

汎関数積分による Nelson 模型の紫外切断のくりこみ

Fumio Hiroshima (廣島文生)

Faculty of Mathematics, Kyushu University
Fukuoka, 819-0395, Japan
hiroshima@math.kyushu-u.ac.jp

1 はじめに

この論文では N -粒子ネルソン模型を考える. この模型は N 個のスピンのない荷電粒子とスカラーボゾンの線形な相互作用を表す模型である. フォック表現ではそのハミルトニアンは

$$H = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_I(x) dx \quad (1.1)$$

で与えられる, ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}$ 上の自己共役作用素である. ここで $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ は粒子の状態空間, $\mathcal{F}$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上のフォック空間でボゾンの状態空間を表す. フォック空間とは $\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}$ で定義される. ここで $\mathcal{F}^{(n)} = \bigotimes_{\text{sym}}^n L^2(\mathbb{R}^3)$ は n -ボゾン部分空間を表す. ただし $\mathcal{F}^{(0)} = \mathbb{C}$. $\mathcal{F}$ 上のノルムは $\|F\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{F}^{(n)}}^2$ で与えられる. 真空ベクトルを $\mathbb{1}_{\mathcal{F}} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots \in \mathcal{F}$ で表し, 混乱の危険がないときは簡単に $\mathbb{1}$ と書くことにする. N -粒子シュレディンガー作用素は

$$H_p = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta_j + V$$

で与えられる. $V: \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ はポテンシャルでかけ算作用素とみなす. $\Delta_j = \Delta_{x_j}$ は 3 次元ラプラシアンである. $a^*(f)$ と $a(f)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, は生成作用素と消滅作用素を表す. それらは正準交換関係 $[a(f), a^*(g)] = (f, g)$, $[a(f), a(g)] = 0 = [a^*(f), a^*(g)]$ を満たす. 形式的に $a^\sharp(f) = \int a^\sharp(k) \hat{f}(k) dk$ と書くこともある. $\omega(k)$ は dispersion relation を表す. この論文の大部分では $\omega(k) = |k|$ である. 場の自由ハミルトニアンを H_f とかき, これは ω の第 2 量子化作用素で定義される. つまり $H_f \prod_{j=1}^n a^*(f_j) \mathbb{1} = \sum_{j=1}^n a^*(f_1) \cdots a^*(\omega f_j) \cdots a^*(f_n) \mathbb{1}$, $H_f \mathbb{1} = 0$ となる. 形式的には $H_f = \int \omega(k) a^*(k) a(k) dk$ と表される. 相互作用は

$$H_I(x) = g \sum_{j=1}^N \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left(\hat{\varphi}(k) e^{ik \cdot x_j} a(k) + \hat{\varphi}(-k) e^{-ik \cdot x_j} a^*(k) \right) dk \quad (1.2)$$

と定義される. 我々は $\mathcal{H} \cong L^2(\mathbb{R}^{3N}; \mathcal{F})$ の同一視をする. つまり $F \in \mathcal{H}$ は $\mathbb{R}^{3N} \ni x \mapsto F(x) \in \mathcal{F}$ で $\int_{\mathbb{R}^{3N}} \|F(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx < \infty$ となるもの全体である. この同一視で相互作用は $(H_I F)(x) = H_I(x) F(x)$ となる. 関数 φ は荷電分布を表す. その結果 $\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) dx = 1$. この関数はハミルトニアンが作用素として well defined になるために必要であり紫外切断の役割を担っている. g は結合定数である. 仮定

$$\hat{\varphi}/\omega^{1/2}, \overline{\hat{\varphi}}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad \overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(-k) \quad (1.3)$$

のもとで相互作用 H_I は well defined で対称かつ $\mathbb{1} \otimes H_f$ に関して無限小になる. よって Kato-Rellich の定理から H は $D(H_p \otimes \mathbb{1}) \cap D(\mathbb{1} \otimes H_f)$ 上で自己共役になる. さらに赤外切断 (IR) が

$$\hat{\varphi}/\omega^{3/2} \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad (1.4)$$

によって導入されれば, スペクトルの下限に対する固有状態 $\Psi \in \mathcal{H}$ が存在する ([Spo98, BFS98, Ger00, Ara01, Sas05]). つまり基底状態が存在する. [LMS02, Hir06] で示されたように条件 (1.4) は基底状態存在の必要条件にもなっている.

この論文では H の荷電分布の 1 点極限を考える. つまり $\varphi(x) \rightarrow (2\pi)^{3/2}\delta(x)$ または $\hat{\varphi}(k) \rightarrow 1$. この極限の存在は [Nel64a] で作用素論的な手法 (Appendix C) で示されているが, 我々はこれを汎関数積分を使って証明する. 紫外切断の除去に関する論文として [GHPS12, HHS05] を挙げておく. また Nelson 自身も [Nel64b] で汎関数積分によるくりこみを考えていたようである.

さてこの極限をとるために我々は紫外切断関数として $\hat{\varphi}_\varepsilon(k) = e^{-\varepsilon|k|^2/2}$ をとる. この関数によってハミルトニアン H_ε を定義し $\varepsilon > 0$ を UV パラメーターとみなす. そして $H_\varepsilon - E_\varepsilon$ の $\varepsilon \downarrow 0$ 極限を考える. ここで E_ε はエネルギーくりこみ項である. これは具体的に後で与える. この論文の主定理は以下である.

- (1) 汎関数積分をつかって E_ε をペア相互作用の対角成分として導き出す.
- (2) $H_{\text{ren}} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (H_\varepsilon - E_\varepsilon)$ を熱半群の意味で示す.
- (3) H_{ren} のペア相互作用を導く.
- (4) H_{ren} の弱結合極限 (weak coupling limit) を求める.

2 パス測度によるエネルギーくりこみ

2.1 正則化されたハミルトニアンの汎関数積分表示

はじめに $\omega(k) = |k|$ としよう. いま $\mathbb{1}_\Lambda(k) = \begin{cases} 1, & \omega(k) < \Lambda \\ 0, & \omega(k) \geq \Lambda \end{cases}$ とし $\mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) = \mathbb{1} - \mathbb{1}_\Lambda(k)$ とおく. $\Lambda > 0$ を仮定する. これは (2.24), 補題 2.9 と系 2.21 で必要になる. 簡単のために次の仮定をする:

仮定 2.1 ポテンシャル V は有界かつ連続関数. 特に Kato-クラスである. つまり

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x \left[\int_0^t |V(B_s)| ds \right] = 0. \quad (2.1)$$

紫外切断のくりこみでは V は全く本質的ではなく, $V \equiv 0$ としても構わない. Kato-クラスについては Appendix A で性質をまとめている. Kato-クラスの性質はこの論文のいたるところで使う. カットオフ関数 $\hat{\varphi}_\varepsilon(k) = e^{-\varepsilon|k|^2/2} \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k)$, $\varepsilon \geq 0$, を考えよう. 正則化されたハミルトニアンを

$$H_\varepsilon = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \int_{\mathbb{R}^3}^\oplus H_I^\varepsilon(x) dx, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.2)$$

で定義する. ここで

$$H_I^\varepsilon(x) = g \sum_{j=1}^N \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left(\widehat{\varphi}_\varepsilon(k) e^{ik \cdot x_j} a(k) + \widehat{\varphi}_\varepsilon(-k) e^{-ik \cdot x_j} a^*(k) \right) dk \quad (2.3)$$

である. この論文の主目的は H_ε で $\varepsilon \downarrow 0$ の極限を考えることである.

$$E_\varepsilon = -\frac{g^2}{2} N \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) dk \quad (2.4)$$

としよう. ここで

$$\beta(k) = \frac{1}{\omega(k) + |k|^2/2}. \quad (2.5)$$

$E_\varepsilon \rightarrow -\infty$ ($\varepsilon \downarrow 0$) に注意せよ. 主定理では $H_\varepsilon - E_\varepsilon$ が $\varepsilon \downarrow 0$ で非自明な自己共役作用素 H_{ren} に収束することを示す. その極限を UV 正則化ネルソンハミルトニアンとよぶ.

定理 2.2 次を満たす自己共役作用素 H_{ren} が存在する:

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon - E_\varepsilon)} = e^{-tH_{\text{ren}}}, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

我々はこの定理を汎関数積分をつかって証明する. $(B_t)_{t \in \mathbb{R}} = (B_t^1, \dots, B_t^N)_{t \in \mathbb{R}}$ をブラウン運動とする. ここで $(B_t^j)_{t \in \mathbb{R}}$, $j = 1, \dots, N$, は独立な N 個の全実軸上で定義された $\mathbb{R}^3$ -値ブラウン運動で, ウィナー測度を備えた連続パス空間上の確率過程である. $\mathbb{E}^x[\dots]$ で時刻ゼロで x から出発するウィナー測度に関する期待値 (積分) を表す. $(F, e^{-2TH_\varepsilon}G)$ ([LHB11, Theorem 6.3]) のファインマン・カッツ公式はよく知られている. 特に, $F = f \otimes \mathbb{1}$ と $G = h \otimes \mathbb{1}$ に対しては次のようになる.

命題 2.3 $f, h \in L^2(\mathbb{R}^3)$ としよう. このとき

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_\varepsilon} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon} \right].$$

ここで $S_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{-T}^T dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)$ はペア相互作用でペアポテンシャルは $W_\varepsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik \cdot x} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) dk$ で与えられる.

2.2 くりこまれた作用

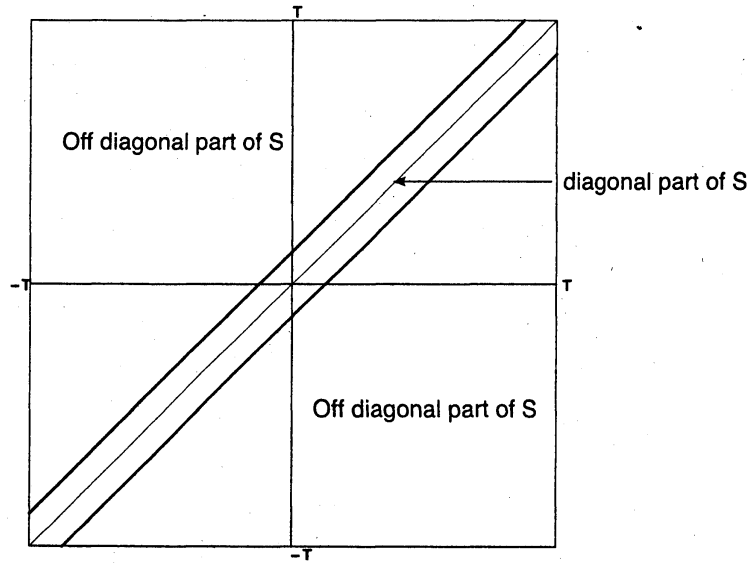
次の関数を考えよう.

$$\varphi_\varepsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik \cdot x - \omega(k)|t|}}{2\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) dk, \quad \varepsilon \geq 0. \quad (2.7)$$

ここで $\beta(k)$ は (2.5) で与えられるものである.

命題 2.4 関数 S_0^{ren} で次を満たすものが存在する:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} (S_\varepsilon - 4NT\varphi_\varepsilon(0,0))} \right] = \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}} \right]. \quad (2.8)$$

Figure 1: S_ε の対角成分と非対角成分

$W_\varepsilon(x, t)$ は滑らかで, $W_\varepsilon(x, t) \rightarrow W_0(x, t)$ ($\varepsilon \downarrow 0$) が $(x, t) \neq (0, 0)$ で成り立つ. ここで

$$W_0(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-ik \cdot x} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_\Lambda(k) dk. \quad (2.9)$$

しかし $W_\varepsilon(0, 0) \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \downarrow 0$) である. つまり $W_0(x, t)$ は $(0, 0)$ で特異性をもつ. (2.8) は非自明である. これを証明しよう.

今から $T > 0$ を固定する. $\varepsilon \downarrow 0$ のとき相互作用の対角成分だけが特異な項である. また $0 < \tau \leq T$ を固定し, $[t]_T = -T \vee t \wedge T$ としよう. 正則化された相互作用を対角成分と非対角成分にわけ: $S_\varepsilon = S_\varepsilon^D + S_\varepsilon^{\text{OD}}$. ここで

$$S_\varepsilon^D = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s) \quad (2.10)$$

そして

$$S_\varepsilon^{\text{OD}} = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{[s+\tau]_T}^T dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s). \quad (2.11)$$

S_ε^D は S_ε を対角成分の近傍 $\{(t, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |t| \leq T\}$ で積分したもの, そして $S_\varepsilon^{\text{OD}}$ はそれ以外の部分を表す. $\tau = T$ のときは $S_\varepsilon^{\text{OD}} = 0$ となる. 次の補題はすぐにわかる.

補題 2.5 パスごとに $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} S_\varepsilon^{\text{OD}} = S_0^{\text{OD}}$. ここで S_0^{OD} は $S_\varepsilon^{\text{OD}}|_{\varepsilon=0}$ である.

確率積分をつかえば解析が困難な項 S_ε^D を評価できる.

補題 2.6 ε によらない定数 $c > 0$ で次をみたすものがある:

$$\begin{aligned} |\nabla \varphi_\varepsilon(x, t)| &\leq c|t|^{-1}, \quad t \neq 0 \\ |\nabla \varphi_\varepsilon(x, t)| &\leq c|x|^{-1}, \quad |x| \neq 0. \end{aligned}$$

さらに $\varphi_0 - \varphi_\varepsilon$ に対しても, 定数 $c_\varepsilon > 0$ で次を満たすものがある: $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} c_\varepsilon = 0$ つまり

$$\begin{aligned} |\nabla \varphi_\varepsilon(x, t) - \nabla \varphi_0(x, t)| &\leq c_\varepsilon |t|^{-1}, \quad t \neq 0, \\ |\nabla \varphi_\varepsilon(x, t) - \nabla \varphi_0(x, t)| &\leq c_\varepsilon |x|^{-1}, \quad |x| \neq 0. \end{aligned}$$

証明. はじめの不等式は

$$|\nabla \varphi_\varepsilon(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2(\omega(k) + |k|^2/2)} e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) dk \leq c \int_\Lambda e^{-rt} dr$$

よりわかる. 次に第二の不等式を証明しよう. 角度変数で積分すると

$$\varphi_\varepsilon(x, t) = 2\pi \int_\Lambda \frac{e^{-\varepsilon r^2 - r|t|} \sin(r|x|)}{r(2+r)} \frac{1}{|x|} dr. \quad (2.12)$$

(2.12) の微分は

$$\nabla \varphi_\varepsilon(x, t) = \frac{2\pi x}{|x|^2} \int_\Lambda \frac{e^{-\varepsilon r^2/|x|^2 - |t|r/|x|}}{r(2|x|+r)} (r \cos r - \sin r) dr \quad (2.13)$$

となり, 右辺を評価すると

$$|\nabla \varphi_\varepsilon(x, t)| \leq \int_0^1 \frac{Cr^3}{r^2} dr + \left| \int_1^\infty \frac{e^{-\varepsilon r^2/|x|^2 - |t|r/|x|}}{(2|x|+r)} \cos r dr \right| + \int_1^\infty \frac{1}{r^2} dr.$$

ここで全ての $r \in [0, 1]$ で $|r \cos r - \sin r| \leq Cr^3$ をつけた. 真ん中の項の積分は有界なので補題が示せた. $\square$

補題 2.7 もし $\varepsilon > 0$ ならば

$$\begin{aligned} S_\varepsilon^D &= 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) ds - 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s) ds \\ &\quad + 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla \varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s) \cdot dB_t^i. \end{aligned} \quad (2.14)$$

証明. $\varphi_\varepsilon(x, t)$ は次の方程式の解である:

$$\left(\partial_t + \frac{1}{2} \Delta \right) \varphi_\varepsilon(x, t) = -W_\varepsilon(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0. \quad (2.15)$$

i と j を固定する. このとき伊藤の公式から

$$\begin{aligned} &\varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s) - \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) \\ &= \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla \varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s) \cdot dB_t^i + \int_s^{[s+\tau]_T} \left(\partial_t + \frac{1}{2} \Delta \right) \varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s) dt. \end{aligned} \quad (2.16)$$

よって (2.15) から

$$\begin{aligned} & \int_s^{[s+\tau]T} W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s) dt \\ &= \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) - \varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]T}^i - B_s^j, [s+\tau]T-s) + \int_s^{[s+\tau]T} \nabla \varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s) \cdot dB_t^i \end{aligned} \quad (2.17)$$

が従う. これを S_ε^D に代入すれば主張が示せる. $\square$

の右辺第一項の $i = j$ の部分 $= 4NT\varphi_\varepsilon(0, 0)$ がまさに発散項になっているので, くりこまれた作用を次のように定義することが示唆される:

$$S_\varepsilon^{\text{ren}} = S_\varepsilon - 4NT\varphi_\varepsilon(0, 0), \quad \varepsilon > 0. \quad (2.18)$$

これは $S_\varepsilon^{\text{ren}} = S_\varepsilon^{\text{OD}} + X_\varepsilon + Y_\varepsilon + Z_\varepsilon$ のように表せる. ここで

$$X_\varepsilon = 2 \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) ds, \quad (2.19)$$

$$Y_\varepsilon = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]T} \nabla \varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s) \cdot dB_t^i, \quad (2.20)$$

$$Z_\varepsilon = -2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]T}^i - B_s^j, [s+\tau]T-s) ds. \quad (2.21)$$

補題 2.8 ある定数 c_z と c_s が存在して $|Z_\varepsilon| \leq c_z T$ と $|S_\varepsilon^{\text{OD}}| \leq c_s T^2$ がパスと $\varepsilon \geq 0$ に一様に成立する.

証明.

$$|Z_\varepsilon| \leq 4\pi N^2 \left(\int_{-T}^{T-\tau} ds \int_\Lambda \frac{e^{-r\tau}}{1+r/2} dr + \int_{T-\tau}^T ds \int_\Lambda \frac{e^{-r(T-s)}}{1+r/2} dr \right) \leq c_z T$$

が適当な $c_z > 0$ で成り立つ. 不等式 $|S_\varepsilon^{\text{OD}}| \leq c_s T^2$ も同じようにして得られる. $\square$

補題 2.9 $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|X_\varepsilon|] < \infty$ が全ての $\varepsilon \geq 0$ で成立する.

証明.

$$X_\varepsilon = \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T ds \frac{2\pi}{|B_s^i - B_s^j|} \int_\Lambda \frac{\sin \sqrt{r|B_s^i - B_s^j|}}{r + r^2/2} e^{-\varepsilon r^2} dr, \quad \varepsilon \geq 0 \quad (2.22)$$

に注意しよう. その結果

$$\mathbb{E}^x[|X_\varepsilon|] \leq \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T ds \mathbb{E}^x \left[\frac{2\pi}{|B_s^i - B_s^j|} \right] \int_\Lambda \frac{1}{r + r^2/2} dr. \quad (2.23)$$

仮定 $\Lambda > 0$ から

$$\int_{\Lambda}^{\infty} \frac{1}{r + r^2/2} dr < \infty. \quad (2.24)$$

$\sum_{i \neq j}^N |x^i - x^j|^{-1}$ は $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ (Appendix A を参照せよ) 上の Kato-クラスなので,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x \left[\sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T \frac{ds}{|B_s^i - B_s^j|} \right] < \infty.$$

よって (2.23) は有界となり補題が従う. $\square$

補題 2.10 $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon|] < \infty$ が全ての $\varepsilon \geq 0$ で成立し, $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon - Y_0|] = 0$ となる.

証明. Fubini の定理より確率積分とルベグ積分が交換できて Y_ε は

$$Y_\varepsilon = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left(\int_{[t-\tau]_T}^t \nabla \varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s) ds \right) \cdot dB_t^i \quad (2.25)$$

と表せる. これは $\varepsilon \geq 0$ ごとに確率変数である. 伊藤のアイソメトリから

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon - Y_0|^2] \\ &= 4 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \mathbb{E}^0 \left[\left| \sum_{j=1}^N \int_{[t-\tau]_T}^t (\nabla \varphi_\varepsilon - \nabla \varphi_0)(B_t^i - B_s^j + x^i - x^j, t-s) ds \right|^2 \right] dt \\ &\leq 4c_\varepsilon \sqrt{N} \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \mathbb{E}^0 \left[\left(\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-\theta} |t-s|^{-(1-\theta)} ds \right)^2 \right] dt. \end{aligned}$$

ここで補題 2.6 と不等式 $|\nabla \varphi_\varepsilon(x, t) - \nabla \varphi_0(x, t)| \leq c_\varepsilon |x|^{-\theta} |t|^{-(1-\theta)}$, $\theta \in [0, 1]$ をえるために補間をつかった. ここで $c_\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon \downarrow 0$) に注意せよ. 適当な $\frac{1}{2} < \theta < 1$ で Schwarz 不等式から

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon - Y_0|^2] \\ &\leq 4c_\varepsilon \sqrt{N} \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \mathbb{E}^0 \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta} ds \right] \left(\int_{[t-\tau]_T}^t |t-s|^{-2(1-\theta)} ds \right) dt \\ &\leq 4c_\varepsilon \tau^{2\theta-1} \sqrt{N} \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left(\int_{[t-\tau]_T}^t \mathbb{E}^0[|B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}] ds \right) dt. \quad (2.26) \end{aligned}$$

$x^i - x^j = X$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T dt \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |u - v + X|^{-2\theta} p_t(u) p_s(v) du dv &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{-2\theta} p_{t+s}(u - X) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|u - X|} \frac{1}{|u|^{2\theta}} du. \end{aligned}$$

また $|x|^{-2\theta} \in L^p(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ が $p > 3/2$ で成立するから, $|x|^{-2\theta}$ は Kato-クラスなので

$$\sup_{X \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|u - X|} \frac{1}{|u|^{2\theta}} du < \infty.$$

Appendix A を参照せよ. この結果 $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{-T}^T dt \int_{[t-\tau]_T}^t ds \mathbb{E}^x[|B_t^i - B_s^j|^{-2\theta}] < \infty$ が従う. ゆえに

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon - Y_0|^2] \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0) \quad (2.27)$$

が (2.26) と $c_\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon \downarrow 0$) からえられる. さらに $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon|] < \infty$ が不等式

$$\mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon|^2] \leq 4c\tau^{2\theta-1} \sqrt{N} \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T dt \int_{[t-\tau]_T}^t \mathbb{E}^x[|B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}] ds$$

から従う. □

$x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^{3N}$ に対して

$$\begin{aligned} S_\varepsilon^{\text{OD},T}(x) &= 2 \sum_{i \neq j}^N \int_0^{2T} ds \int_{[s+\tau]_T}^T W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j + x^i - x^j, t-s) dt, \\ X_\varepsilon^T(x) &= 2 \sum_{i,j=1}^N \int_0^{2T} \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j + x^i - x^j, 0) ds, \\ Y_\varepsilon^T(x) &= 2 \sum_{i,j=1}^N \int_0^{2T} ds \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla \varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j + x^i - x^j, t-s) \cdot dB_t^i, \\ Z_\varepsilon^T(x) &= -2 \sum_{i,j=1}^N \int_0^{2T} \varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j + x^i - x^j, [s+\tau]_T - s) ds. \end{aligned}$$

補題 2.11 $\alpha \in \mathbb{R}$ としよう. このとき定数 $c_U(\alpha) > 0$ ($\varepsilon \geq 0$ に依っていない) で

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0[e^{\alpha U_\varepsilon^T(x)}] < c_U(\alpha), \quad \varepsilon \geq 0, \quad U = S^{\text{OD}}, X, Y, Z \quad (2.28)$$

となるものがある.

証明. $U = X$ としよう. 不等式 $|X_\varepsilon^T(x)| \leq C \sum_{i \neq j}^N \int_0^{2T} |B_s^i - B_s^j|^{-1} ds$ と $\sum_{i \neq j}^N |x^i - x^j|^{-1}$ が Kato-クラスであることから

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left| \mathbb{E}^0[e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)}] \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x \left[e^{|\alpha| \sum_{i \neq j} \int_0^{2T} |B_s^i - B_s^j|^{-1} ds} \right] < \infty. \quad (2.29)$$

$U = Y$ としよう. $\Phi_t = \Phi_t(x) = (\Phi_t^1, \dots, \Phi_t^N)$ とし,

$$\Phi_t^i = \Phi_t^i(x) = 2 \sum_{j=1}^N \int_{[t-\tau]_T}^t \nabla \varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j + x^i - x^j, t-s) ds$$

としよう. このとき $Y_\varepsilon^T(x)$ は次のように表せる

$$Y_\varepsilon^T(x) = \int_0^{2T} \Phi_t \cdot dB_t. \quad (2.30)$$

Girsanov 定理から $\mathbb{E}^0 \left[e^{2\alpha \int_0^{2T} \Phi_t \cdot dB_t - \frac{1}{2}(2\alpha)^2 \int_0^{2T} |\Phi_t|^2 dt} \right] = 1$ と不等式

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E}^0 \left[e^{\alpha Y_\varepsilon^T(x)} \right] \right)^2 &\leq \mathbb{E}^0 \left[e^{2\alpha \int_0^{2T} \Phi_t \cdot dB_t - \frac{1}{2}(2\alpha)^2 \int_0^{2T} |\Phi_t|^2 dt} \right] \mathbb{E}^0 \left[e^{2\alpha^2 \int_0^{2T} |\Phi_t|^2 dt} \right] \\ &= \mathbb{E}^0 \left[e^{2\alpha^2 \int_0^{2T} |\Phi_t|^2 dt} \right] \end{aligned}$$

をえる. (2.26) と同様に $\int_0^{2T} |\Phi_t|^2 dt \leq 4c\tau^{2\theta-1} \sqrt{N}Q(x)$. ここで c は補題 2.6 の定数である. これは ε によっていない. そして

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^N \int_0^{2T} ds \int_s^{[s+\tau]T} |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta} dt.$$

$\frac{1}{2} < \theta < 1$ に注意する. よって $\left(\mathbb{E}^0 \left[e^{\alpha Y_\varepsilon^T(x)} \right] \right)^2 \leq \mathbb{E}^0 [e^{\gamma Q(x)}]$. ここで $\gamma = 8c\sqrt{N}\alpha^2\tau^{2\theta-1}$. Jensen 不等式から

$$\mathbb{E}^0 [e^{\gamma Q(x)}] \leq \int_0^{2T} \frac{ds}{2T} \mathbb{E}^0 \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_s^{[s+\tau]T} |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta} dt} \right]. \quad (2.31)$$

(2.31) の右辺を $\int_0^{2T} = \int_0^{2T-\tau} + \int_{2T-\tau}^{2T}$ とわける. 最初の項を考える. $[s+\tau]T = s+\tau$ だから,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2T-\tau} \frac{ds}{2T} \mathbb{E}^0 \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_s^{[s+\tau]T} |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta} dt} \right] \\ &= \int_0^{2T-\tau} \frac{ds}{2T} \mathbb{E}^0 \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_{s+t}^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta} dt} \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

$\mathcal{F}_s = \sigma(B_r^j; 0 \leq r \leq s, j = 1, \dots, N)$ を自然な filtration とする. 条件付き期待値をとって, マルコフ性を使うと

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^0 \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_{s+t}^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta} dt} \right] &= \mathbb{E}^0 \left[\mathbb{E}^0 \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_{s+t}^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta} dt} \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^0 \left[\mathbb{E}^{B_s} \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_t^i - B_0^j + x^i - x^j|^{-2\theta} dt} \right] \right]. \end{aligned}$$

さらに計算すると

$$\begin{aligned} &= (2\pi s)^{-3N/2} \int_{\mathbb{R}^{3N}} e^{-|y|^2/2s} \mathbb{E}^y \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_t^i - B_0^j + x^i - x^j|^{-2\theta} dt} \right] dy \\ &= (2\pi s)^{-3N/2} \int_{\mathbb{R}^{3N}} e^{-|y|^2/2s} \prod_{i=1}^N \mathbb{E}^0 \left[e^{2T\gamma \sum_{j=1}^N \int_0^\tau |B_t^i + (x+y)^i - (x+y)^j|^{-2\theta} dt} \right] dy. \end{aligned}$$

$|x|^{-2\theta}$ が Kato-クラスなので

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 [e^{\beta \int_0^\tau |B_s^i + x|^{-2\theta} ds}] = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x [e^{\beta \int_0^\tau |B_s^i|^{-2\theta} ds}] < \infty$$

が全ての $\beta \in \mathbb{R}$ (Appendix A を参照せよ) で成り立つ。これから

$$\sup_{x, y \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 \left[e^{2T\gamma \sum_{j=1}^N \int_0^\tau |B_t^i + (x+y)^i - (x+y)^j|^{-2\theta} dt} \right] < \infty. \quad (2.33)$$

特に

$$\begin{aligned} & \int_0^{2T-\tau} \frac{1}{2T} \mathbb{E}^x \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_s^{[s+\tau]_T} |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta} dt} \right] ds \\ & \leq \frac{2T-\tau}{2T} \sup_{x, y \in \mathbb{R}^3} \prod_{i=1}^N \mathbb{E}^0 \left[e^{2T\gamma \sum_{j=1}^N \int_0^\tau |B_t^i + (x+y)^i - (x+y)^j|^{-2\theta} dt} \right] < \infty. \end{aligned} \quad (2.34)$$

次に第2項を考える。 $[s+\tau]_T = 2T$ 。上と同様に

$$\begin{aligned} & \int_{2T-\tau}^{2T} \frac{1}{2T} \mathbb{E}^x \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_s^{[s+\tau]_T} |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta} dt} \right] ds \\ & \leq \frac{\tau}{2T} \sup_{x, y \in \mathbb{R}^3} \prod_{i=1}^N \mathbb{E}^0 \left[e^{2T\gamma \sum_{j=1}^N \int_0^\tau |B_t^i + (x+y)^i - (x+y)^j|^{-2\theta} dt} \right] < \infty. \end{aligned} \quad (2.35)$$

よって (2.34) と (2.35) から

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 [e^{2\alpha Y_\epsilon^T(x)}] \leq \left(\sup_{x, y \in \mathbb{R}^3} \prod_{i=1}^N \mathbb{E}^0 \left[e^{2T\gamma \sum_{j=1}^N \int_0^\tau |B_t^i + (x+y)^i - (x+y)^j|^{-2\theta} dt} \right] \right)^{1/2} < \infty. \quad (2.36)$$

最後に $U = Z$ と $U = S^{\text{OD}}$ の場合を考える。 $|Z_\epsilon^T(x)| \leq c_z T$ と $|S_\epsilon^{\text{OD}, T}(x)| \leq cT^2$ から $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}[e^{\alpha Z_\epsilon^T(x)}] < \infty$ と $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}[e^{\alpha S_\epsilon^{\text{OD}, T}(x)}] < \infty$ がわかる。 $\square$

補題 2.12 $\alpha \in \mathbb{R}$ とし $f, h \in L^2(\mathbb{R}^3)$ としよう。このとき

$$\int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x [f(B_{-T}) h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\alpha S_\epsilon^{\text{ren}}}] < \infty$$

が全ての $\epsilon \geq 0$ で成り立つ。

証明. 分解 $S_\epsilon^{\text{ren}} = S_\epsilon^{\text{OD}} + X_\epsilon + Y_\epsilon + Z_\epsilon$ を思い出そう。Schwarz 不等式から

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x [|f(B_{-T}) h(B_T)| e^{\alpha S_\epsilon^{\text{ren}}}] \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^0 \left[|f(x) h(B_{2T} + x)| e^{-\int_0^{2T} V(B_s + x) ds} e^{\alpha (S_\epsilon^{\text{OD}, T}(x) + X_\epsilon^T(x) + Y_\epsilon^T(x) + Z_\epsilon^T(x))} \right] \\ & \leq \|f\| \|h\| \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left(\mathbb{E}^0 \left[e^{-2 \int_0^{2T} V(B_s + x) ds} e^{2\alpha (S_\epsilon^{\text{OD}, T}(x) + X_\epsilon^T(x) + Y_\epsilon^T(x) + Z_\epsilon^T(x))} \right] \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

補題 2.11 と V が Kato-クラスより

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 \left[e^{-2 \int_0^{2T} V(B_s + x) ds} e^{2\alpha (S_\epsilon^{\text{OD}, T}(x) + X_\epsilon^T(x) + Y_\epsilon^T(x) + Z_\epsilon^T(x))} \right] < \infty,$$

そして補題が示せた。 $\square$

2.3 くりこまれたハミルトニアン

補題 2.13 もし $\alpha \in \mathbb{R}$ ならば

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}^0 \left[|e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)} - e^{\alpha X_0^T(x)}| \right] = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{3N}. \quad (2.38)$$

証明. $|X_\varepsilon^T(x)| \leq \int_0^{2T} V_C(B_s^1 + x^1, \dots, B_s^N + x^N) ds$ と

$$\mathbb{E}^0 \left[|e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)} - e^{\alpha X_0^T(x)}| \right] \leq 2\mathbb{E}^0 \left[|e^{\alpha \int_0^{2T} V_C(B_s^1 + x^1, \dots, B_s^N + x^N) ds}| \right] < \infty$$

がわかる. x ごとに $X_\varepsilon^T(x) \rightarrow X_0^T(x)$ a.s. なのでルベグの優収束定理より (2.38) がわかる. $\square$

補題 2.14 もし $\alpha \in \mathbb{R}$ ならば

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 [|e^{\alpha U_\varepsilon^T(x)} - e^{\alpha U_0^T(x)}|] = 0, \quad U = S^{\text{OD}}, Y, Z. \quad (2.39)$$

証明. $U = Y$ としよう. $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 [|e^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x) - Y_0^T(x))} - 1|] \rightarrow 0$ を示せば十分である.

$$\mathbb{E}^0 \left[\left(e^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x) - Y_0^T(x))} - 1 \right)^2 \right] = \mathbb{E}^0 \left[e^{2\alpha(Y_\varepsilon^T(x) - Y_0^T(x))} \right] + 1 - 2\mathbb{E}^0 \left[e^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x) - Y_0^T(x))} \right] \quad (2.40)$$

はわかる. 以下で $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}^0 [e^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x) - Y_0^T(x))}] = 1$ を示そう. 確率変数 $\delta\Phi_t = \delta\Phi_t(x) = (\delta\Phi_t^1, \dots, \delta\Phi_t^N)$ と

$$\delta\Phi_t^i = \delta\Phi_t^i(x) = 2 \sum_{j=1}^N \int_{[t-\tau]_T}^t (\nabla\varphi_\varepsilon - \nabla\varphi_0)(B_t^i - B_s^j + x^i - x^j, t-s) ds$$

を定義すれば

$$Y_\varepsilon^T(x) - Y_0^T(x) = \int_0^{2T} \delta\Phi_t(x) dt.$$

Girsanov の定理から $1 = \mathbb{E}^0 [e^{\alpha \int_0^{2T} \delta\Phi_t \cdot dB_t - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^{2T} |\delta\Phi_t|^2 dt}]$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ ごとに成り立つから

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left(\mathbb{E}^0 \left[e^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x) - Y_0^T(x))} \right] - 1 \right)^2 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 \left[e^{2\alpha \int_0^{2T} \delta\Phi_t \cdot dB_t} \right] \mathbb{E}^0 \left[\left(1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2} \int_0^{2T} |\delta\Phi_t|^2 dt} \right)^2 \right]. \quad (2.41)$$

再び $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 \left[e^{2\alpha \int_0^{2T} \delta\Phi_t \cdot dB_t} \right] \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left(\mathbb{E}^0 \left[e^{4\alpha^2 \int_0^{2T} |\delta\Phi_t|^2 dt} \right] \right)^{1/2}$. さらに

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 \left[\left(1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2} \int_0^{2T} |\delta\Phi_t|^2 dt} \right)^2 \right] \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 \left[\left| \frac{\alpha^2}{2} \int_0^{2T} |\delta\Phi_t|^2 dt \right|^2 \right] \rightarrow 0 \quad (2.42)$$

($\varepsilon \downarrow 0$). よって (2.42) が補題 2.10 からわかる. $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left(\mathbb{E}^0 \left[e^{4\alpha^2 \int_0^{2T} |\delta\Phi_t|^2 dt} \right] \right)^{1/2}$ は ε に関して一様有界である. これは補題 2.12 と同じようにして示せる. よって (2.41) は $\varepsilon \downarrow 0$ のときゼロに収束し $U = Y$ に対して (2.39) が示せた.

$U = Z$ としよう. $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x [e^{\alpha(Z_\varepsilon - Z_0)} - 1] \rightarrow 0$ を示せばいい.

$$Z_\varepsilon(x) - Z_0(x)$$

$$= 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ik \cdot (B_{[s+\tau]T-s}^i + x^i - B_{[s+\tau]T-s}^j - x^j)} e^{-([s+\tau]T-s)\omega(k)}}{\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) (1 - e^{-\varepsilon|k|^2}) dk$$

がわかる. $\eta_\varepsilon(x) = \alpha(Z_\varepsilon(x) - Z_0(x))$ としよう. 直接 $|\eta_\varepsilon(x)|^n \leq c^n \alpha^n T^n \varepsilon^n$ が x に依っていないある定数 c で成り立つことがわかる. よって $\mathbb{E}^0[e^{\eta_\varepsilon(x)}] = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \mathbb{E}^0[\eta_\varepsilon(x)^n]$. そして

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \mathbb{E}^0[|\eta_\varepsilon(x)|^n] \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} c^n T^n \varepsilon^n \rightarrow 0$$

$(\varepsilon \downarrow 0)$ が x に一様に成り立つ. よって (2.39) が $U = Z$ のとき成り立つ. $U = S^{\text{OD}}$ のときも (2.39) と同様にわかる. $\square$

補題 2.15 $\alpha \in \mathbb{R}$ とし $f, h \in L^2(\mathbb{R}^3)$ としよう. このとき

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x [f(B_{-T}) h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\alpha S_\varepsilon^{\text{ren}}}] \\ = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x [f(B_{-T}) h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\alpha S_0^{\text{ren}}}]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

証明. $A_\varepsilon = A_\varepsilon(x) = \alpha(S_\varepsilon^{\text{OD},T}(x) + Y_\varepsilon^T(x) + Z_\varepsilon^T(x))$ とおこう. そうすると $dx dP^x$ のもとでのブラウン運動のシフト不変性と telescoping から

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[f(B_{-T}) h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} (e^{\alpha S_\varepsilon^{\text{ren}}} - e^{\alpha S_0^{\text{ren}}}) \right] \right| \\ & \leq e^{2T\|V\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^3} dx |f(x)| \mathbb{E}^0 \left[|h(B_{2T} + x)| \left(e^{A_\varepsilon(x) + \alpha X_\varepsilon^T(x)} - e^{A_0(x) + \alpha X_0^T(x)} \right) \right] \\ & \leq e^{2T\|V\|_\infty} \|f\| \|h\| \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left(\mathbb{E}^0[|e^{A_\varepsilon(x)} - e^{A_0(x)}|^4] \mathbb{E}^0[e^{4\alpha X_\varepsilon^T(x)}] \right)^{1/4} \\ & \quad + e^{2T\|V\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^3} dx |f(x)| E_\varepsilon(x) \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (\mathbb{E}^0[e^{4A_0}])^{1/4}. \end{aligned}$$

ここで $E_\varepsilon(x) = (\mathbb{E}^0[|h(B_{2T} + x)|^2])^{1/2} \left(\mathbb{E}^0[(e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)} - e^{\alpha X_0^T(x)})^4] \right)^{1/4}$. 右辺の各項がゼロに収束することを示す. $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0[e^{4\alpha X_\varepsilon^T(x)}]$ と $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0[e^{4A_0}]$ の両方は ε に関して一様有界が補題 2.11 からわかる. 補題 2.14 で $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0[|e^{A_\varepsilon(x)} - e^{A_0(x)}|^4] = 0$ が示されているので最初の項はゼロに収束する. さらに

$$E_\varepsilon(x) \leq (\mathbb{E}^0[|h(B_{2T} + x)|^2])^{1/2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left(\mathbb{E}^0[(e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)} - e^{\alpha X_0^T(x)})^4] \right)^{1/4} \in L^1(\mathbb{R}^{3N}).$$

補題 2.13 から $\mathbb{E}^0[(e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)} - e^{\alpha X_0^T(x)})^4] \rightarrow 0$ ($\varepsilon \downarrow 0$) が全ての $x \in \mathbb{R}^{3N}$ でなりたつ. よってルベグ優収束定理から第 2 項がゼロに収束することがわかる. $\square$

補題 2.16 次の成り立つ:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (f \otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}} \right] dx. \quad (2.44)$$

ここで

$$\begin{aligned} S_0^{\text{ren}} &= 2 \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T \varphi_0(B_s^i - B_s^j, 0) ds + 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^T \nabla \varphi_0(B_t^i - B_s^j, t-s) \cdot dB_t \\ &\quad - 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varphi_0(B_T^i - B_s^j, T-s) ds, \end{aligned} \quad (2.45)$$

そして S_0^{ren} の被積分関数は

$$\begin{aligned} \varphi_0(X, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ikX} e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) dk, \\ \nabla \varphi_0(X, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-ike^{-ikX} e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) dk. \end{aligned}$$

証明.

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{\text{ren}}} \right] dx \quad (2.46)$$

である. 右辺は $\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x [\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}}] dx$ ($\varepsilon \downarrow 0$) に収束する. よって (2.44) がわかる. また

$$\begin{aligned} S_0^{\text{ren}} &= 2 \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T \varphi_0(B_s^i - B_s^j, 0) ds + 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]T} \nabla \varphi_0(B_t^i - B_s^j, t-s) \cdot dB_t \\ &\quad - 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varphi_0(B_{[s+\tau]T}^i - B_s^j, [s+\tau]T-s) ds \end{aligned} \quad (2.47)$$

なので $\tau = T$ とすれば (2.45) がわかる. $\square$

さて $f \otimes \mathbb{1}$ からもっと一般的なベクトル $f \otimes F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) \mathbb{1}$ へ拡張する. ここで $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $\phi(f)$ はスカラー場を表す: $\frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(\hat{f}) + a(\hat{f}))$. ここで $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$. そのため e^{-2TH_ε} のファインマン・カッツ公式を紹介しておく.

$$H_{-k}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \hat{f} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n), |\cdot|^{-k/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

とし, ノルムを $\|f\|_{H_{-k}(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 |x|^{-k} dx$ で与える. ユークリッド場は確率空間 (Q_E, Σ_E, μ_E) 上のガウス型確率変数族 $\{\phi_E(F), F \in H_{-1}(\mathbb{R}^4)\}$ である. 写像 $F \mapsto \phi_E(F)$ は線形で平均ゼロ, 分散は $\mathbb{E}_{\mu_E}[\phi_E(F)\phi_E(G)] = \frac{1}{2}(F, G)_{H_{-1}(\mathbb{R}^4)}$. ユークリッド場の性質は Appendix B にまとめておく. 以下, $\mathcal{H}$ と $\mathcal{F}$ -値 L^2 関数の集合 $L^2(\mathbb{R}^{3N}; \mathcal{F})$ を同一視する. つまり $F \in \mathcal{H}$ は $\mathbb{R}^{3N} \ni x \mapsto F(x) \in \mathcal{F}$ とみなされ, $\int_{\mathbb{R}^{3N}} \|F(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx < \infty$.

命題 2.17 $F, G \in \mathcal{H}$ としよう. このとき

$$\begin{aligned} & (F, e^{-2TH_\varepsilon} G) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} \mathbb{E}_{\mu_E} \left[J_{-T} F(B_{-T}) \cdot e^{-\phi_E(\int_{-T}^T \sum_{j=1}^N \delta_s \otimes \bar{\varphi}_\varepsilon(\cdot - B_s^j) ds)} J_T G(B_T) \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

ここで $\bar{\varphi}_\varepsilon(x) = \left(e^{-\varepsilon|\cdot|^2/2} \mathbb{1}_\Lambda^\perp / \sqrt{\omega} \right)^\vee(x)$. そして $\delta_s(x) = \delta(x-s)$ は s に重みのあるデルタ関数である.

証明. 証明は [LHB11, Theorem 6.3] を参照せよ. $\square$

補題 2.18 $\rho_j \in H_{-1/2}(\mathbb{R}^3), j=1, 2, f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N}), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ としよう. このとき

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (f \otimes e^{\alpha\phi(\rho_1)} \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes e^{\beta\phi(\rho_2)} \mathbb{1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}} + \frac{1}{4} \xi} \right] dx. \end{aligned} \quad (2.49)$$

ここで

$$\begin{aligned} \xi = \xi(g) &= \bar{\alpha}^2 \|\rho_1 / \sqrt{\omega}\|^2 + \beta^2 \|\rho_2 / \sqrt{\omega}\|^2 + 2\bar{\alpha}\beta(\rho_1 / \sqrt{\omega}, e^{-2T\omega} \rho_2 / \sqrt{\omega}) \\ &+ 2\bar{\alpha}g \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{\hat{\rho}_1(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) e^{-|s-T|\omega(k)} e^{-ikB_s^j} \\ &+ 2\beta g \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) e^{-|s+T|\omega(k)} e^{-ikB_s^j}. \end{aligned}$$

証明. 汎関数積分表示 (2.48) から

$$\begin{aligned} & (f \otimes e^{\alpha\phi(\rho_1)} \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes e^{\beta\phi(\rho_2)} \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} \right. \\ & \times \mathbb{E}_{\mu_E} \left[e^{\bar{\alpha}\phi_E(\delta_{-T} \otimes \rho_1)} e^{\beta\phi_E(\delta_T \otimes \rho_2)} e^{g\phi_E(-\sum_{j=1}^N \int_{-T}^T \delta_s \otimes \bar{\varphi}_\varepsilon(\cdot - B_s^j) ds)} \right] \left. e^{-2Tg^2 N \varphi_\varepsilon(0,0)} \right]. \end{aligned}$$

すぐに

$$\mathbb{E}_{\mu_E} \left[e^{\bar{\alpha}\phi_E(\delta_{-T} \otimes \rho_1)} e^{\beta\phi_E(\delta_T \otimes \rho_2)} e^{g\phi_E(-\sum_{j=1}^N \int_{-T}^T \delta_s \otimes \bar{\varphi}_\varepsilon(\cdot - B_s^j) ds)} \right] e^{-2Tg^2 N \varphi_\varepsilon(0,0)} = e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{\text{ren}} + \frac{1}{4} \xi_\varepsilon}.$$

ここで ξ_ε は ξ で $\mathbb{1}_\Lambda^\perp(k)$ を $\mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) e^{-\varepsilon|k|^2/2}$ に置換えたものである. よって

$$\begin{aligned} & (f \otimes e^{\alpha\phi(\rho_1)} \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes e^{\beta\phi(\rho_2)} \mathbb{1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{\text{ren}} + \frac{1}{4} \xi_\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

適当な定数 C が存在して $\xi_\varepsilon \leq C$ がパスと $\varepsilon \geq 0$ に一様に成り立つ. その結果補題 2.16 と同様にしてこの補題も証明できる. $\square$

稠密な部分空間 $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ を次で定義しよう:

$$\mathcal{D} = \text{L.H.} \{f \otimes \mathbb{1} \mid f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})\} \cup \{f \otimes F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n))\mathbb{1} \mid F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), 1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}, f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})\}.$$

補題 2.18 から次の結果が即座に従う:

補題 2.19 $\Phi = f \otimes F(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n))\mathbb{1}$, $\Psi = h \otimes G(\phi(v_1), \dots, \phi(v_m))\mathbb{1} \in \mathcal{D}$ としよう. このとき

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\Phi, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} \Psi) &= (2\pi)^{-(n+m)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} dK_1 dK_2 \overline{\widehat{F}(K_1)} \widehat{G}(K_2) \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}} + \frac{1}{4} \xi(K_1, K_2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

ここで

$$\begin{aligned} \xi(K_1, K_2) &= -\|K_1 \cdot u / \sqrt{\omega}\|^2 - \|K_2 \cdot v / \sqrt{\omega}\|^2 - 2(K_1 \cdot u / \sqrt{\omega}, e^{-2T\omega} K_2 \cdot v / \sqrt{\omega}) \\ &\quad - 2ig \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{K_1 \cdot \widehat{u}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) e^{-|s-T|\omega(k)} e^{-ikB_s^j} \\ &\quad + 2ig \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{K_2 \cdot \widehat{v}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) e^{-|s+T|\omega(k)} e^{-ikB_s^j}, \end{aligned}$$

$$u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_m).$$

証明. $F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n))\mathbb{1} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{F}(K) e^{i\phi(K \cdot f)} \mathbb{1} dK$ に気をつければ

$$\begin{aligned} &(\Phi, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} \Psi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{(n+m)/2}} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} dK_1 dK_2 \overline{\widehat{F}(K_1)} \widehat{G}(K_2) (f \otimes e^{-i\phi(K_1 \cdot f)} \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes e^{-i\phi(K_2 \cdot h)} \mathbb{1}). \end{aligned}$$

よって主張は補題 2.18 から従う. $\square$

この論文の最も本質的な部分が $H_\varepsilon - g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0)$ の下からの一様有界性を示すことにある.

系 2.20 ε に依らない定数 C があって

$$\int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x [f(B_{-T}) h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{S_\varepsilon^{\text{ren}}}] \leq C \|f\| \|h\| \quad (2.51)$$

が $f, h \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\varepsilon \geq 0$, に対して成り立ち,

$$C \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left(\mathbb{E}^0 [e^{-2 \int_0^{2T} V(B_s+x) ds} e^{2(S_\varepsilon^{\text{OD},T}(x) + X_\varepsilon^T(x) + Y_\varepsilon^T(x) + Z_\varepsilon^T(x))}] \right)^{1/2}. \quad (2.52)$$

証明. これは (2.37) からしたがう. □

系 2.21 定数 $C \in \mathbb{R}$ があって $H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0, 0) > C$ が $\varepsilon > 0$ に一様に成り立つ.

証明. この証明で a_j, b_j は正の定数で $\varepsilon \geq 0$ と T に依らない. すぐに

$$\mathbb{E}^0[e^{S_\varepsilon^{\text{OD}, T}(x)}] \leq a_1 e^{b_1 T} \quad \text{and} \quad \mathbb{E}^0[e^{Z_\varepsilon^T(x)}] \leq a_2 e^{b_2 T}$$

がわかる. (2.29) と (2.36) から

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0[e^{X_\varepsilon^T(x)}] \leq a_3 e^{b_3 T} \quad \text{and} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0[e^{Y_\varepsilon^T(x)}] \leq a_4 e^{b_4 T}$$

がわかる. Appendix A) を参照せよ.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^0 \left[e^{2(S_\varepsilon^{\text{OD}, T}(x) + X_\varepsilon^T(x) + Y_\varepsilon^T(x) + Z_\varepsilon^T(x))} \right] \\ & \leq \left(\mathbb{E}^0 \left[e^{4S_\varepsilon^{\text{OD}, T}(x)} \right] \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}^0 \left[e^{8X_\varepsilon^T(x)} \right] \right)^{1/4} \left(\mathbb{E}^0 \left[e^{16Y_\varepsilon^T(x)} \right] \right)^{1/8} \left(\mathbb{E}^0 \left[e^{32Z_\varepsilon^T(x)} \right] \right)^{1/16} \end{aligned}$$

なので定数 a_5 と b_5 が存在して

$$\left(\mathbb{E}^0 \left[e^{2(S_\varepsilon^{\text{OD}, T}(x) + X_\varepsilon^T(x) + Y_\varepsilon^T(x) + Z_\varepsilon^T(x))} \right] \right)^{1/2} \leq a_5 e^{b_5 T} \quad (2.53)$$

が全ての $T > 0$ で成立する. 関数

$$W(x^1, \dots, x^N) = \sum_{j=1}^N |x^j|^2$$

を考えよう. H_ε で V を δW に置換えたものを $H_\varepsilon(\delta)$ と表す. もちろん $\delta \geq 0$. そうすれば $-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta_j + \delta W$, $\delta > 0$, はコンパクトレゾルベントをもつので $H_\varepsilon(\delta)$ ($\delta > 0$) は一意的な基底状態 $\Psi_g(\delta)$ をもつことが [Spo98, Ger00] で示されている. 注意 2.22 を参照せよ. ファインマン・カッツ公式から $e^{-TH_\varepsilon(\delta)}$ は正値改良型作用素である. よって $\Psi_g(\delta) > 0$ となる. 特に $(f \otimes \mathbb{1}, \Psi_g(\delta)) \neq 0$ が任意の $0 \leq f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. ここで $f \not\equiv 0$. その結果

$$\inf \sigma(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N \varphi_\varepsilon(0, 0)) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log(f \otimes \mathbb{1}, e^{-T(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N \varphi_\varepsilon(0, 0))} f \otimes \mathbb{1}) \quad (2.54)$$

が $0 \leq f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. (2.51) と (2.53) から

$$\begin{aligned} (f \otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N \varphi_\varepsilon(0, 0))} f \otimes \mathbb{1}) &= \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x[f(B_{-T})f(B_T)e^{-\int_{-T}^T \delta W(B_s)ds} e^{S_\varepsilon^{\text{ren}}}] \\ &\leq \|f\|^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 \left(\left[e^{2(S_\varepsilon^{\text{OD}, T}(x) + X_\varepsilon^T(x) + Y_\varepsilon^T(x) + Z_\varepsilon^T(x))} \right] \right)^{1/2} \leq \|f\|^2 a_5 e^{b_5 T}. \end{aligned}$$

これは (2.54) から

$$\inf \sigma(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N \varphi_\varepsilon(0, 0)) + \frac{b_5}{2} \geq 0, \quad \delta > 0, \quad (2.55)$$

を意味する. 大事なことは b_5 が δ に依っていないことである. よって

$$|(F, e^{-2T(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} G)| \leq \|F\| \|G\| e^{b_5 T} \quad (2.56)$$

が従う. $F, G \in \mathcal{H}$ としよう. ファインマン・カッツ公式 (2.48) から

$$\begin{aligned} & (F, e^{-2TH_\varepsilon(\delta)} G) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_{-T}^T \delta W(B_s) ds} \mathbb{E}_{\mu_E} \left[J_{-T} F(B_{-T}) \cdot e^{-\phi_E(\int_{-T}^T \sum_{j=1}^N \delta_s \otimes \tilde{\varphi}(\cdot - B_s^j) ds)} J_T G(B_T) \right] \right]. \end{aligned}$$

ルベーク優収束定理から

$$\lim_{\delta \downarrow 0} (F, e^{-2T(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} G) = (F, e^{-2T(H_\varepsilon(0) + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} G).$$

(2.56) の両辺の極限 $\delta \downarrow 0$ をとれば

$$|(F, e^{-2T(H_\varepsilon(0) + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} G)| \leq \|F\| \|G\| e^{b_5 T}. \quad (2.57)$$

これは (2.55) が $\delta = 0$ でも従うことをいっている. $H_\varepsilon = H_\varepsilon(0) + V$ かつ V は有界なので

$$\inf \sigma(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0)) + \frac{b_5}{2} + \|V\|_\infty \geq 0.$$

$C = -\frac{b_5}{2} - \|V\|_\infty$ とおけば系が従う. $\square$

注意 2.22 Σ を自己共役作用素 $-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta_j + V$ の本質的スペクトルの下限とし $E = \inf \sigma(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta_j + V)$ とする. このとき [Spo98] で汎関数積分をつかって

$$\Sigma - E > \frac{N^2}{4} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\varepsilon |k|^2} \beta(k) \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) dk$$

のとき H_ε は一意的な基底状態をもつことが示された ([LHB11, Theorem 6.6] も参照せよ). 特に $V(x^1, \dots, x^N) = \delta \sum_{j=1}^N |x^j|^2$ のとき H_ε は一意的な基底状態を全ての $\varepsilon > 0$ と $\delta > 0$ でもつ. なぜならば $\Sigma - E = \infty$ なので.

主定理の証明をする.

定理 2.2 の証明: $F, G \in \mathcal{H}, C_\varepsilon(F, G) = (F, e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} G)$ としよう. 補題 2.18 によって $F, G \in \mathcal{D}$ に対して $C_\varepsilon(F, G)$ が $\varepsilon \downarrow 0$ で収束することがわかる. 系 2.21 で示された一様な不等式

$$\|e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))}\| < e^{-tC}$$

と $\mathcal{D}$ が $\mathcal{H}$ で稠密ということから $\{C_\varepsilon(F, G)\}_\varepsilon$ がコーシー列となる. $C_0(F, G) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} C_\varepsilon(F, G)$ とする. そうすれば $|C_0(F, G)| \leq e^{-tC} \|F\| \|G\|$. Riesz の定理より有界作用素 T_t で

$$C_0(F, G) = (F, T_t G), \quad F, G \in \mathcal{H}$$

となるものが存在する. よって $s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} = T_t$. さらに

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} e^{-s(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} = s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-(t+s)(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} = T_{t+s}.$$

左辺は $T_t T_s$ なので T_t 半群性が従う. $e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))}$ は対称なので, T_t も対称. また汎関数積分表示 (2.50) から $(F, T_t G)$ は $t=0$ で $F, G \in \mathcal{D}$ に対して連続になることもわかる. $\mathcal{D}$ は $\mathcal{H}$ で稠密, $\|T_t\|$ は $t=0$ の近傍で一様に有界なので, T_t は $t=0$ で強連続になる. 半群版 Stone 定理 [LHB11, Proposition 3.26] によって下から有界な自己共役作用素 H_{ren} で $T_t = e^{-tH_{\text{ren}}}$, $t \geq 0$, となるものが存在することがわかる. $E_\varepsilon = -g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0)$ と置けば証明完了. $\square$

上でみたようにくりこまれたハミルトニアン H_{ren} が存在することが示せた. そこで H_{ren} に対するペアポテンシャルも求める.

系 2.23 H_{ren} のペアポテンシャルは $\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}$ である.

証明. 補題 2.16 によって

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_{\text{ren}}} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} dx E^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}} \right]. \quad (2.58)$$

$\square$

3 弱結合極限における実行ポテンシャル

この章ではカットオフ関数を $\varphi_\varepsilon(k) = (2\pi)^{-3/2} e^{-\varepsilon|k|^2/2}$ とする. そして dispersion relation は $\omega_\nu(k) = \sqrt{|k|^2 + \nu^2}$ とする. ここで $\nu > 0$ である. そうするとハミルトニアンは $L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}$ 上に

$$H_\varepsilon = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + H_I$$

で与えられる. ここで $H_p = \sum_{j=1}^N (-\frac{1}{2} \Delta_j) + V(x_1, \dots, x_N)$ は N -体シュレディンガー作用素で, $H_f = \int_{\mathbb{R}^3} \omega_\nu(k) a^*(k) a(k) dk$ は自由ハミルトニア. H_ε をスケーリングする. 生成消滅作用素を κa と κa^* とする. このとき H_ε は

$$H_\varepsilon(\kappa) = H_p \otimes \mathbb{1} + \kappa^2 \mathbb{1} \otimes H_f + \kappa H_I \quad (3.1)$$

となる. このスケーリングは変換 $\omega \mapsto \kappa^2 \omega$, $\hat{\varphi} \mapsto \kappa^2 \hat{\varphi}$ を導きだす. 一方エネルギーくりこみ項は

$$E_\varepsilon(\kappa) = -g^2 N \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{2(2\pi)^3 \omega_\nu(k)} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 \omega_\nu(k) + |k|^2/2} dk \quad (3.2)$$

のようにスケーリングされる. 定理 2.2 から自己共役作用素 $H_{\text{ren}}(\kappa)$ で

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (f \otimes \mathbb{1}, e^{-t(H_\varepsilon(\kappa) - E_\varepsilon(\kappa))} h \otimes \mathbb{1}) = (f \otimes \mathbb{1}, e^{-tH_{\text{ren}}(\kappa)} h \otimes \mathbb{1}) \quad (3.3)$$

となるものがある. 次の命題は [Dav79, Hir99] で示されている.

命題 3.1

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\kappa \rightarrow \infty} e^{-t(H_\varepsilon(\kappa) - E_\varepsilon(\kappa))} = e^{-th_{\text{eff}}} \otimes P_\Omega.$$

ここで P_Ω は $\{z\mathbb{1} \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathcal{F}$ への射影で, 実行ハミルトニアンは

$$h_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta_j + V(x^1, \dots, x^N) - \frac{g^2}{4\pi} \sum_{i < j} \frac{e^{-\nu|x_i - x_j|}}{|x_i - x_j|}.$$

さて, くりこまれたハミルトニアン $H_{\text{ren}}(\kappa)$ のスケーリングを考えてみよう. 定理 2.2 からつぎの補題が従う:

補題 3.2 $f, h \in L^2(\mathbb{R}^3)$ のとき

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} (f \otimes \mathbb{1}, e^{-tH_{\text{ren}}(\kappa)} h \otimes \mathbb{1}) = (f, e^{-th_{\text{eff}}} h). \quad (3.4)$$

証明. 補題 2.18 から

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_{\text{ren}}(\kappa)} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}(\kappa)} \right]. \quad (3.5)$$

ここで

$$\begin{aligned} S_0^{\text{ren}}(\kappa) &= 2 \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T \varphi_0(B_s^i - B_s^j, 0, \kappa) ds + 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^T \nabla \varphi_0(B_t - B_s, t-s, \kappa) \cdot dB_t \\ &\quad - 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varphi_0(B_T - B_s, T-s, \kappa) ds, \end{aligned} \quad (3.6)$$

そして

$$\varphi_0(x, t, \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ik \cdot x} e^{-\kappa^2 \omega(k)|t|}}{2\omega(k)} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 \omega(k) + |k|^2/2} \mathbb{1}_{\Lambda}^{\perp}(k) dk. \quad (3.7)$$

特に $t=0$ のとき

$$g^2 \sum_{i \neq j}^N \varphi_0(x^i - x^j, 0, \kappa) ds \rightarrow \frac{g^2}{4\pi} \sum_{i < j} \frac{e^{-\nu|x^i - x^j|}}{|x^i - x^j|},$$

$t \neq 0$ のとき,

$$|\nabla \varphi_0(X, t, \kappa)| \rightarrow 0, \quad |\varphi_0(X, t, \kappa)| \rightarrow 0$$

($\kappa \rightarrow \infty$) が各点ごとに示せる. 補題 2.16 と同様にして

$$\begin{aligned} &\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}(\kappa)} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{4\pi} \sum_{i < j} \int_{-T}^T \frac{e^{-\nu|B_s^i - B_s^j|}}{|B_s^i - B_s^j|} ds} \right]. \end{aligned}$$

□

系 3.3 $F, G \in \mathcal{D}$ のとき

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} (F, e^{-tH_{\text{ren}}(\kappa)} G) = (F, e^{-th_{\text{eff}}} \otimes P_{\Omega} G). \quad (3.8)$$

証明. これは補題 2.18 と補題 3.2 から従う.

□

A Kato-クラス

$\mathcal{K}_d$ は次を満たす V 全体である:

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x \left[\int_0^t |V(B_s)| ds \right] = 0. \quad (\text{A.1})$$

$\mathcal{K}_d$ を Kato-クラスという.

命題 A.1 もし $V \in \mathcal{K}_d$ ならば $W(x) = \sum_{i \neq j}^N V(x^i - x^j) \in \mathcal{K}_{dN}$. ここで $x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^{dN}$ である.

例えば [CFKS08, p.7] を参照せよ. Kato-クラスの同値な定義が知られている. $V \in \mathcal{K}_d$ であるための必要十分条件は

$$\lim_{r \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| < r} |g(x-y)V(y)| dy = 0 \quad \text{with} \quad g(x) = \begin{cases} |x| & d=1 \\ -\log|x| & d=2 \\ |x|^{2-d} & d \geq 3. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

この定義から次が導ける.

命題 A.2 もし $V \in \mathcal{K}_d$ ならば $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)V(y)| dy < \infty$.

Kato-クラスポテンシャルの例をあげる. (1) $d=3$ で $|x|^{-(2-\varepsilon)}$ ($\varepsilon > 0$), (2) $V \in L^p(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$. ここで $p=1$ ($d=1$), $p > d/2$ ($d \geq 2$). また Kato-クラスポテンシャル V に対して, $e^{\int_0^t V(B_s) ds}$ がウィナー測度に関して可積分であることもわかる.

命題 A.3 $0 \leq V \in \mathcal{K}_d$ としよう. このとき $\beta, \gamma > 0$ で次を満たすものが存在する:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x [e^{\int_0^t V(B_s) ds}] < \gamma e^{t\beta}. \quad (\text{A.3})$$

特に, もし $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ($p=1$ ($d=1$), $p > d/2$ ($d \geq 2$)) ならば $\beta = C\|V\|_p$ となる C が存在する.

証明. [LHB11, Lemma 3.38] を参照せよ. □

B シュレディンガー表現とユークリッド場

ボゾンフォック空間 $\mathcal{F}$ が $L^2(Q, \mu)$ とユニタリー同値なことはよく知られている. ここで (Q, Σ, μ) 上のガウス型確率変数族 $\{\phi_0(f), f \in H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)\}$ で $\phi_0(f)$ は f に関して線形, 平均ゼロ, 分散が $\mathbb{E}_\mu[\phi_0(f)\phi_0(g)] = \frac{1}{2}(f, g)_{H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)}$ で与えられるものを考える. このとき真空 $\mathbb{1}_{\mathcal{F}}$ は $\mathbb{1}_{L^2(Q)} \in L^2(Q)$ と, スカラー場 $\phi(f)$ は $\phi_0(f)$ とユニタリー同値になる. ここで $\phi_0(f)$ はかけ算作用素とみている. ウィック積: $\prod_{j=1}^n \phi_0(f_j)$: によって生成される有限線形和全体は $L^2(Q)$ で稠密になる. ここでウィック積は帰納的に

$$\begin{aligned} &: \phi_0(f) : = \phi_0(f), \\ &: \phi_0(f) \prod_{j=1}^n \phi_0(f_j) : = \phi_0(f) : \prod_{j=1}^n \phi_0(f_j) : - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (f, f_i)_{H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)} : \prod_{j \neq i}^n \phi_0(f_j) : \end{aligned}$$

のように定義される. これによつて $\mathcal{F}$ と $L^2(Q)$ を同一視する. ファインマン・カツツ公式を導くためにユークリッド場が必要である. ガウス型確率変数族 $\{\phi_E(F), F \in H_{-1}(\mathbb{R}^4)\}$ で平均ゼロで分散 $\mathbb{E}_{\mu_E}[\phi_E(F)\phi_E(G)] = \frac{1}{2}(F, G)_{H_{-1}(\mathbb{R}^4)}$ となるものを確率測度空間 (Q_E, Σ_E, μ_E) 上に定義する. $f \in H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ に対して関係 $\delta_t \otimes f \in H_{-1}(\mathbb{R}^4)$ と $\|\delta_t \otimes f\|_{H_{-1}(\mathbb{R}^4)} = \|f\|_{H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)}$ が成立する. ここで $\delta_t(x) = \delta(x-t)$ は t に重みをもつデルタ関数である. (2.48) の中の等長作用素族 $J_t: L^2(Q) \rightarrow L^2(Q_E)$, $t \in \mathbb{R}$, は次で定義される:

$$J_t \mathbb{1}_{L^2(Q)} = \mathbb{1}_{L^2(Q_E)} \quad \text{and} \quad J_t: \prod_{j=1}^m \phi(f_j) := \prod_{j=1}^m \phi_E(\delta_t \otimes f_j):$$

$\mathcal{F} \cong L^2(Q)$ の同一視のもと $(J_t F, J_s G)_{L^2(Q_E)} = (F, e^{-|t-s|H_t} G)_{\mathcal{F}}$ となる. 詳しいことは [LHB11, Chapter 5] をみよ.

C 作用素論的なくりこみ

Nelson[Nel64a] で示されたくりこみ理論を復習しておこう. いま場の作用素を

$$\phi_{\hat{\varphi}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \frac{\hat{\varphi}(-k)}{\sqrt{\omega}} + a(k) e^{ikx} \frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega}} \right) dk$$

とし, その運動量作用素を

$$\pi_{\hat{\varphi}}(x) = \frac{i}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \sqrt{\omega} \hat{\varphi}(-k) - a(k) e^{ikx} \sqrt{\omega} \hat{\varphi}(k) \right) dk$$

とする. このとき交換関係が従う:

$$[\phi_{\hat{\varphi}}(x), \pi_{\hat{\lambda}}(y)] = i \int e^{ik(y-x)} \hat{\varphi}(-k) \hat{\lambda}(k) dk, \quad (\text{C.1})$$

$$[H_f, \phi_{\hat{\varphi}}(x)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \sqrt{\omega} \hat{\varphi}(-k) - a(k) e^{ikx} \sqrt{\omega} \hat{\varphi}(k) \right) dk = -i\pi_{\hat{\varphi}}(x), \quad (\text{C.2})$$

$$[H_f, \pi_{\hat{\varphi}}(x)] = \frac{i}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \sqrt{\omega} \omega \hat{\varphi}(-k) + a(k) e^{ikx} \sqrt{\omega} \omega \hat{\varphi}(k) \right) dk = i\phi_{\omega^2 \hat{\varphi}}(x). \quad (\text{C.3})$$

Nelson 模型のハミルトニアン

$$H_N = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N P_j^2 + H_f + \sum_{j=1}^N \phi(x_j)$$

の Gross 変換を考えよう.

$$\pi(x) = \sum_{j=1}^N \frac{i}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx_j} \beta(k) \hat{\varphi}(-k) - a(k) e^{ikx_j} \beta(k) \hat{\varphi}(k) \right) dk$$

とする. ここで $\beta(k) = \frac{1}{\omega + |k|^2/2} \frac{1}{\sqrt{\omega}}$. (2.5) で β を定義したが, この章では [Nel64a] にならつて β をこのように定義する. このとき

$$e^{-i\pi} P_j e^{i\pi} = P_j + A_j + A_j^*.$$

ここで

$$A_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \int a^*(k) e^{-ikx_j} k \beta(k) \hat{\varphi}(-k) dk, \quad A_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \int a(k) e^{ikx_j} k \beta(k) \hat{\varphi}(k) dk. \quad (C.4)$$

さらに $(P_j + A_j + A_j^*)^2$ を展開すると

$$\begin{aligned} (P_j + A_j + A_j^*)^2 &= P_j^2 + 2P_j A_j + 2A_j^* P_j + A_j^2 + 2A_j^* A_j + A_j^{*2} \\ &\quad + [P_j, A_j^*] + [A_j, P_j] + [A_j, A_j^*]. \end{aligned}$$

ここに現れた交換子を計算すると

$$\begin{aligned} [P_j, A_j^*] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int a^*(k) e^{-ikx_j} k^2 \beta(k) \hat{\varphi}(-k) dk, \\ [A_j, P_j] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int a(k) e^{ikx_j} k^2 \beta(k) \hat{\varphi}(-k) dk, \\ [A_j, A_j^*] &= \frac{1}{2} \int |k|^2 \beta^2(k) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \end{aligned}$$

となる。次に

$$\begin{aligned} e^{-i\pi} \left(\sum_{j=1}^N \phi(x_j) \right) e^{i\pi} &= \sum_{j=1}^N \phi(x_j) + \sum_{i,j}^N [\phi(x_i), \pi(x_j)] \\ &= \sum_{j=1}^N \phi(x_j) - \sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_j - x_i)} \frac{\beta(k)}{\sqrt{\omega}} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk. \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} e^{-i\pi} H_f e^{i\pi} &= H_f + [H_f, i\pi] + \frac{1}{2} [[H_f, i\pi], i\pi] \\ &= H_f - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx_j} \omega \beta(k) \hat{\varphi}(-k) + a(k) e^{ikx_j} \omega \beta(k) \hat{\varphi}(k) \right) dk \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N \int \omega \beta^2(k) e^{ik(x_j - x_i)} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk. \end{aligned}$$

全て合わせると

$$\begin{aligned}
 & e^{-i\pi} H e^{i\pi} \\
 &= P_j^2 + 2P_j A_j + 2A_j^* P_j + A_j^2 + 2A_j^* A_j + A_j^{*2} + \sum_j \phi(x_j) + H_f \\
 & - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}} \int (a^*(k) e^{-ikx_j} \hat{\varphi}(-k) + a(k) e^{ikx_j} \hat{\varphi}(k)) \omega \beta(k) dk \tag{C.5}
 \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j \int \left(a^*(k) e^{-ikx_j} k^2 \beta(k) \hat{\varphi}(-k) + a(k) e^{ikx_j} k^2 \beta(k) \hat{\varphi}(k) \right) dk \tag{C.6}$$

$$- \sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_i - x_j)} \frac{\beta}{\sqrt{\omega}} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \tag{C.7}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_i - x_j)} \omega \beta^2(k) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \tag{C.8}$$

$$+ \frac{1}{4} N \int |k|^2 \beta^2(k) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \tag{C.9}$$

となる。β の定義より (C.5) + (C.6) + $\sum_j \phi(x_j) = 0$ がわかる。また (C.7) - (C.9) の対角成分を足し合わせると

$$\begin{aligned}
 & -N \int \frac{\beta}{\sqrt{\omega}} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk + \frac{1}{2} N \int \omega \beta^2(k) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk + N \frac{1}{4} \int |k|^2 \beta^2(k) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \\
 &= -\frac{1}{2} N \int \frac{\beta}{\sqrt{\omega}} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk.
 \end{aligned}$$

よって

$$e^{-i\pi} H e^{i\pi} = P_j^2 + 2P_j A_j + 2A_j^* P_j + A_j^2 + 2A_j^* A_j + A_j^{*2} + H_f \tag{C.10}$$

$$- \sum_{i \neq j} \int e^{ik(x_i - x_j)} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\omega}} + \omega \beta^2(k) \right) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \tag{C.11}$$

$$- \frac{1}{2} N \int \frac{\beta}{\sqrt{\omega}} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \tag{C.12}$$

をえる。(C.10) は 2 次形式の項, (C.11) は実行ポテンシャル項, そして (C.12) はくりこまれる項である。Nelson[Nel64a] では, $\hat{\varphi}(k) = \mathbb{1}_{|k| < \Lambda}$ として, $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で, この右辺から (C.12) を引き去ったものが 2 次形式の意味で, 一様に収束すること, および $e^{i\pi(x)}$ が強収束することを示している。

D 実行質量

Gross 変換したハミルトニアン H_G の実行質量 (effective mass) を求めてみよう。粒子数を 1 とし, その裸の質量を m , 場と粒子の結合定数を $g \in \mathbb{R}$ とおく。そうすると外場ポテンシヤ

ルを $V = 0$ とおいた Nelson ハミルトニアンは

$$H_N = -\frac{1}{2m}\Delta + H_f + g\phi(x)$$

となる. これを Gross 変換したものを H_G と書くことにする. 形式的な計算をする. $V = 0$ なので H_G は並行移動不変 (i.e., $[-i\nabla_j \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_{f,j}, H_G] = 0$) となり, H_G を全運動量 $-i\nabla_j \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_{f,j}$ のスペクトルで分解できる. その結果

$$H_G = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_G(P) dP$$

となる. ここで $H_G(P)$ はフォック空間上の自己共役作用素で, 次で与えられる:

$$H_G(P) = \frac{1}{2m}(P - P_f)^2 + H_f + \frac{g}{m}((P - P_f)A + A^*(P - P_f)) + \frac{g^2}{2} \frac{1}{m}(A^2 + 2A^*A + A^*A^*).$$

また $P_{f,j} = \int k_j a^*(k) a(k) dk$ は場の運動量作用素である. $H_G(P)$ の基底状態エネルギー $E(P)$ を

$$E(P) = E(0) + \frac{1}{2m_{\text{eff}}}|P|^2 + O(|P|^3)$$

と展開して $|P|^2$ の係数の逆数を実行質量 m_{eff} と定義する. これを形式的に結合定数 g で展開しよう. $H_G(P)\Phi(P) = E(P)\Phi(P)$ の両辺を形式的に $P = 0 \in \mathbb{R}^3$ で 2 回微分して, 公式

$$\frac{m}{m_{\text{eff}}} = 1 - \frac{2}{3m} \frac{((P_f - g(A + A^*))\Phi(0), (H_G(0) - E(0))^{-1}(P_f - g(A + A^*))\Phi(0))}{(\Phi(0), \Phi(0))}$$

をえる. 摂動理論から g が十分小さければ

$$\frac{m_{\text{eff}}}{m} = 1 + \frac{2}{3m} g^2 (P_f A^* \Omega, \frac{1}{H_0} P_f A^* \Omega) + O(|g|^3)$$

となる. ここで $H_0 = \frac{1}{2m} P_f^2 + H_f$ である. よって

$$m_{\text{eff}} = m + g^2 \frac{2}{3} \int \frac{|\widehat{\varphi}(k)|^2}{2\omega} \frac{|k|^2}{(|k|^2/2m + \omega)^3} dk + O(|g|^3)$$

となり, 紫外切断を外すとき, m_{eff} の g^2 の係数が収束することがわかる.

References

- [Ara01] A. Arai, Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation, *Rev. Math. Phys.* **13** (2001), 1075–1094.
- [BFS98] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles, *Adv. Math.* **137** (1998), 299–395.
- [CFKS08] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch and B. Simon, *Schrödinger Operators*, 2nd ed., Springer 2008.

- [Dav79] E. B. Davies, Particle-boson interactions and weak coupling limit, *J. Math. Phys.* **20** (1979), 345–351.
- [Ger00] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré* **1** (2000), 443–459.
- [GHPS12] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Removal of UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients, *Lett. Math. Phys.* **101** (2012), 305–322.
- [Hir06] M. Hirokawa, Infrared catastrophe for Nelson’s model — non-existence of ground state and soft-boson divergence, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **42** (2006), 897–922.
- [HHS05] M. Hirokawa, F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state for point particles interacting through a massless scalar bose field, *Adv. Math.* **191** (2005), 339–392.
- [Hir99] F. Hiroshima, Weak coupling limit removing an ultraviolet cut-off for a Hamiltonian of particles interacting with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **40** (1999), 1215–1236.
- [LHB11] J. Lőrinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space*, de Gruyter Studies in Mathematics **34**, 2011.
- [LMS02] J. Lőrinczi, R.A. Minlos and H. Spohn, The infrared behavior in Nelson’s model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), 1–28.
- [Nel64a] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1190–1197.
- [Nel64b] E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, in: *Proc. Conference on Analysis in Function Space*, W. T. Martin and I. Segal (eds.), p. 87, MIT Press, 1964.
- [Sas05] I. Sasaki, Ground state of the massless Nelson model in a non-Fock representation, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 102107.
- [Spo98] H. Spohn, Ground state of quantum particle coupled to a scalar boson field, *Lett. Math. Phys.* **44** (1998), 9–16.