

球面上の2次元乱流における渦度場の混合と コヒーレント構造の出現に関する研究

漁野 光紀

第1章 序論

地球や他の惑星上を運動する流体の乱流状態においては、渦の空間スケールから算出される渦の典型的な持続時間(渦反転時間)よりも遥かに長く持続する大規模なパターン構造が観察される。水平方向の流れの空間スケールが鉛直方向の流れの空間スケールに比べて極めて大きいときや、惑星の回転が速いときは、流体運動が2次元であると近似することができる。そのような場合、エネルギーの逆カスケードによって水平スケールの大きい組織立った構造(コヒーレント構造)が出現すると考えられる。本論文では、球面上の2次元乱流において現れるコヒーレント構造について探求する。扱う流体は主に Euler 方程式に従う非圧縮・非粘性の流体であり、これはエネルギーの逆カスケード現象を表現する最小限のモデルと言える。

2次元乱流において微視的な乱流運動から巨視的なコヒーレント構造が生じるというプロセスは、統計力学を用いて探求されてきた。その試みは Onsager (1949) に遡るが、最も多く地球流体力学に应用されているのは Miller (1990) および Robert and Sommeria (1991) によって提案された Miller-Robert-Sommeria 理論(MRS 理論)である。しかし、MRS 理論では非線型・非凸の変分問題によって統計力学的平衡状態が定義され、その状態を具体的に数値計算で求めることは難しかった。そのため、これまで行われた地球物理学への MRS 理論の応用は多くの場合、Casimir 不変量の保存則を部分的にのみ考慮するなどの簡略化を施した理論に依っている。

MRS 理論は平衡統計力学の範疇に属する理論であり、それにより予言される統計力学的平衡状態は Euler 方程式の定常解、または剛体回転解である。これは乱流によって、混合エントロピーが最大となるまで渦度場の混合が進行した状態である。実際には、時間発展する渦度場あるいはそこで出現するコヒーレント構造は必ずしもこの平衡状態に至っているというわけではない。しかし、そのような非平衡的と言える状態においても、空間的に小さい範囲での双曲型運動や渦運動が、移流されつつも粒子に凍結するようにして長時

間持続することがある。このような構造は Lagrange 的コヒーレント構造と呼ばれる (Haller, 2015)。双曲型 Lagrange 的コヒーレント構造は、移流される粒子の周囲で双曲型運動によって渦度場の混合を促進する。それは、統計力学の対象となるような、より大規模なコヒーレント構造の形成につながる。

以上を踏まえ本論文では、オリジナルな MRS 理論によって定義される統計力学の平衡状態の新たな数値計算法を提案した。また、これまでは統計力学の平衡状態を数値計算で求めることが難しかったような初期渦度場に対して、新規に提案した手法を用いて統計力学の平衡状態を計算した。その結果を渦度場の長時間シミュレーションと比較することにより、MRS 理論の有効性を吟味した。さらに、本論文の後半部では、流れの双曲型領域、すなわち、双曲型 Lagrange 的コヒーレント構造が存在するための十分条件を満たす領域を判定するための Haller (2001) および Haller (2005) の基準を球面を含む曲面上に拡張した。具体的には、一般の 2 次元 Riemann 多様体において Euler 方程式に従う流体に適用できるように拡張した。この拡張によって、流れの領域に伴う曲率が material line の伸張に及ぼす効果を記述することが可能となった。さらに、数値計算によって、この効果の検証も行った。

第 1 章では、Onsager (1949) から MRS 理論に至るまでの 2 次元乱流の統計力学理論を概観した。また、Lagrange 的コヒーレント構造についてもこれまでの研究をレビューし、その重要性を述べた。以上の準備のもとで、本論文で展開される研究の背景を説明した。

第 2 章 MRS 理論の概説

第 2 章では、MRS 理論における統計力学の平衡状態の定義を説明し、統計力学の平衡状態における巨視的渦度場が Euler 方程式の定常解または剛体回転解を与えることを述べた。

統計力学の平衡状態は、エネルギー E の保存則に伴う制約条件およびその他の制約条件のもとで、混合エントロピー S_{mix} を最大化する状態を求める問題 (ミクロカノニカル問題) の解として定義されるのが通常である。しかし、実際には補助的に逆温度パラメータ β を固定し、エネルギー保存則に伴う制約条件を課さずに自由エネルギー $F_\beta = S_{\text{mix}} - \beta E$ を最大化する問題 (カノニカル問題) を考えることも多い。 β として負の値が許容されることは、2 次元乱流の統計力学の特徴である。これらふたつの問題において、臨界点の集合は等しいが、カノニカル問題における最大点がミクロカノニカル問題においても最大点を与えるとは限らない。

また、本論文では流れの領域として球面を考えている。球面のように対称性を持つ流れ領域では、帯状対称性を持つ統計力学の平衡状態が存在する。例えば、ある $\beta_c < 0$ が存在して、 $\beta > \beta_c$ でカノニカル問題の解は帯状対称性を持つ。このことは、Robert and Sommeria (1991) によって与えられた定

理の球面への拡張である。統計力学的平衡状態の数値計算では、帯状対称性を持つ混合エントロピーの極大とは限らない臨界点に探索点がトラップされることがあり、統計力学的平衡状態の計算の難しさの一因となっている。

MRS 理論において定義される統計力学的平衡状態は、その物理的な意味が大偏差原理によって保証されている。第 2 章の後半部分では、MRS 理論における大偏差原理 (e.g., Michel and Robert, 1994) をレビューした。大偏差原理から導かれる集中定理は、各点における渦度の値が保存則の制約下でランダムであるとみなせるとき、微視的渦度場の大多数が Young 測度の意味で混合エントロピーの最大状態の近傍に存在するということを主張する。また、2 つの異なる巨視的状态の近傍に存在する微視的渦度場の個数の比は、混合エントロピーの差によって見積もることが可能である。

第 3 章 球面上 2 次元乱流の統計力学的平衡状態の数値計算法

第 3 章では、MRS 理論において定義される統計力学的平衡状態の球面上における数値計算法を提案した。

カノニカル問題に対しては、Newton 法を用いた手法を提案した。球面を離散化し、各グリッドにおける巨視的状态の値 r_{ijk} および巨視的渦度場の球面調和関数展開係数 $\hat{\xi}_{m,n}, \hat{\eta}_{m,n}$ を変数に取ることで、カノニカル問題を離散化された形に書き下すことができる。このとき、カノニカル問題の臨界点は各制約条件に伴う Lagrange 未定乗数に関する非線型連立方程式を解くことによって得られる。ただし、非線型連立方程式を Newton 法によって解くためには、解の近傍に初期推定値を与えなくてはならない。通常これは難しいが、 $\beta = 0$ の場合は臨界点の存在は一意的であり、それは Newton 法で容易に求められる。この解から徐々に β の値を変化させ、非線型連立方程式の解の分枝を追跡することによって、一般の β についてカノニカル問題の臨界点を求めることができる。しかし、このようにして得られた臨界点は帯状対称性を持つ。そこで、非帯状な構造を持つ臨界点を探索するために、以下の bridge-building method を提案した。bridge-building method では、巨視的渦度場の球面調和関数展開係数と巨視的状态のグリッド値の間に存在する等式制約を 1 つ緩め、対応する Lagrange 未定乗数を固定することにより得られる変分問題を解く。Lagrange 未定乗数を変化させながらその解を追跡することで、帯状対称な臨界点から非帯状な臨界点を探索する。

ミクロカノニカル問題に対しては、巨視的渦度場が与えられたときに、巨視的状态のグリッド値をそれに従属させることで、巨視的渦度場の球面調和関数展開係数のみが混合エントロピー最大化の変数となるように問題を再定式化することができる。この再定式化によって、エネルギー保存の制約条件が定義する超曲面上で、勾配法を用いて混合エントロピーを最大化すること

が可能となる。ただし、巨視的渦度場の球面調和関数展開係数が取りうる値の範囲は一定の閉凸領域 (許容領域) に限られている。このため、許容領域の境界を近似する超曲面上で 1 次関数を最大化し、その最大点からエネルギーが初期渦度場の値に等しくなるように変位させることにより、探索の初期点を与えるという手法を新規に提案した。

これらの手法の適用例として、帯状な流れの順圧不安定によって生じる乱流状態の統計力学的平衡状態を計算した。その結果、上述したふたつの手法のいずれによっても、初期渦度場からの時間発展の最終状態に整合的な状態を混合エントロピーの臨界点として得た。この臨界点は東西波数 2 の構造を持つが、数値計算では東西波数 1 の臨界点も得られた。東西波数 1 の臨界点は混合エントロピーの極大点であり、その値は東西波数 2 の臨界点よりも大きかった。一方、東西波数 2 の臨界点は混合エントロピーの鞍点であることがわかった。

第 4 章 球面上における一般的な初期渦度場から生じる 2 次元乱流の統計力学的平衡状態

第 4 章では、第 3 章で提案した手法の応用として、球面上での一般的な初期渦度場について統計力学的平衡状態を数値計算で求めた。Dritschel et al. (2015) が長時間の時間積分の対象とした初期渦度場、およびそれに惑星渦度項を付加した初期渦度場について、統計力学的平衡状態を求めた。これらの初期渦度場は連続的に分布するため、数値計算を行うためにはこれらを離散的な渦度パッチによって近似する必要がある。渦度パッチは、初期渦度場に対応する巨視的渦度場の球面調和関数展開係数が許容領域の内部に存在するように設定した。第 3 章で提案したミクロカノニカル問題の数値的解法を適用し、エネルギー保存則の制約によって与えられる超曲面上で混合エントロピーの最大化を行った。

惑星渦度がゼロの場合、計算で求められた統計力学的平衡状態は正渦度の渦 2 つと負渦度の渦 2 つからなる 4 重極状態であった。惑星渦度がゼロではない場合でも、球面の回転角速度に対応するパラメータ Ω が小さい範囲では 4 重極状態が統計力学的平衡状態として得られた。しかし、 Ω がより大きくなると統計力学的平衡状態は帯状な状態へと遷移した。 Ω が小さい範囲において、統計力学的平衡状態は孤立渦の 4 重極状態であるという点で、初期渦度場からの時間積分の結果と整合している。しかし、孤立渦それぞれの空間的な構造は統計力学的平衡状態と時間積分の結果とで大きく異なった。統計力学的平衡状態では弱い渦度が広い範囲に分布しているが、時間積分の結果では強い渦度が狭い範囲に集中している。また、統計力学的平衡状態における巨視的渦度と巨視的流線関数の関係を表す $q-\psi$ 関係式はほとんど線型であった。本研究における統計力学的平衡状態の計算は、全 Casimir 不変量の保存

を考慮している。しかし、 $\bar{q}-\bar{\psi}$ 関係式の非線型性を高次の Casimir 不変量の保存則の効果に帰する議論 (Qi and Marston, 2014) を考慮すると、ほぼ線型の $\bar{q}-\bar{\psi}$ 関係式は、統計力学的平衡状態の決定において高次の Casimir 不変量の保存が実質的に効果を及ぼしていないことを意味する。

第 5 章 Riemann 多様体上の 2 次元流体に埋め込まれた物質線の引き延ばしと流れの双曲型領域

第 4 章の研究で明らかになった、球面上の一般的な初期渦度場における統計力学的平衡状態と時間積分で得られる状態の不一致は、時間発展の過程において渦度場の混合が不完全であることを示している。時間発展する渦度場では、渦が周囲と混合されず形を保つ領域と、あるいはその逆に、流れによって渦度場がフィラメント化されて周囲の渦度場と混合する領域がある。このような領域の特定には、各点の流体粒子が属する Lagrange 的コヒーレント構造を解析することが必要である。このような目的意識のもとで、一般の 2 次元 Riemann 多様体上で Euler 方程式に従う流れに埋め込まれた material line の線素の長さの 2 乗の時間 2 階微分を表す以下の式を導出した。

$$\frac{d^2}{dt^2}|\xi|^2 = -\langle \nabla_{\xi}(\text{grad } p), \xi \rangle - \langle R(\xi, \mathbf{u})\mathbf{u}, \xi \rangle + |\nabla_{\xi}\mathbf{u}|^2.$$

ここで、 ξ は粒子に凍結した曲線パラメータをもつ material line の接ベクトルであり、material line の線素ベクトルに対応する。また、 ∇ は Levi-Civita 接続、 R は曲率テンソルである。 t は時刻、 $\mathbf{u}$ は流体の速度ベクトル、 p は圧力である。上式を用いることによって、平面上の流れ場に対して定義された Haller (2001) および Haller (2005) の双曲型領域が 2 次元 Riemann 多様体上に拡張される。

また、上式の右辺第 2 項は多様体の曲率の効果を表し、多様体の曲率が負であるときに material line の伸びがする効果を表現する。この項の持つ効果を検証するために、球面や曲がったトーラス上での流れを解析的または数値的に調べた。特に、曲がったトーラス上で渦が乱流化する初期段階を数値計算することにより、負曲率の領域において渦のフィラメント化が促進されることを示した。

さらに、地球流体力学への応用として、成層圏周極渦を模した流れ (Mizuta and Yoden, 2001) について双曲型領域を計算した。双曲型領域の補集合とほとんど一致する楕円形領域の分布は、周極渦の中心部にある非混合領域とよく一致することが示された。

第6章 結言

第6章では第5章までの各章で行った研究の結果をまとめ、背景となった既存研究を引用しつつ本論文の結果の位置づけを行った。本論文では、MRS理論で定義される統計力学的平衡状態の新たな数値計算法を提案した。これまでの数値計算法では渦度パッチの個数がごく少数でない限り、統計力学的平衡状態を数値計算によって求めることは非現実的であった。提案した方法を応用することで、Dritschel et al. (2015) の初期渦度場について統計力学的平衡状態の計算を行い、統計力学によって予言されるコヒーレント構造と、時間発展の結果として現れる構造との差異を明らかにした。また、2次元 Riemann 多様体上で Euler 方程式に従う流体に埋め込まれた material line の伸縮の加速度を表す式を導いた。これにより Haller (2001, 2005) の双曲型領域の定義が球面などの曲面に拡張され、渦度場の混合を引き起こす双曲型 Lagrange 的コヒーレント構造の診断方法が新たに提供される。

以上の成果によって、Euler 方程式における力学系と統計力学平衡状態との関係の探索に関する視座や、非平衡統計力学を用いた渦のフィラメント化に関する定量化の可能性が新たに提示され、今後の研究の方針として与えられる。