尺 6 寸、内斜は 1 尺 9 寸である。ただし、左右の辺（台形の下底と上底）の和は 1 尺 8 寸である。右辺はいくらか。

図において外斜を $a = 16$ 、内斜を $b = 19$ 、左辺（下底、原文は「左濶」）を x 、右辺（上底、原文は「右濶」）を y とする。問題は

$$x + y = 18$$

のとき、 x, y を求めることである。



以下、読み下し文に沿って解釈する。まず実際に右辺 y を求める。この部分は本題とは無関係であるし、簡単な計算であるから途中経過は述べられず、単に問題の数値を用いて（「題数を用いて」）方程式

$$(3.1) \quad -105 + 36y - 3y^2 = 0$$

を得るとしている。これを解くと右辺として最初の解として 7 寸、後の解として 5 寸、左辺として最初の解として 1 尺 1 寸、後の解として 1 尺 3 寸を得る。

そこで解を一つにする条件を求めるために以下のように「分術」を用いる．まず「天元の一を立て右の濶と為す」というのは「未知数 $Y (= 0 + 1Y)$ を右辺とする」という意味である．この Y は (3.1) の y とは別の未知数と想定されている．以下， Y に対応する左辺を X とする．したがって

$$x + y = X + Y = 18$$

である．また，左右の辺が x, y のときの底辺（原文は「長」）を c, X, Y のときの底辺を C とする．

右辺 Y を和 18 から引けば，残り $(x + y) - Y$ は左辺 X である．すなわち $X = 18 - Y = (x + y) - Y$ ．

これを 2 乗して内斜の 2 乗 b^2 から引けば，残りは底辺の 2 乗 C^2 である．

$$(3.2) \quad (c^2 - y^2 - 2yx) + (2y + 2x)Y - Y^2$$

これを左とする ($b^2 - x^2 = c^2$) ．

一方，左辺 X から右辺 Y を引くと，残りは

$$(x + y) - 2Y$$

である ($X - Y = \{(x + y) - Y\} - Y$ である) ．

この式を 2 乗した $\{(x + y) - 2Y\}^2$ を外斜の 2 乗 a^2 から引けば，残りは又 C^2 である．すなわち

$$(3.3) \quad (c^2 - 4yx) + (4y + 4x)Y - 4Y^2$$

ここでは $a^2 - x^2 - y^2 = a^2 - (x - y)^2 - 2xy = c^2 - 2xy$ を用いている．

この式 (3.3) を左 (3.2) と等しいとおいて

$$(y^2 - 2yx) + (2y + 2x)Y - 3Y^2 = 0$$

を得る．

y を商として組み立て除法を繰り返し適用して未知数 $Z = Y - y$ の方程式に変換すると定数項は 0 となり，変式

$$(-4y + 2x)Z - 3Z^2 = 0$$

を得る．「 y を傍書して開出商数の法の如くして実尽く」とは， y を商に立てて組立除法によって変数を $Z = Y - y$ に変換すると，定数項が 0 になるということである．この場合は

y	-3	$2x + 2y$	$y^2 - 2xy$
		$-3y$	$-y^2 + 2xy$
	-3	$2x - y$	0
		$-3y$	
	-3	$2x - 4y$	

より

$$(y^2 - 2yx) + (2y + 2x)Y - 3Y^2 = 0 + (-4y + 2x)Z - 3Z^2 = 0$$

となる．これを「変式」と呼ぶ．

変商は一つであるから，変式の一次の係数 $-4y + 2x$ の正負（2 で約して $-2y + x$ の正負）によって条件を加える．すなわち，

- 初めの解 $x = 7$ を答とするには，次の条件を加える（加辞）．左辺 x は右辺 y の 2 倍より小さい．
- 後の解 $x = 11$ を答とするには，次の条件を加える．左辺 x は上底（右辺） y の 2 倍よりも大きい

変商が 1 個ということは 2 個の解を分離する条件を付加すればよいから「1 次の係数に関する二つの条件 $-2y + x < 0$ ， $-2y + x > 0$ を考える」というのが最初の文である．

$$-2y + x < 0 \iff Z < 0 \iff Y < y$$

であるから，条件 $-2y + x < 0$ を満たす y は大きい方の解（すなわち 7）である．また， $-2y + x > 0$ を満たす y は小さい方の解（すなわち 5）である．

答がわかっているので迂遠な方法に見えるが，解を求めずとも，正数解が 2 個あることさえわかれば，上の議論によって解を分離することができる訳である．このように関は問題を一般的に解決しようとしているのであるが，解が 3 個以上ある場合には，2 次以上の係数も用いて条件を付加しなくてはならない．冒頭に「変商の件数に随って変式の方級より逐って下り辞を加える」とあるのがそれである．本文に曖昧な点があつて次数が高い場合は完全には理解できないが，ここには関の数学思想をみることができる．しかしながら，この関の一般化を目指す数学思想を引き継いだものはその後現れなかった．関孝和は傍書法や未知数の消去理論によって近世日本数学の確立者であるとともに，その数学思想によって孤高の存在であつたのである．

§ 4. 関孝和以降

関孝和は近世日本数学史における方程式論においても思索を深めたが，関孝和以降に方程式論に発展がなかったわけではない．たとえば，会田安明は『交商法起源』において解と係数との関係について言及しているし，『円理弧背術』（著者不明）においては無限級数を用いる方法を見出すことができる．また，19 世紀になると坂部広胖が『点竄指南録』（1810）において区間縮小法を用いる方法を考へている．これらの業績が直接あるいは漢訳されて移入された西洋数学書と無関係であると仮定するならば，西洋数学とは独立にこのような発展があつたことは興味深い．しかし，彼らの関心は概ね具体的な問題解きにあつた．会田は確かに問題の一般化に関心を寄せていたが，それは問題に含まれる円の数を増やすというような一般化であり，関の関心のありようは異なる．

関の著作として刊行されたのは『発微算法』と没後その門人荒木村英が 1712 年に刊行した『括要算法』とのみであり、後者にはいわゆるベルヌーイ数や円周率や円弧長を求めるための加速計算など、近世日本数学史において大きな意義を持つものが含まれるが、方程式論は含まれていない。一方、関自身が刊行した『発微算法』において関の関心事は未知数の消去法にあった。また関の著作の主要なもの『解隠題之法』、『解伏題之法』、『開方翻変之法』、『題術辨議之法』、『病題明致之法』は方程式論あるいはその周辺を扱ったものである。

関には魔方陣に関する著作など方程式論ではないものもある。そこでは次数に関して帰納的に構成する方法が述べられている。それ自身も評価に値するが、関の著作全体の中で言えば、主要なものというべきではない。関の主要な関心はあくまでも方程式論にあったと見るべきであり、その点において関は他の数学者とは一線を画す存在であった。

§ 5. おわりに

関孝和の数学に関する研究はこの 30 年間に進んだ。しかしながら関以前あるいは関以降の方程式論については未だ十分とは言えない。近世全般にわたる方程式論を俯瞰したものとして加藤平左エ門氏の浩瀚な著作 ([9]) があるが、刊行後すでに 60 年以上を経た現在、本書を起点としてそれを超える研究が待たれている。そのためにはまず資料の精確な解釈を現代語訳などの形で準備することが必要であろう。

§ 6. 謝辞

本論文の原稿に有益な助言を多数寄せて頂いた長田直樹先生に感謝いたします。

引用文献

- [1] 上野健爾, 小川束, 小林龍彦, 佐藤賢一『関孝和論序説』岩波書店, 2014 年。
- [2] 小川束『関孝和「発微算法」——現代語訳と解説』大空社, 1994 年。
- [3] 小川束「近世日本数学における表現形式——『大成算経』の隠題をめぐる」『数理解析研究所講究録』1513 (2006 年), 112-120。
- [4] 小川束「関孝和と行列式」『数学のたのしみ 関孝和と建部賢弘』(日本評論社, 2006 年)。
- [5] Tsukane Ogawa and Mitsuo Morimoto, “Methods for a circle, Volume 12 of the *Taisei Sankei*,” *Mathematics of Takebe Katahiro and History of Mathematics in East Asia, Advanced studies in pure mathematics* 79 (2018), 361-412.
- [6] 長田直樹「関孝和『解隠題之法』について」『数理解析研究所講究録』2011 年, 114-127。
- [7] 長田直樹「関孝和編『開方翻変之法』について (I) — 験商有無をいかに読むか —」*RIMS Kôkyûroku Bessatsu* B69 (2018) 151-160。

- [8] 長田直樹「関孝和編『開方翻変之法』について (II) —『開方翻変之法』で意図したこと—」*RIMS Kôkyûroku Bessatsu* B69 (2018) 49-64 .
- [9] 加藤平左工門『和算の研究 方程式論』日本学術振興会, 1957 年 .
- [10] 後藤武史「大成算経における判別式の求め方」『数理解析研究所講究録』1257 (2002 年), 186-197 .
- [11] 後藤武史, 小松彦三郎「17 世紀日本と 18-19 世紀西洋の行列式, 終結式及び判別式」『数理解析研究所講究録』1392 (2004 年), 117-129 .
- [12] 佐藤賢一「関孝和の行列式の再検討」『科学史・科学哲学』11 (1993 年) .
- [13] 徐澤林「中算の数学機械化思想の和算における発展 … 解伏題の機械化特徴」『自然科学史研究』20. 2 (2001 年) .
- [14] 竹之内脩『関孝和の数学』(共立出版, 2008 年) .
- [15] 日本学士院日本科学史刊行会編『明治前日本数学史』第 2 巻, 岩波書店, 1956 年 .
- [16] 平山諦, 下平和夫, 広瀬秀雄『関孝和全集』大阪教育図書, 1974 年 .
- [17] Rosalie Hosking, Tsukane Ogawa, and Mitsuo Morimoto, “Volume 1 of the *Taisei Sankei*: English Translation and Commentary” *SCIAMVS* 20 (2020), 31-119 (in printing).
- [18] 真島秀行「『解伏題之法』の行列式と『大成算経』の行列式について」『数理解析研究所講究録』1831 (2013 年), 114-127 .
- [19] 森本光生「和算における連立代数方程式を解くアルゴリズム」『数理解析研究所講究録』1787 (2012 年), 44-64 .
- [20] Mitsuo Morimoto and Yasuo Fujii, “The theory of well-posed equations, Volume 17 of the *Taisei Sankei*,” *Mathematics of Takebe Katahiro and History of Mathematics in East Asia, Advanced studies in pure mathematics* 79 (2018), 413-486.
- [21] Mitsuo Morimoto and Yasuo Fujii, “The fifteen examples of algebraic equations, Volume 19 of the *Taisei Sankei*,” *Mathematics of Takebe Katahiro and History of Mathematics in East Asia, Advanced studies in pure mathematics* 79 (2018), 487-548.