

Wreath 積の Robinson-Schensted 対応

東大・理 岡田聡一

半順序集合 P 中の chain, つまり P の元の増大列 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ の個数を数えることは, 組合せ論だけでなく他の分野でも重要である. 対称群に対する Robinson-Schensted 対応を用いることによって, 分割全体が Young 図形の包含関係についてなす半順序集合 Y (Young 束と呼ばれる) 中の chain の個数に関するいくつかの等式に bijective な証明を与えることができる. ここでは, wreath 積に対する Robinson-Schensted 対応を構成し, それを用いて Young 束の直積半順序集合 Y^k 中の chain の個数に関する等式に bijective な証明を与える. また, Robinson-Schensted 対応をまったく用いない Stanley による純代数的な証明も紹介する.

§1. 用語と記号

まず, 半順序集合に関する用語と記号をまとめておく.

P を半順序集合とする. $x < y$ であり, かつ $x < z < y$ となる $z \in P$ が存在しないとき, y は x を覆う (y covers x) という. x を覆う (resp. x に覆われる) P の元全体の集合を $C^+(x)$ (resp. $C^-(x)$) と表わす. P の元の増大列 $c = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ を x_0 から x_n への chain という. そして, 全ての i に対して x_i が x_{i-1} を覆うとき, chain c は saturated であるという.

記号. P を最小元 $\hat{0}$ をもつ半順序集合とする. $x \in P$ に対して, $\hat{0}$ から x への saturated chain 全体の集合を $C_P(x)$ と表わし, その濃度を $e_P(x) = \#C_P(x)$ とおく.

半順序集合 P は次の条件を満たす関数 $\rho: P \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在するとき, 次数つき (graded) であるという.

- (a) x が P の極小元ならば, $\rho(x) = 0$.
- (b) y が x を覆うとき, $\rho(y) = \rho(x) + 1$.

このとき, $P_i = \rho^{-1}(i) = \{x \in P : \rho(x) = i\}$ とおく. 応用上重要な半順序集合はほとんど全て, 次数つきである.

記号. P を次数つき半順序集合で, 最小元 $\hat{0}$ をもつとする. このとき,

$$\begin{aligned} \alpha_P(0 \rightarrow n) &= \sum_{x \in P_n} e_P(x) \\ &= \#\{c = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n) : x_i \in P_i\} \end{aligned}$$

とおく.

次に, tableau について簡単にまとめておく. (詳しくは, 寺田氏の項を参照していただきたい) 分割全体の集合を $\mathcal{P}$ とする. $\lambda \in \mathcal{P}$ とする. λ の Young 図形の各箱に 1 つずつ自然数を書き込んで, 各行が左から右に単調非減少となり, 各列が上から下に単調増加となるようにしたものを, shape λ の semi-standard tableau という. $A \subset \mathbb{N}$ ($\#A = |\lambda|$) に対して, A の元が 1 回ずつ現われる shape λ の semi-standard tableau を, A 上の shape λ の standard tableau という. A 上の shape λ の standard tableau 全体の集合を $\text{STab}(\lambda; A)$ と表わす. $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の standard tableau を

通常は単に standard tableau という. 明らかに, $\# \text{STab}(\lambda; A)$ は λ と $\#A$ にしかよらない. さらに, 分割の列 $\emptyset = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} = \lambda$ で, 各 i に対して $\lambda^{(i)}$ の Young 図形が $\lambda^{(i-1)}$ の Young 図形に 1 つ箱を付け加えるか, または $\lambda^{(i-1)}$ の Young 図形から 1 つ箱を取り除くかして得られるようなものの全体のなす集合を $\text{UDTab}_n(\lambda)$ とする.

semi-standard tableau T と $r \in \mathbb{N}$ が与えられたとき, T に r を (row) insert して得られる semi-standard tableau を $T \leftarrow r$ と書く. また, A 上の standard tableau T に対して, T の $(1, 1)$ の位置に穴をあけ sliding algorithm を施して得られる $A - \{T(1, 1)\}$ 上の standard tableau を $\Delta(T)$ とする.

§2. Young 束と Robinson-Schensted 対応

まず, 対称群に対する Robinson-Schensted 対応 (以下, R-S 対応と略す)

$$(P, Q): \mathfrak{S}_n \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \vdash n} \text{STab}(\lambda; [n]) \times \text{STab}(\lambda; [n])$$

$$w \longmapsto (P(w), Q(w))$$

と Young 束との関係を見ておこう.

分割全体の集合 $\mathcal{P}$ に次のような順序を入れたものを Young 束 (Young's lattice) といい, Y と表わす: $\lambda, \mu \in Y$ に対して,

$$\lambda \geq \mu \iff \lambda_i \geq \mu_i \quad (i \geq 1).$$

つまり, λ の Young 図形が μ の Young 図形を含むとき, $\lambda \geq \mu$ である. $\rho(\lambda) = |\lambda|$ とおくことにより, Y は次数つき半順序集合となり,

$$Y_n = \{\lambda \in Y : \lambda \text{ は } n \text{ の分割}\}$$

また, Y は最小元 $\emptyset = (0, 0, \dots)$ を持つ.

$\lambda \in Y_n$ に対して, $\emptyset$ から λ への saturated chain $(\emptyset = \lambda^{(0)} < \lambda^{(1)} < \dots < \lambda^{(n)} = \lambda)$ ($\lambda^{(i)} \in Y_i$) は skew diagram $\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$ の箱に数字 i を書き込んだ shape λ の standard tableau と同一視できる. 例えば

$$(\emptyset < \square < \square \square < \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}) \in C_Y((2, 1)) \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \in \text{STab}((2, 1))$$

と同一視する. よって, R-S 対応は次のように言い換えられる.

定理 2.1. 全単射

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n &\xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \vdash n} C_Y(\lambda) \times C_Y(\lambda) \\ w &\longmapsto (c_1(w), c_2(w)) \end{aligned}$$

が存在して

$$(1) \quad c_1(w^{-1}) = c_2(w), \quad c_2(w^{-1}) = c_1(w)$$

従って, $I(\mathfrak{S}_n) = \{x \in \mathfrak{S}_n : x^2 = 1\}$, $i(\mathfrak{S}_n) = \#I(\mathfrak{S}_n)$ とおくと,

命題 2.2.

- (a) $\sum_{\lambda \in Y_n} e_Y(\lambda)^2 = n!$
- (b) $\sum_{\lambda \in Y_n} e_Y(\lambda) = i(\mathfrak{S}_n)$

証明: (a) は R-S 対応から明らかである. (1) により, R-S 対応を制限すると全単射

$$I(\mathfrak{S}_n) \xrightarrow{\sim} \{(c, c) : c \in C_Y(\lambda), \lambda \in Y_n\}$$

$$w \longmapsto (c_1(w), c_1(w))$$

が引き起こされるので, (b) がわかる.

これから, $\alpha(0 \rightarrow n) = \sum_{\lambda \vdash n} e_Y(\lambda)$ の母関数は次のようになる.

命題 2.3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_Y(0 \rightarrow n) \frac{z^n}{n!} = \exp \left(z + \frac{1}{2} z^2 \right)$$

証明: 命題 2.2 により, $\alpha_Y(0 \rightarrow n) = i(\mathfrak{S}_n)$ である. $x \in \mathfrak{S}_n$ に対して, $x^2 = 1$ となるためには x の cycle type が $(1^k 2^l)$ となることが必要十分である. よって,

$$i(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k+2l=n} \frac{n!}{1^k k! 2^l l!}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} i(\mathfrak{S}_n) \frac{z^n}{n!} &= \sum_{k \geq 0, l \geq 0} \frac{1}{1^k k! 2^l l!} z^{k+2l} \\ &= \left(\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{l \geq 0} \frac{z^{2l}}{2^l l!} \right) \\ &= \exp z \cdot \exp \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

§3. Young 束の直積と wreath 積

§2 の結果を Young 束の直積に拡張する.

Young 束 Y の k 個の直積半順序集合を Y^k とする. つまり, Y^k は集合としては $\mathcal{P}$ の k 個の直積であり, その順序は

$$(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \geq (\mu^1, \dots, \mu^k) \iff \lambda^i \geq \mu^i \quad (i = 1, \dots, k)$$

で与えられる. $\rho(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = |\lambda^1| + \dots + |\lambda^k|$ によって, Y^k は次数つき半順序集合であり,

$$(Y^k)_n = \{(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in Y^k : |\lambda^1| + \dots + |\lambda^k| = n\}$$

また, Y^k は最小元 $\hat{0} = (\emptyset, \dots, \emptyset)$ を持つ. $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$ に対して, $\hat{0}$ から λ への saturated chain 全体の集合

$$C_{Y^k}(\lambda) = \{\hat{0} = \lambda^{(0)} < \lambda^{(1)} < \dots < \lambda^{(n)} = \lambda : \lambda^{(i)} \in (Y^k)_i\}$$

の濃度は

$$(2) \quad e_{Y^k}(\lambda) = \#C_{Y^k}(\lambda) = \frac{n!}{|\lambda^1|! \dots |\lambda^k|!} e_Y(\lambda^1) \dots e_Y(\lambda^k)$$

さて, Γ を任意の有限群とする. Γ の対称群 $\mathfrak{S}_n$ による wreath 積とは, 次のように定義される群 $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ のことである. 集合としては, $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ は, 0 または Γ の元を成分とする $n \times n$ 行列 $X = (x_{ij})$ で, 0 でない成分 (Γ の元) が各行各列に 1 つずつ現われるもの全体からなる. そして, その積は普通の行列の積によって定義される. $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ の位数は $(\#\Gamma)^n n!$ である. 例えば, Γ が位数 2 の巡回群のとき $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ は B_n 型 Weyl 群である.

今, $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ を Γ の複素既約指標の全体とし, η_i の次数を d_i とおく. このとき, $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ の既約表現は $(Y^k)_n$ の元でパラメトライズされる. $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$ に対応する $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ の既約指標を χ^λ とするとその次数は

$$(3) \quad \chi^\lambda(1) = e_{Y^k}(\lambda) \prod_{i=1}^k d_i^{|\lambda^i|}$$

で与えられる. 従って,

命題 3.1. Γ が位数 r の可換群のとき, $\chi^\lambda(1) = e_{Y^r}(\lambda)$ となるから,

$$\sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda)^2 = r^n n!$$

一般に, 有限群 G に対して

$$I(G) = \{x \in G : x^2 = 1\}, \quad i(G) = \#I(G)$$

とおく.

命題 3.2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) \frac{z^n}{n!} = \exp \left(i(\Gamma)z + \frac{1}{2}(\#\Gamma)z^2 \right)$$

証明: $X = (x_{ij}) \in \Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ が $X^2 = 1$ を満たすためには, その 0 でない成分 $x_{ij} \in \Gamma$ が全て $x_{ij}x_{ji} = 1$ を満たせばよい. 従って,

$$i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) = \sum_{k+2l=n} \frac{n!}{1^k k! 2^l l!} i(\Gamma)^k (\#\Gamma)^l$$

となるから、命題 2.3 の証明と同様にして $i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$ の母関数が計算できる。

注意. より一般に, $i_k(G) = \#\{x \in G : x^k = 1\}$ とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty} i_k(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) \frac{z^n}{n!} = \prod_{d|k} \exp \left(\frac{(\#\Gamma)^{d-1} i_{k/d}(\Gamma)}{d} z^d \right)$$

一方, $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$ のとき, (2) と命題 2.3 から

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda) \right) = \left(\exp(z + \frac{1}{2}z^2) \right)^r \\ = \exp \left(rz + \frac{1}{2}rz^2 \right)$$

となる. これを命題 3.2 と比較すると,

命題 3.3. Γ が位数 2 の巡回群の直積で, Γ の位数が r であるとき

$$\sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda) = i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$$

命題 3.1 と命題 3.2 は Young 束だけに関する主張であり, 対称群 (R-S 対応) を用いなくて直接これらを証明することもできる. これについては, §5 で述べる. 次節では, wreath 積 $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ に対する R-S 対応を構成し, それを用いて命題 3.1, 命題 3.3 を示す.

また、有限群 G の複素既約指標の次数の総和を $d(G)$ とすると、(3) と命題 2.3 より、

$$\sum_{n \geq 0} d(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) \frac{z^n}{n!} = \exp \left(d(\Gamma)z + \frac{1}{2}(\#\Gamma)z^2 \right)$$

これを (4) と比べると、

命題 3.4. Γ が位数 r の可換群のとき、

$$\sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda) = d(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$$

この命題は、次の事実からもわかる. $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ に対応する $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ の既約指標 χ^λ を部分群 $\Gamma \wr \mathfrak{S}_{n-1} = \{X = (x_{ij}) : x_{nn} = 1\}$ に制限すると

$$(5) \quad \chi^\lambda \downarrow_{\Gamma \wr \mathfrak{S}_{n-1}} = \sum_{i=1}^k d_i \sum_{\lambda^i \text{ は } \mu^i \text{ を覆う}} \chi^{(\lambda^1, \dots, \mu^i, \dots, \lambda^k)}$$

のように分解する.

§4. wreath 積の Robinson-Schensted 対応

有限群 Γ を固定し、 $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ に対する R-S 対応を構成する. そのために、R-S 対応の行き先として

$$\mathcal{T}_{\Gamma, n} = \coprod_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \lambda} \prod_{\gamma \in \Gamma} \text{STab}(\lambda(\gamma); \mathbf{B}(\gamma)) \times \text{STab}(\lambda(\gamma); \mathbf{A}(\gamma))$$

とおく. ただし, A, B, λ は次を満たす写像 $A: \Gamma \rightarrow 2^{[n]}$, $B: \Gamma \rightarrow 2^{[n]}$ ($2^{[n]}$ は $[n]$ の部分集合全体のなす集合を表わす), $\lambda: \Gamma \rightarrow Y$ 全体を走る.

$$\coprod_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma) = \coprod_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma) = [n] \quad (\text{disjoint union}),$$

$$\#A(\gamma) = \#B(\gamma) = |\lambda(\gamma)| \quad (\gamma \in \Gamma).$$

そして, $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ から $\mathcal{T}_{\Gamma, n}$ への対応を次のように構成する. $X = (x_{ij}) \in \Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ とする. $\gamma \in \Gamma$ に対して, X の成分のうち γ に等しいものを 1 で, そうでないものを 0 で置き換えてえられる $(0, 1)$ -行列を X_γ と表す. そして, 行列 X_γ に Knuth 対応を施して得られる semi-standard tableau の対を $(P_\gamma(X), Q_\gamma(X))$ とする. つまり, X_γ の 0 でない成分が p_i 行, q_i 列 ($1 \leq i \leq k$) にあるとし, $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$ とするとき,

$$P_\gamma(X) = \emptyset \leftarrow p_1 \leftarrow p_2 \leftarrow \cdots \leftarrow p_k$$

であり, $Q_\gamma(X)$ は tableau $\emptyset \leftarrow p_0 \leftarrow \cdots \leftarrow p_{i-1}$ に p_i を insert したときに増えた箱に数字 q_i を書き込んで得られる tableau である. このとき, $(P_\gamma(X), Q_\gamma(X))_{\gamma \in \Gamma} \in \mathcal{T}_{\Gamma, n}$ となる.

例. Γ として, 位数 3 の巡回群 $Z_3 = \{1, \omega, \omega^2\}$ ($\omega^3 = 1$) をとり,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z_3 \wr \mathfrak{S}_7$$

を考える. すると, X_γ は次のようになる. (ただし, 0 でない成分のある行と列のみを取り出して表している.)

$$X_1 = \begin{matrix} & 4 & 7 \\ 2 & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ 6 & \end{matrix}, \quad X_\omega = \begin{matrix} & 2 & 3 & 6 \\ 1 & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \\ 4 & \\ 5 & \end{matrix}, \quad X_{\omega^2} = \begin{matrix} & 1 & 5 \\ 3 & \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \\ 7 & \end{matrix}$$

これらの行列に, Knuth 対応を施すと

$$(P_1(X), Q_1(X)) = (\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 7 \\ \hline \end{array})$$

$$(P_\omega(X), Q_\omega(X)) = (\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 5 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 6 & \end{array})$$

$$(P_{\omega^2}(X), Q_{\omega^2}(X)) = (\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 7 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 5 \end{array})$$

定理 4.1. 上のようにして作った対応

$$\Gamma \wr \mathfrak{S}_n \longrightarrow T_{\Gamma, n}$$

$$X \longmapsto (P_\gamma(X), Q_\gamma(X))_{\gamma \in \Gamma}$$

は全単射であり, 次の性質を持つ.

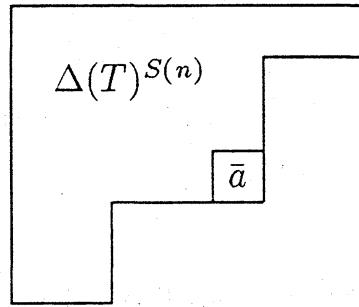
$$(a) \quad P_\gamma(X^{-1}) = Q_{\gamma^{-1}}(X), \quad Q_\gamma(X^{-1}) = P_{\gamma^{-1}}(X)$$

$X_0 = (\delta_{i, n+1-j}) \in \Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ とすると

$$(b) \quad P_\gamma(X_0 X) = {}^t P_\gamma(X)^{S(n)}, \quad Q_\gamma(X_0 X) = {}^t Q_\gamma(X)$$

$$(c) \quad P_\gamma(X X_0) = {}^t P_\gamma(X), \quad Q_\gamma(X X_0) = {}^t Q_\gamma(X)^{S(n)}$$

ここで, $T \in \text{STab}(\lambda; A)$ ($A \subset [n]$) に対して, $T^{S(n)} \in \text{STab}(\lambda; \bar{A})$ ($\bar{A} = \{n+1-a : a \in A\}$) は次のように帰納的に定義される tableau である :



ただし, $\bar{a}$ は $\bar{A}$ の最大元である.

ここで, $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$ に対して, 明らかな全単射

$$C_{Y^k}(\lambda) \longrightarrow \coprod_{(A_1, \dots, A_k)} \text{STab}(\lambda^1; A_1) \times \cdots \times \text{STab}(\lambda^k; A_k)$$

$((A_1, \dots, A_k)$ は $\coprod_{i=1}^k A_i = [n]$ となる $[n]$ の部分集合の列全体を走る) が存在する. 例えば, $k=2$ のとき,

$$(\emptyset, \emptyset) < (\square, \emptyset) < (\square, \square) < (\square, \square\square) < \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \square\square\right) \\ \longleftrightarrow \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}\right)$$

のように対応している.

系 4.2. Γ の位数が r のとき, 定理 4.1 の対応は全単射

$$\begin{aligned} \Gamma \wr \mathfrak{S}_n &\xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \in (Y^r)_n} C_{Y^r}(\lambda) \times C_{Y^r}(\lambda) \\ X &\longmapsto (c_1(X), c_2(X)) \end{aligned}$$

を引き起こす. よって,

$$\sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda)^2 = r^n n!$$

系 4.3. Γ が位数 2 の巡回群の直積で, その位数が r であるとき, 系 4.2 の全単射は

$$c_1(X^{-1}) = c_2(X), \quad c_2(X^{-1}) = c_1(X)$$

を満たすから, 全単射

$$I(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \in (Y^r)_n} C_{Y^r}(\lambda)$$

が引き起こされる。よって、

$$\sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda) = i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$$

§5. r -differential poset

命題 3.1, 3.2 は Young 束の直積だけでなくより一般に r -differential poset (poset とは partially ordered set の略である) に対して成り立つ。

定義. $r \in \mathbb{N}$ とする. 次の条件 (D1), (D2), (D3) を満たす半順序集合を r -differential poset という。

- (D1) P は最小元 $\hat{0}$ を持つ次数つき半順序集合であり, 任意の $x < y$ に対して, $\{z \in P : x \leq z \leq y\}$ は有限集合である.
- (D2) $x \neq y$ のとき, $\#(C^+(x) \cap C^+(y)) = \#(C^-(x) \cap C^-(y))$.
- (D3) $x \in P$ のとき, $\#C^+(x) = \#C^-(x) + r$.

命題 5.1. Young 束の直積 Y^r は r -differential poset である。

証明: 定義から, P が r -differential poset, Q が s -differential poset ならば, その直積 $P \times Q$ は $(r+s)$ -differential poset となる。よって, Y が 1-differential poset であることを示せばよいが, 定義の条件 (D1), (D2) は Young 束については明らかである。条件 (D3) については, $\lambda \in Y$ に対して, $C^+(\lambda)$ (resp. $C^-(\lambda)$) が λ の Young 図形の隅 (resp. 角) の個数に等しいことからわかる。

定理 5.2. ([St2, Prop.3.1, Cor.3.9]) P が r -differential poset ならば

$$(6) \quad \sum_{x \in P_n} e_P(x)^2 = r^n n!$$

$$(7) \quad \sum_{n \geq 0} \alpha_P(0 \rightarrow n) \frac{t^n}{n!} = \exp \left(rt + \frac{1}{2} rt^2 \right)$$

が成り立つ.

この定理を証明するために以下の記号を導入する. P を r -differential poset とする. t に関する複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 1 変数べき級数体を K とし, P の元の体 K 上の (無限) 線型結合全体のなす K 線型空間を $\hat{K}P$ とする. 線型変換 $U, D : \hat{K}P \rightarrow \hat{K}P$ を

$$Ux = \sum_{y \in C^+(x)} y, \quad Dx = \sum_{y \in C^-(x)} y$$

によって定義し, $P = \sum_{x \in P} x \in \hat{K}P$ とおく. すると, r -differential poset の定義から

$$(8) \quad DU - UD = r \cdot \text{Id}$$

$$(9) \quad DP = (U + r)P$$

注意. P が最小元 $\hat{0}$ をもつ順序つき半順序集合で, 各 n に対して P_n が有限集合であるとする. このとき, P が r -differential poset であることと (8) が成り立つことは同値である.

定理 5.2 の証明: まず, $\sum_{x \in P_n} e_P(x)^2$ は $D^n U^n \hat{0}$ における $\hat{0}$ の係数に等しい. ところが, (8) と $D\hat{0} = 0$ を繰り返し用いると,

$$D^n U^n \hat{0} = r^n n! \hat{0}$$

従って, $\sum_{x \in P_n} e_P(x)^2 = r^n n!$. 次に, (7) を示すために,

$$(10) \quad e^{Dt} \mathbf{P} = e^{rt + rt^2/2 + Ut} \mathbf{P}$$

に注意する. 実際, (10) の左辺は

$$DH(t) \mathbf{P} = \frac{\partial H}{\partial t}(t) \mathbf{P}, \quad H(0) \mathbf{P} = \mathbf{P}$$

で特徴づけられ, (8), (9) を用いると (10) の右辺もこれを満たすことが分かる. さて, $\alpha_P(0 \rightarrow n)$ は $D^n \mathbf{P}$ における $\hat{0}$ の係数に等しいから, $\sum_{n \geq 0} \alpha_P(0 \rightarrow n) t^n / n!$ は $e^{Dt} \mathbf{P}$ における $\hat{0}$ の係数に等しい. ところが, $k > 0$, $x \in P$ のとき $U^k x$ には $\hat{0}$ が現れないから, (10) の右辺における $\hat{0}$ の係数は $\exp(rt + \frac{1}{2}rt^2)$ である. これで, (7) が示された.

このように偏微分方程式を解くことによって, P に関する数え上げ問題を解くことができるので, differential poset という名前がある. 例えば, 次のようなこともわかる.

命題 5.3. ([St, Prop.3.14]) P を r -differential poset とする. $x \in P$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して, P の元の列 $\hat{0} = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x$ で, $x_i \in C^+(x_{i-1}) \cup C^-(x_{i-1})$ ($i = 1, \dots, n$) を満たすものの個数を $\delta_n(x)$ とする. このとき,

$$\sum_{x \in P_n \cup P_{n-2} \cup P_{n-4} \cup \dots} \delta_n(x)^2 = \frac{(2n)! r^n}{2^n n!}$$

$P = Y$ のときこの命題は,

$$\sum_{\lambda \vdash n, n-2, n-4, \dots} (\# \text{UDTab}_n(\lambda))^2 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

ということであり, Berere の insertion を用いても示すことができる. ([Su, §8])

$P = Y^r$ のとき, 上で定義した線型変換 D, U には次のような群論的な意味がある. Y^r の元を基底とする体 K 上の線型空間を $K(Y^r)$ とし, $\widehat{K}(Y^r)$ の部分空間と見なし, U, D を $K(Y^r)$ に制限して考える. Γ を位数 r の可換群とする. $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ 上の K に値をもつ類関数全体のなす線型空間を $CF_K(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$ と表わすと, 対応 $\lambda \mapsto \chi^\lambda$ によって, $K(Y^r) \cong \bigoplus_{n \geq 0} CF_K(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$ となる. この同型で, $K(Y^r)$ と $\bigoplus_{n \geq 0} CF_K(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$ を同一視すると,

$$U = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Ind}_{\Gamma \wr \mathfrak{S}_n}^{\Gamma \wr \mathfrak{S}_{n+1}}$$

$$D = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Res}_{\Gamma \wr \mathfrak{S}_n}^{\Gamma \wr \mathfrak{S}_{n+1}}$$

ここで, Ind_H^G は H から G への induce up を, Res_H^G は G から H への制限を表わす. (§2 の (5) を見よ.) そして, 線型変換 UD の固有ベクトルについて, 次が成り立つ.

命題 5.4. Γ を位数 r の可換群とする. このとき, $X \in \Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ に対して,

$$\pi_X = \sum_{\lambda \in (Y^r)_n} \chi^\lambda(X) \lambda \in \mathbb{C}(Y^r)$$

は UD の固有ベクトルである.

より一般に, 任意の有限群 Γ に対して, 次のことが成り立つ. $\gamma \in \Gamma$ と $l \in \mathbb{N}$ に対して, 線型変換 $U_\Gamma(\gamma, l), D_\Gamma(\gamma, l) : K(Y^r) \rightarrow K(Y^r)$ を次のように定義する.

$$U_\Gamma(\gamma, l)(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = \sum_{i=1}^k \eta_i(\gamma) \sum_{\mu^i} (-1)^{\text{ht}(\mu^i/\lambda^i)} (\lambda^1, \dots, \mu^i, \dots, \lambda^k)$$

$$D_\Gamma(\gamma, l)(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = \sum_{i=1}^k \eta_i(\gamma^{-1}) \sum_{\nu^i} (-1)^{\text{ht}(\lambda^i/\nu^i)} (\lambda^1, \dots, \nu^i, \dots, \lambda^k)$$

ここで, μ^i (resp. ν^i) は skew diagram μ^i/λ^i (resp. λ^i/ν^i が $\boxplus$ を含まず, かつ $|\mu^i| - |\lambda^i| = l$ (resp. $|\lambda^i| - |\nu^i| = l$) となる $\mu^i > \lambda^i$ (resp. $\nu^i < \mu^i$) 全体を動き, $\text{ht}(\lambda/\mu)$ は skew diagram λ/μ の占める行数-1 を表わす. このとき,

命題 5.5. ([O, Prop.5.4]) $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ の指標表は線型変換 $U_\Gamma(\gamma, l)D_\Gamma(\gamma, l)$ ($\gamma \in \Gamma, l \in \mathbb{N}$) の同時固有ベクトルを正規化して並べたものになっている.

参考文献

- [O] S. Okada, *Wreath products by the symmetric groups and product posets of Young's lattices*, to appear in J. Combin. Theory A.
- [St] R. P. Stanley, *Differential posets*, J. Amer. Math. Soc **1** (1988), 919–961.
- [Su] S. Sundaram, *On the combinatorics of representations of $Sp(2n, \mathbb{C})$* , Ph.D. thesis, M.I.T..