

TOPOLOGICALLY STABLE UNFOLDINGS II

千葉 九理 福田 拓生

INTRODUCTION. $[F_1]$ において, 関数の topologically stable unfolding の存在, 唯一性, 余次元一定のときの有限性について考察した。写像芽に関しても, 同様の考察により次の定理を証明することができる。

定理 次元 r を 任意に固定したとき, 次元 r の topologically stable unfolding をもつ写像芽の位相型とそれらの top. stable unfolding の位相型は有限個である。

この定理の証明において, THOM の isotopy lemma と C^0 -sufficiency に関する定理 (§2 定理 2.3 p 7) が基本的役割をはたす。この定理 2.3 を仮定すれば, 上の定理は $[F_1]$ におけると同様に証明できることを一言注意して, 上の定理の証明は他の場所にゆづり, ここでは C^0 -sufficiency に関する定理のみを証明する。

ここでの議論は 実 C^{∞} 級で行なわれているが, Complex analytic の場合にそのまま翻訳できる。証明中 Whitney stratification の概念と Thom の isotopy lemma が使われるが [M₁], [F₂] を参照のこと。上の定理にある stable unfolding の定義は §1 で行なわれる。

目 次

§1 unfoldings	 2
§2 C^{∞} -k-determinacy 又は C^{∞} -sufficiency (主定理).....	5
§3 関数の場合の主定理の証明	 8
§4 写像芽の場合の主定理の証明	 15

§1 unfoldings

定義 1.1 C^{∞} 級写像 $f_i: M_i \rightarrow N_i$, $i=1,2$ が C^{∞} -同値 (C^{∞} -equivalent) であるとは, 同相写像 $h: M_1 \rightarrow M_2$ と $h': N_1 \rightarrow N_2$ が存在して, $f_2 \circ h = h' \circ f_1$ が成立するときという。写像芽の C^{∞} -同値についても同様に定義する。

定義 1.2 C^{∞} 級写像芽 $f: (\mathbb{R}^m, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, c)$ に対し, C^{∞} 級写像芽 $F: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, c)$ が 条件

$$F(x, b) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^m$$

を満たすとき F を f の b を中心とする 次元展開 (unfolding) という。

定義 1.3 $F: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, c)$ 及び $G: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2, (a', b')) \rightarrow (\mathbb{R}^n, c')$ をそれぞれ $f: (\mathbb{R}^m, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, c)$ 及び $g: (\mathbb{R}^m, a') \rightarrow (\mathbb{R}^n, c')$ の開折とする。そのとき 写像束の組 $\Xi = (H_1, H_2, \varphi)$ が 次の条件をみたすとき Ξ を G から F への 写

C^0 級開折図射とよぶ:

$$\begin{aligned} (1) \quad & H_1: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2, (a', b')) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2, (a, b)) \\ & H_2: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2, (c', b')) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2, (c, b)) \\ & \varphi: (\mathbb{R}^2, b') \rightarrow (\mathbb{R}^2, b) \end{aligned}$$

は 連続写像束で 次の図式 が可換となる。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F \times \text{id}_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow H_1 & & \uparrow H_2 & & \uparrow \varphi \\ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{G \times \text{id}_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$\text{但し } F \times \text{id}_{\mathbb{R}^2}(x, u) = (F(x, u), u), \quad \pi(y, u) = u.$$

(2) $H_1(x, u) = (h_{1,u}(x), \varphi(u))$, $H_2(y, u) = (h_{2,u}(y), \varphi(u))$ とかけるが, $h_{1,u}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 及び $h_{2,u}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は共に homeomorphism の写である。

$\Xi = (H_1, H_2, \varphi)$ が G から F へ C^0 級開折図射であることを 記号 $\Xi: G \rightarrow F$ であらわす。

定義 1.4 南折図射 $\Phi = (H_1, H_2, \varphi) : G \rightarrow F$ が C^0 級南折同型 であるとは H_1, H_2, φ がそれぞれ homeomorphism であるときにいう。南折図同型 $\Phi : G \rightarrow F$ が存在するとき F と G は 南折として C^0 -equivalent であるという。

定義 1.5 f の南折 F が f の C^0 -普遍南折 であるとは、 f の他の任意の南折 G に対して、南折図射 $\Phi : G \rightarrow F$ が存在するときにいう。

定義 1.6 $f : (\mathbb{R}^m, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, c)$ の南折 $F : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, c)$ が C^0 -安定南折 (topologically stable unfolding) であるとは、真 (a, b) の任意の近傍 $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$ と F の任意の代表元 $\tilde{F} \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ に対して $\tilde{F}$ の $C^0(U, \mathbb{R}^n)$ における Whitney 位相での近傍 $N(\tilde{F})$ が存在して次の条件をみたすときにいう。

(条件) 任意の写像 $\tilde{G} \in N(\tilde{F})$ に対して 真 $(a', b') \in U$ が存在して $\tilde{G}$ の (a', b') における写像芽

$$G : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2, (a', b')) \rightarrow (\mathbb{R}^n, c'), \quad c' = \tilde{G}(a', b')$$

が n 次元南折として F に C^0 -同値になる。

定義 1.7 $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への C^0 級写像の芽全体の集合を

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ であらねす。 C^0 級写像 $f: (\mathbb{R}^m, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n)$

c) の topological codimension が r 以下 ($\text{top codim } f \leq r$) であるとは、次の条件を満たすときにいう。

(条件) $f \in M$ なる $\text{codimension} \leq m+r$ の $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ の smooth な submanifold M が存在し、任意の 2 元 $g, h \in M$ は互いに C^0 -同値な C^0 -安定開所をもつ。

但し、 $\pi_k: \mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ を写像芽にその k -jet を対応させる自然な射影とすると、 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ の部分集合 M が $\text{codimension} \leq m+r$ の smooth な submanifold であるとは ある $k \geq 0$ に対して smooth な $\text{codim} \leq m+r$ の submanifold $M_k \subset J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ が存在して $M = \pi_k^{-1}(M_k)$ ととるときにいう。

§2 C^0 - k -determinacy.

定義 2.1 k -jet $z \in J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ が C^0 -sufficient jet であるとは、 z の代表元である任意の写像芽 f, g が互いに C^0 -同値になるときにいう。又写像芽 f が C^0 - k -determinate であるとは f の k -jet が C^0 -sufficient であるときにいう。

C^0 - k -determinacy に関して 次の古典的結果がある。

補題 2.2 (Thom [T]) 任意の自然数の組 (r, m, n) に対して (r, m, n) のみで定まる自然数 $\Delta = \Delta(r, m, n) \geq r$ が存在して 次の条件をみたす。

(1) $\pi = \pi_r^\Delta: J^\Delta(m, n) \rightarrow J^r(m, n)$ を自然な射影とあるとき, 任意の jet $z \in J^r(m, n)$ に対して, $\pi^{-1}(z)$ の proper な代数的部分集合 Σ_z (=これを 分岐多様体という) が存在する。

(2) $j^\Delta f(c) \in \pi^{-1}(z) - \Sigma_z$ ならば f は C^0 - Δ -determinate である。

[T] においては 数 $\Delta = \Delta(r, m, n)$ は全然評価されてない。我々は 本稿で, この $\Delta = \Delta(r, m, n)$ を次の様に評価できる:

$$(*) \quad \Delta(r; m, n) = \begin{cases} r + \left\lfloor \frac{m}{n-m+1} \right\rfloor + 1 & \text{if } m \leq n \\ r + n + 1 & \text{if } m \geq n \end{cases}$$

更に上の補題は 次のように改良できる。

定理 2.3 $\Delta = \Delta(\mathbb{R}; m, n)$ を上の (*) で与えるとき, 任意の semi-algebraic set $W \subset J^n(m, n)$ に対して, closed semi-algebraic subset $\Sigma_W \subset (\pi_{\mathbb{R}}^{\Delta})^{-1}(W)$ で次の条件をみたすものが存在する。

$$(1) \dim \Sigma_W < \dim (\pi_{\mathbb{R}}^{\Delta})^{-1}(W)$$

$$(2) j^{\Delta} f(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma_W \text{ ならば 制限写像}$$

$$f|_{C(f)}: C(f) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

は finite-one map である, ここに $C(f)$ は f の特異点の集合をあらわす。

(3) $\pi^{-1}(W) - \Sigma_W$ の jet は全て sufficient jet である。更に, もし f_1 と f_2 の Δ -jet $j^{\Delta} f_1(0)$ と $j^{\Delta} f_2(0)$ が $(\pi_{\mathbb{R}}^{\Delta})^{-1}(W) - \Sigma_W$ の同じ連結成分に属すならば, f_1 と f_2 は C^0 -同値である。

Introduction における stable unfolding の有限性に関する定理の証明において, 基本的役割を果たすのは トムの isotopy lemma, 多項式写像の stratification 及び この定理である。以下 この定理の証明についで述べる。

§3 関数の場合の定理2.3の証明

関数の場合も写像の場合も 定理2.3の証明の原理は同じであるが、関数の場合の証明は、写像のそれに比して非常に簡単であるので、証明の方針の見通しをよくするため、証明を関数の場合と写像の場合に分ける。

次の elementary な 補題を準備する。

補題3.1 任意の写像 $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ と任意の点 $p \in \mathbb{R}^m$ 及び任意の整数の組 $r, \Delta \geq 0$ に対して、次数 $r + \Delta + 1$ の多項式写像 $h_p = (h_{1,p}, \dots, h_{n,p}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(*) \quad h_{i,p} = \sum_{|\omega| \leq r + \Delta} a_{i\omega}(p) x^\omega$$

で 次の条件をみたすものが存在する:

- (1) $j^r h_p(0) = j^r f(0)$
- (2) $j^\Delta h_p(p) = j^\Delta f(p)$
- (3) $j^{r+\Delta} h_0(0) = j^{r+\Delta} f(0)$

更に

(4) $h_{i,p}$ の係数 $a_{i\omega}(p)$ は p に依存するが、それは p の C^m 級関数であるようにえらべる。

証明 $n=1$ のときに証明すれば充分である。

関数 g の点 p における l 次の Taylor 級数を $\tau_p^l g$ であらわす。すなわち

$$(5) \tau_p^l g(x) = \sum_{|\omega| \leq l} \frac{1}{\omega!} \frac{\partial^{|\omega|} g}{\partial x^\omega}(p) (x-p)^\omega$$

原点において r 次 ~~の~~ flat な関数 f , すなわち

$$(6) \frac{\partial^{|\omega|}}{\partial x^\omega} f(0) = 0 \quad 0 \leq |\omega| \leq r+1$$

なる f に対して補題を証明すれば充分である。実際, 任意の f に対して $g = f - \tau_0^{\Delta} f$ は原点において r 次まで flat であり, g に対して補題の条件をみたす多項式 h_p' が存在すれば $h_p(x) = h_p'(x) + \tau_0^{\Delta} f$ は f に対して補題の条件をみたす。

従って f は原点において r 次まで flat とする。そのような f に対して f は次の形にかける (J.Milnor, Monse theory (p5) lemma 2.1 参照)

$$(7) f(x) = \sum_{|\omega|=r+1} x^\omega f_\omega(x)$$

$$(8) f(x) = x^\omega g(x) \quad \text{for some } \omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \\ |\omega| = \omega_1 + \dots + \omega_m = r+1$$

なる形の関数に対して補題を証明すればよい。所で

$$(9) \quad h_p(x) = x^\omega \tau_p^\rho(g(x))$$

とおけば 条件 (1) (3) (4) は明らかにみたされる。条件(2)は

$$(10) \quad \tau_p^l(g_1 g_2) = \tau_p^l(\tau_p^l g_1 \tau_p^l g_2)$$

が任意の二つの関数 g_1, g_2 に対して成立つので明らかである。実際

$$\begin{aligned} \tau_p^\rho(h_p(x)) &= \tau_p^\rho(x^\omega \tau_p^\rho(g(x))) = \tau_p^\rho(\tau_p^\rho(x^\omega) \tau_p^\rho(g(x))) \\ &= \tau_p^\rho(x^\omega g) = \tau_p^\rho(f) \end{aligned}$$

Q.E.D.

定理 2.3 を関数の場合に限ると 次の形になる。

定理 3.2 任意の semi-algebraic set $W \subset J^r(m, 1)$ に対し, closed semi-algebraic set $\Sigma_W \subset (\pi_r^{r+2})^{-1}(W)$ で次の条件をみたすものが存在する。

$$(1) \quad \dim \Sigma_W < \dim (\pi_r^{r+2})^{-1}(W)$$

$$(2) \quad j^{r+2} f(0) \in (\pi_r^{r+2})^{-1}(W) - \Sigma_W \implies 0 \in \mathbb{R}^m \text{ は } f \text{ の孤立特異点である。}$$

$$(3) \quad \text{任意の jet } z \in \pi_r^{-1}(W) - \Sigma_W \text{ は sufficient}$$

$$(4) \quad \text{更に, もし 関数芽 } f, g \text{ の } (r+2)\text{-jet}$$

$f^{\pi+2}f(0)$ と $f^{\pi+2}g(0)$ が $\pi'(W) - \Sigma_W$ の同じ連結成分に属すならば f と g は C^0 -同値である。

記号 集合 $M(k) = \{0, 1, 2, \dots, k\}$ の m 個のコピーの直積 $M(k)^m$ の元 $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$ に対して

$$\deg \alpha = \alpha^1 + \dots + \alpha^m \quad \text{と定める。}$$

$$C(m, k) = \{\alpha \in M(k)^m \mid \deg \alpha = k\} \quad \text{とおく。}$$

$C(m, k)$ は有限集合で その位数 $\#C(m, k) = \frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!}$
 $C(m, k) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ と適当に順序づける, $N = \#C(m, k)$.

$$\mathbb{R}^N \text{ の元 } (a_1, \dots, a_N) \text{ に対して 斉次式 } \sum_{i=1}^N a_i X^{\alpha_i} \text{ を}$$

$$\sum a_i X^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^N a_i X^{\alpha_i(1)} \dots X_m^{\alpha_i(m)}$$

で定義する, 但し $\alpha_i = (\alpha_i(1), \dots, \alpha_i(m))$ 。

特に $\mu = \pi+1, \pi+2$ のとき,

$$C(m, \pi+1) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\} \quad \mu = \#C(m, \pi+1)$$

$$C(m, \pi+2) = \{\beta_1, \dots, \beta_\nu\} \quad \nu = \#C(m, \pi+2)$$

とおく。

定理 3.2 の証明 $z \in W \subset J^{\pi}(m, 1)$ とし, z が π 次の多項式 $y = P_z(z)$ で代表されるとする。すると次の 1 対 1

対応が自然に得られる。

$$\begin{array}{c}
 (\pi_{\mathbb{R}}^{r+2})^{-1}(W) = \{ \text{polynomials } y = P_z(x) + \sum_{i=1}^m a_i x^{\alpha_i} + \\
 \qquad \qquad \qquad + \sum_{j=1}^r b_j x^{\beta_j} \} \\
 \updownarrow |\vec{x}|+1 \\
 \{(z, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_r)\} = W \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r
 \end{array}$$

$$\Omega = \{(x, z, a, b)\} = \mathbb{R}^m \times W \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$$

$$O = \{(x, z, a, b) \in \Omega \mid P_{a,b,z}(x) = P_z(x) + \sum a_i x^{\alpha_i} + \sum b_j x^{\beta_j} = 0\}$$

$$S = \{(x, z, a, b) \in \Omega \mid d_x P_{a,b,z}(x) = 0\}$$

$$Q = \{(0, z, a, b)\} \quad \text{とおく。}$$

Q と $W \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$ と $(\pi_{\mathbb{R}}^{r+2})^{-1}(W)$ を同一視する。

W が semi-algebraic manifold として一般性を失はない。
 Ω の stratification $\mathcal{S}(\Omega)$ で, $Q, S \cap O, S, O$ がそれぞれ
 Ω の substratified set になるようなものが存在する。(see [F2])

$$\Sigma_W = \overline{\bigcup_{\substack{X \in \mathcal{S}(Q) \\ \dim X < \dim Q}} X}, \quad \mathcal{S}(Q) \text{ は } \Omega \text{ の substratified set} \\
 \text{として与えられる } Q \text{ の stratification}$$

とおくと, これは求めるものである。まず Σ_W は $O = \pi^{-1}(W)$
 の closed semi-algebraic subset で $\dim \Sigma_W < \dim Q$ である。

次に条件 (2)(3)(4) をチェックしよう。明らかに条件 (3)
 は (4) に含まれている。故に (2)(4) をチェックするとよい。

$j^r f(0) = z \in W$ なる $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ に対し、補題 3.1 によると、任意の点 $p \in \mathbb{R}^m$ に対し、多項式 $h_p(x)$
 $= \sum_{|\omega| \leq r+2} a_\omega(p) x^\omega$ で次の条件をみたすものが存在する。

$$(5) \quad j^r h_p(0) = j^r f(0) = z$$

$$(6) \quad j^1 h_p(0) = j^1 f(p)$$

$$(7) \quad j^{r+2} h_p(0) = j^{r+2} f(0)$$

条件 (5) より h_p は 次の形 をしている。

$$h_p(x) = p_z(x) + \sum a_i(p) x^{\alpha_i} + \sum b_j(p) x^{\beta_j}$$

そのとき 写像 $jf: \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega$ を 次式で定義する。

$$(8) \quad jf(p) = (p, z, a_1(p), \dots, a_\mu(p), b_1(p), \dots, b_\nu(p))$$

補題 3.1 によると jf は C^∞ 級である。次の性質を得る。

$$(10) \quad jf \text{ は } Q \text{ に transversal}$$

$$(11) \quad f^{-1}(0) = jf^{-1}(\bar{0})$$

$$(12) \quad C(f) = f \text{ の 特異点 の 集合 } = jf^{-1}(S)$$

(2) の証明. $j^{r+2} f(0) = jf(0) \in Q - \Sigma_W$ とする。 $\text{codim } Q$
 $\text{in } \Omega = m = \text{codim } S \text{ in } \Omega$, かつ $j^{r+2} f(0) = jf(0)$ の属する Q の
 strata の codimension も m , 従って $jf(0)$ の近くには $S-Q$ の

strata は存在しない。故に原典の近傍では, (12) より,

$$C(f) = jf^{-1}(S) = jf^{-1}(Q) = \{0\}$$

となり 原典は f の孤立特異点である。

(4)の証明。 $j^{r+2}f(0), j^{r+2}g(0)$ が $\pi^{-1}(W) - \Sigma_W$ の同じ連結成分に属するとする。 f_t を $f_0=f, f_1=g$ かつ $j^{r+2}f_t(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma_W$ なる smooth なホモトピーとする。そのとき, $I = (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ とおき,

$$F: \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R} \times I \quad \text{を} \quad F(x, t) = (f_t(x), t)$$

$$\pi: \mathbb{R} \times I \rightarrow I \quad \text{を} \quad \pi(y, t) = t$$

$$jF: \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \Omega \quad \text{を} \quad jF(x, t) = jf_t(x)$$

で定義する。 F が C^∞ 級であるように f_t はとれる。

$j^{r+2}f_t(0) \in Q - \Sigma_W$ で jF は Ω の全ての strata に横断的なので $\mathbb{R}^m \times I$ に Ω からの induced stratification を入れることができる。 $\mathbb{R} \times I$ に

$$\mathcal{S}(\mathbb{R} \times I) = \{0 \times I, (\mathbb{R} - \{0\}) \times I\}$$

なる自然な stratification を入れると, F は Thom-map over π となり, 2nd-isotopy lemma より f と g は C^0 -同値。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m \times I & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \times I & \xrightarrow{\pi} & I \\ \downarrow jF & & & & \\ \Omega & & & & \end{array}$$

Q.E.D

§4 写像芽の場合の主定理の証明.

$\Delta > r$ のとき, $\pi = \pi_\Delta^A: J^\Delta(m, n) \rightarrow J^r(m, n)$ を自然な写影とする。

補題 4.1 $W \subset J^r(m, n)$, $X \subset J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ を任意の semi-algebraic set とする。そのとき $(\pi_{r+k+1}^A)^{-1}(W)$ の中の closed semi-algebraic set $\Sigma = \Sigma(X, W)$ が存在して次の条件をみたす:

$$(1) \quad \dim \Sigma < \dim \pi^{-1}(W)$$

$$(2) \quad j^{r+k+1}f(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma \Rightarrow j^kf: \mathbb{R}^m \rightarrow J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

は、(原点を除いて) 原点の近傍で X に横断的

$$(3) \quad \text{codim } X = m \Rightarrow j^kf^{-1}(X) \cap U = \{0\} \text{ or } \emptyset$$

for some small neighborhood U .

証明. 定理 3.2 と同様の考察をくりかえす。 $z \in W \subset J^r(m, n)$ とし、 z が r 次の多項式写像 $(y_1, \dots, y_n) = (P_{1,z}(x), \dots, P_{n,z}(x))$ で代表されているとする。 $\Delta = r+k+1$ とおく。

$$(\pi_\Delta^A)^{-1}(W) = \{ \text{多項式写像 } (y_1, \dots, y_n); y_j = P_{j,z}(z) + \sum_{r < |\omega| \leq \Delta} a_j^\omega x^\omega \}$$

$\downarrow$ $1 \leq j \leq n$

$$W \times \mathbb{R}^{n \times \nu} = \{ (z, a_1^{\omega_1}, \dots, a_1^{\omega_\nu}, a_2^{\omega_1}, \dots, a_n^{\omega_1}, \dots, a_n^{\omega_\nu}) \}$$

$$, \text{ 但し } \nu = \sum_{l=r+1}^s (m+l-1)! / l! (m-1)!$$

$$\Omega = \{(x, z, a_i^\omega)\} = \mathbb{R}^m \times W \times \mathbb{R}^{n \times \nu}$$

$$j_\Omega: \Omega \longrightarrow J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \text{を}$$

$$j_\Omega(x, z, a_i^\omega) = j^k(P_z + \sum a_i^\omega x^i)(x)$$

で定義する。 $P_z = (P_{1,z}, \dots, P_{n,z})$ は z を代表する多項式。

補題 3.1 によると j_Ω は

$$Q = \{(0, z, a_i^\omega)\} = 0 \times W \times \mathbb{R}^{n \times \nu}$$

以外では submersion になっている。(i.e., $j_\Omega|_{\Omega-Q}$ が submersion). $\times$ j_Ω は多項式写像, X は semi-algebraic なので $X^* = j_\Omega^{-1}(X) - Q$ は semi-algebraic manifold としてよい。 pair X^* と Q が Whitney の条件をみたさぬ Q の点を Σ とおくとこれが補題 3.1 の求めるものである。(もちろんここで Q と $\pi^{-1}(W)$ は同一視している。)

実際, $f \in C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ が $j^k f(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma$ とする。

f に対して $jf: \mathbb{R}^m \longrightarrow \Omega$ を

$$jf(p) = (p, j^k f(0), a_i^\omega(p))$$

とおく。但し, $a_i^\omega(p)$ は f と p に対して, 補題 3.1 で保障された多項式写像の係数である。次の性質を得る。

(4) jf は Q に横断的

$$(5) \quad j^k f = j\Omega \circ (jf)$$

$$(6) \quad jf^{-1}(X^*) = jf^{-1}(X) - \{o\}$$

今 $j^k f(o) \in Q - \Sigma$ かつ $(Q - \Sigma)$ と X^* は Whitney の条件をみたすので (4) より

(7) jf は X^* に transversal

$j\Omega$ が submersion なることと (5), (7) より 補題 4.1 が証明された。

Q.E.D.

補題 4.2. 整数 r, m, n に対して $\Delta = \Delta(r, m, n)$ を 6 頁の (*) で与えられる数とする。任意の semi-algebraic set $W \subset J^r(m, n)$ に対して closed semi-algebraic set $\Sigma \subset (\pi_\Delta)^{-1}(W)$ が存在して次の条件をみたす。

$$(1) \quad \dim \Sigma < \dim (\pi_\Delta)^{-1}(W)$$

(2) $j^k f(o) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma \Rightarrow f$ の特異点集合 $C(f)$ は stratification $\mathcal{S}(C(f))$ をもち、任意の strata $X \in \mathcal{S}(C(f))$ に対して $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ は immersion となる。

証明. まず, Thom-Boardman singularity $\Sigma_{i_1 \dots i_k} \subset J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $i_k \neq 0$, かつ $\text{codim} \Sigma_{i_1 \dots i_k} \leq m$ なるものが存在す

る sequence $(i_1, \dots, i_k)$ の最大の長さ $k = k(m, n)$ を求める。

$m \leq n$ の場合は $\text{codim} \sum_{\overbrace{1, \dots, 1}^k} = m$ ととる k

$m \geq n$ の場合は $\text{codim} \sum_{\overbrace{m-n+1, \dots, 1}^k} = m$ ととる k

がそうである。J. Boardman $[B_1]$ によると、これは

$$(3) \quad k = k(m, n) = \begin{cases} \lfloor m/n - m + 1 \rfloor & \text{if } m \leq n \\ n & \text{if } m \geq n. \end{cases}$$

となる。以下議論は同じなので $m \geq n$ の場合に証明する。

$$S_1 = \text{closure of } \sum^{m-n+1} \subset J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

$$S_2 = \bigcup_{\text{codim} \sum^I > m} \sum^I \subset J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

とおくと、 S_2 は $\text{codim} > m$ の $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ の algebraic subset である。 $S_1 - S_2$ を次の形の Thom-Boardman singularity の和集合に分割できる。

$$(4) \quad S_1 - S_2 = \sum_{\overbrace{m-n+1, 1, \dots, 1}^k} \cup \bigcup \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}, 0}$$

$S_1 - S_2$ の stratification で $\{\sum^{m-n+1, 1, \dots, 1}, \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}, 0}\}$

を細分して得られるものが存在する。 $S_1 - S_2$ の semi-algebraic

city から $S_1 - S_2$ の stratification $\mathcal{S}(S_1 - S_2)$ の strata の

数は有限個である。補題 4.1 によると $(\pi_\pi^\wedge)^{-1}(W)$ の semi-

algebraic set Σ で $\dim \Sigma < \dim \pi^{-1}(W)$ で、 $y \circ f(0) \in \pi(W)$

$-\Sigma \Rightarrow y \circ f$ は $\mathcal{S}(S_1 - S_2)$ の strata に transverse である

ようなものが存在する。この Σ が求めるものである。

実際 $g \circ f(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma$ とする。

$$(5) \quad C(f) = (g^k f)^{-1}(S_1)$$

なので, $C(f)$ の stratification を

$$(6) \quad \mathcal{S}(C(f)) = \{0\} \cup \{(g^k f)^{-1}(X) - \{0\} \mid X \in \mathcal{S}(S_1 - S_2)\}$$

とおけばよい。 $f|_{\{0\}}: \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ は明らかに immersion.

又 $\text{codim } \Sigma^{m-n+1, 1, \dots, 1} = m$ なので $X \subset \Sigma^{m-n+1, 1, \dots, 1}$ ならば

補題 4.1 より, $(g^k f)^{-1}(X) - \{0\} = \emptyset$. 一方 $X \subset \Sigma^{i_1, \dots, i_k, 0}$

ならば $f|(g^k f)^{-1}(X)$ が immersion であることは, $\Sigma^{i_1, \dots, i_k, 0}$

の定義と横断性より明らかである。(see [B])

補題 4.2 Q.E.D.

補題 4.3 $X, Y \subset \mathbb{R}^{n+k}$ を 2 つの submanifolds, $\pi: \mathbb{R}^{n+k}$

$\rightarrow \mathbb{R}^k$ を自然な射影とする。次の条件をみたすとする。

(1) $Y \supset \partial X$ で pair (X, Y) は Whitney の条件 (b) をみたす。

(2) $\pi(X), \pi(Y)$ は $\mathbb{R}^n$ の submanifold で $\pi|_X: X \rightarrow \pi(X)$ 及び $\pi|_Y: Y \rightarrow \pi(Y)$ は submersion.

このとき $\Rightarrow$

(3) pair $(\pi(X), \pi(Y))$ は Whitney の条件 (b) を満たす。

証明 "pair (X, Y) が Whitney の条件を真 $y \in Y$ で満たす" とは " Y に収束する X の点列 $\{x_i\}$ と Y の点列 $\{y_i\}$ に対し, x_i と y_i を結ぶ直線 $\widehat{x_i y_i}$ が ある直線 l に収束し, $T_{x_i}(X)$ が ある空間で l に収束するならば,

$$(4) \quad \tau > l$$

となる" であった。所で 条件(4) は 次の条件(5) と同値である。

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \arg(\widehat{x_n y_n}, T_{x_n}(X)) = 0$$

== $\arg$ は角度をいみする。Whitney の条件(b) と (5) で定式化すると 補題 4.3 は 明白である。

Q.E.D.

主定理(= 定理 2.3) の証明.

$\Sigma = \Sigma_W$ を 補題 4.2 で得られるものとする。定理 2.3 における条件 (1), (2) は 補題 4.2 から自明である。(3) を証明する長い旅路に出よう。

整数 N を充分大きくとっておく。例えば " $N > \max(m, n)$ "

$$J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N = J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \cdots \times J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

とおく。但し $k = k(m, n)$ は P18 の 式(3) で与える。

$$\Omega = \{(x, z, a, \omega)\} = \mathbb{R}^m \times W \times \mathbb{R}^{n \times p} = \mathbb{R}^m \times \pi^{-1}(W)$$

を補題4.1の証明の中で与えたものとする。

$$\Omega^N = \Omega \times \cdots \times \Omega \quad (N\text{個のコピーの直積})$$

とおく。

集合 $\{1, \dots, N\}$ の部分集合 $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_\ell \mid \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_\ell\}$

に対して

$$\Delta_\sigma = \{(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \mid y_{\sigma_1} = \cdots = y_{\sigma_\ell}\}$$

とおく。同じ記号で

$$\Delta_\sigma \equiv (\pi_{\mathbb{R}^n}^N)^{-1}(\Delta_\sigma)$$

をあらわす, 但し $\pi_{\mathbb{R}^n}^N: J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N \rightarrow \mathbb{R}^{nN} = \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$

は自然な射影。

$$\mathcal{S}(\Sigma, \Delta) = \{\Sigma^{I_1} \times \cdots \times \Sigma^{I_N}, \Delta_\sigma \mid \Sigma^{I_\ell} \text{ は全}$$

ての Thom-Boardman singularity, $\sigma \subset \{1, \dots, N\}$

をみたすある ℓ

とおく。

すると $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N$ の stratification で集合族 $\mathcal{S}(\Sigma, \Delta)$

を細分して得られる最大のもの $\underline{\mathcal{S}(J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N)}$ が存在

する。所で $j_\Omega: \Omega \rightarrow J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ は Q 以外

では submersion であつたので

$$j_\Omega^N = j_\Omega \times \cdots \times j_\Omega: \Omega^N \longrightarrow J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N$$

は $\Omega^N - Q(N)$ 上で submersion である。 $\pi_{\lambda, \Omega}: \Omega^N \rightarrow \Omega$

を λ 成分への射影とすると, $Q(N) = \bigcup \pi_{\lambda, \Omega}^{-1}(Q)$.

従って $\Omega^N - Q^{(N)}$ には $\mathcal{S}(J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N)$ を j_{Ω^N} で
 引きもとしてえられる stratification $\mathcal{S}(\Omega^N - Q^{(N)})$ がある。

$$\Sigma^{(N)} = \pi_{\Omega^N}^{-1}(\Sigma)$$

とおくとき, Ω^N の stratification で次の条件をみたすもの
 が存在する。

$$(1) \quad \mathcal{S}(\Omega^N) \text{ は } \{\mathcal{S}(\Omega^N - Q^{(N)}), Q^{(N)}, \Sigma^{(N)}\}$$

を細分したもの。

さて, $f, g \in j^{\wedge} f(0), j^{\wedge} g(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma$ なる写
 像群とする。 $f_{\star}$ を $f_0 = f, f_1 = g$ なるホモトピーで
 $j^{\wedge} f_{\star}(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma$ なるものとする。

$$F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad ; \quad F(x, t) = (f_t(x), t)$$

$$jF: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R} \quad ; \quad jF(x, t) = (jf_{\star}(x), t)$$

$$jF^N: \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^N \times \mathbb{R} \quad ; \quad jF^N(x_1, \dots, x_N, t) = (\dots, jf_t(x_N), t)$$

で定める。補題 4.1 の証明中に見え如く,

$$(2) \quad jF^N \text{ は } Q \times \cdots \times Q \times \mathbb{R} \text{ に横断的である。}$$

従って, $\Omega^N \times \mathbb{R}$ に $\mathcal{S}(\Omega^N)$ から induce される自然な stratifica-
 tion $\mathcal{S}(\Omega^N \times \mathbb{R})$ を入れると

$$(3) \quad jF^N \text{ は } \mathcal{S}(\Omega^N \times \mathbb{R}) \text{ の全ての strata に横断的}$$

となる。従って $jF^N(\#$

(4) $J^N F^N(\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ には $\mathcal{S}(\Omega^N \times \mathbb{R})$ から induce される stratification $\mathcal{S}(J^N F^N(\mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}))$ が存在する。

— $\tilde{J}_\Omega^N: \Omega^N \times \mathbb{R} \rightarrow J^k(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^N \times \mathbb{R} \ni \tilde{J}_\Omega^N(p_1, \dots, p_N, t)$
 $= (J_\Omega(p_1), \dots, J_\Omega(p_N), t)$ と与えらる $\tilde{J}_\Omega^N$ は $\Omega^{(N)} \times \mathbb{R}$ 以外では submersion 従って 等式

$$(5) (J^k F)^N = \tilde{J}_\Omega^N \circ J^N F^N$$

が成立つ。但し $(J^k F)^N = J^k F \times \cdots \times J^k F: \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N \times \mathbb{R}$
 $(x_1, \dots, x_N, t) \rightarrow (J^k f_t(x_1), \dots, J^k f_t(x_N), t)$ 。

$J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N \times \mathbb{R}$ には $\mathcal{S}(J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N)$ から自然に induce される stratification $\mathcal{S}(J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N \times \mathbb{R})$ を入れる。

(6) $\pi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}: J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$
 $\ni \pi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}(J^k f_1(p_1), \dots, J^k f_N(p_N), t) = (f_t(p_1), t)$ なる自然な射影とする。 N を充分大きくとておくと,

(7) $X, Y \in \mathcal{S}(J^N F^N((\mathbb{R}^m))^N \times \mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \circ \tilde{J}_\Omega^N(X) \cap \pi_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}} \circ \tilde{J}_\Omega^N(Y) &\neq \emptyset \xRightarrow{\text{Target}} \pi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \circ \tilde{J}_\Omega^N(X) \\ &= \pi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \circ \tilde{J}_\Omega^N(Y) \end{aligned}$$

が成立つ。

(これは $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N$ の stratification から $\mathcal{S}(\Sigma, \Delta)$ の細分 ~~を~~ 与えたので (p21 参照).)

従って 補題 3.3 より

$$(8) \quad \mathcal{S}(\text{Image } F) = \{ \pi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \circ \widehat{J}_{\Omega}^N(X) \mid X \in \mathcal{S}(fF^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})) \}$$

は $\text{Image } F \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ の stratification を与える。 $\text{Image } F$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ の closed set として一般性を失なぬので、

$$(9) \quad \mathcal{S}(\text{Image } F) \cup \{ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} - \text{Image } F \} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ の stratification を与える。

一方 (2)(3) より, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ には fF により $\mathcal{S}(\Omega^N \times \mathbb{R})$ の stratification を入れることができる。所でこの stratification を細分して、

$$F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

が, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ の stratification を (9) で与えたとき, stratified map になるようにできる。

$$(10) \quad \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}$$

は 定理の中の条件 (2) (これはすでに証明された) より Thom map であり, 従って isotopy lemma より $f_0 = f$ と $f_1 = g$ は C^0 -同値となる。

定理 2.3 証明完了。

以上。

文 献

- [B] J. Boardman. Singularities of d.f.f. maps. Publ. Math.
I.H.E.S. 33. (1967) 21-57
- [F₁] T. Fukuda. Topologically stable unfoldings について. 数理研究報告 No 257 "C[∞]写像のトポロジー"
- [F₂] ———. Types topologiques des polynômes. to appear
in Publ. Math. I.H.E.S. No 46
- [M] J. Mather. Notes on topological stability.
mimeographed Harv. Univ.
- [T] R. Thom. Local topological properties of d.f.f. maps.
Colloq. on Differential Analysis. Oxford Univ. Press.