

## カルマン渦列の不安定性

九大応力研 船越 満明 ( Mitsuaki Funakoshi )

九大応力研 烏谷 隆 ( Takashi Karasudani )

九大応力研 星野 スマ子 ( Sumako Hoshino )

### 1. 序

この報告においては、可視化実験の映像の画像解析によって渦度分布を求めることにより円柱後流のカルマン渦列の生成・崩壊の問題を調べた結果について述べていく。

円柱後流については数多くの研究がなされており、円柱の速さと直径を用いて作ったレイノルズ数  $R$  が大体  $40 \sim 150$  程度のときに、カルマン渦列が形成され、しかもつねに層流状態である、ということが実験においてわかっている。<sup>1), 2)</sup> そしてこのカルマン渦列の安定性や時間発展についてもたくさんの研究がある。まず、Kármán は渦系モデルで近似した互い違い型渦列系に対して安定性解析を行ない、渦列間の距離  $h$  と隣り合う同符号の渦系間の距離  $a$  の比  $h/a$  が  $0.28$  のときのみ安定であることを示した。<sup>3)</sup>

一方、Taneda<sup>2)</sup> は、アルミ粉法を用いて円柱後流の挙動を

調べ、 $50 < R < 150$  のとき、カルマン渦列は安定ではなく、  
 い、たん崩壊したあと、より大きい波長の二次カルマン渦列  
 があらわれることを示した。そして、最初のカルマン渦列  
 と二次カルマン渦列の渦列方向の波長をそれぞれ  $\lambda_1, \lambda_2$  とし  
 たとき、 $\lambda_2/\lambda_1$  が  $1.8 \sim 3.6$  程度であり、かつ、この値は  $R$  が  
 小さいほど大きい、ということを示した。また最初のカル  
 マン渦列の規則性は、円柱から円柱直径の約 50 倍程度はなれ  
 たところで失われ、この距離  $\lambda_0$  が一般に  $R$  が大きいほど小さ  
 くなることも示した。また、最近 Honji<sup>4)</sup> は、 $R \leq 200$  のと  
 きの円柱後流の挙動をいくつかに分類し、 $60 \leq R \leq 200$  では  
 やはりカルマン渦列が崩壊し、しばらくして二次カルマン渦  
 列があらわれることを示した。そして、 $\lambda_0$  の大体の値を  $R$   
 の関数として求めた。

以上の実験においては渦度の空間分布は求めていない。  
 渦度分布がわからなくても速度場の大体の感じがわかれば多  
 くの有用な情報が得られる。しかし、例えば「渦列の崩壊  
 の際に各渦領域はどのような相互作用をするのか？」等の一  
 歩進んだ理解を行なうためには、渦度の空間分布、及びその  
 時間発展を知る必要が出てくる。

Matsui と Okude<sup>5)</sup> は、 $R=140$  で、カルマン渦列の速度変動  
 周波数の半分、周波数の擾乱を与えると、すべての渦が 2 つ

すつ対になって合体する、いわゆる *pairing* の現象がきわめて規則的におこることを知って、流速計を用いた条件付サンプリングをくりかえすことにより、渦度の空間分布を求めた。しかしながら、カルマン渦列の崩壊や二次カルマン渦列の出現の現象は、上記のような特殊な場合を除くと、一般には完全な再現性をもたない。すなわち、一定の条件での実験をくりかえしたときに、カルマン渦列の崩壊の位置とか、二次カルマン渦列の出現する位置や波長などが各回ごとに少しずつ異なる。このような状況の下では上記のような方法で渦度分布を求めることはできない。

そこで、最近、このような場合でも渦度の空間分布を求めることができる一つの方法として、可視化実験の映像の画像処理による解析が行なわれはじめた<sup>6)</sup>。円柱後流の場合への適用例もいくつかあり、渦度の空間分布も求められているが、これらの研究においては、円柱直後の流れ、あるいは不安定化する前のカルマン渦列について調べており、カルマン渦列の崩壊・再配列の問題については調べられていない。

以上述べてきたことからわかるように、カルマン渦列の崩壊・再配列の際の渦領域の挙動については、まだまだ未解明の点が多い。カルマン渦列の崩壊・再配列についての解法としては、先に述べた *pairing* に基く考え方とか、平均流速場

の安定性理論に基く考え方があがあるが、それらの一般的な妥当性についてはまだ明らかでない。

本研究では、円柱後流の可視化実験のビデオ画像から、画像処理による解析システムを使って、速度や渦度の分布を比較的に容易に求める一つの方法を開発した。さらに、この方法を用いてカルマン渦列の生成・崩壊のときの渦領域の挙動を調べ、上で述べたような既存の考え方の妥当性について考察を試みる。第2節では可視化実験の方法について述べ、第3、4節では、実験のビデオ画像から速度場・渦度場を求める手法について説明する。第5節ではカルマン渦列の挙動についての結果を示す。

## 2. 実験装置と方法

図1は実験装置の概略図である。長さ400 cm、幅40 cm、深さ40 cmの静水槽を主に用い、直径1.0 cmの円柱を一定速度で水平方向に移動させた。流れを可視化するために、接着剤（プロンアルファー）でコーティングしたポリエチレン粉末を混入した。スライドプロジェクターからの薄い光の幕（厚み約5 mm）で流れの水平断面を照射し、断面中のポリエチレン粉末の動きをビデオカメラにより収録した。ビデオカメラにはタイマーが接続しており、時刻も同時に記録した。

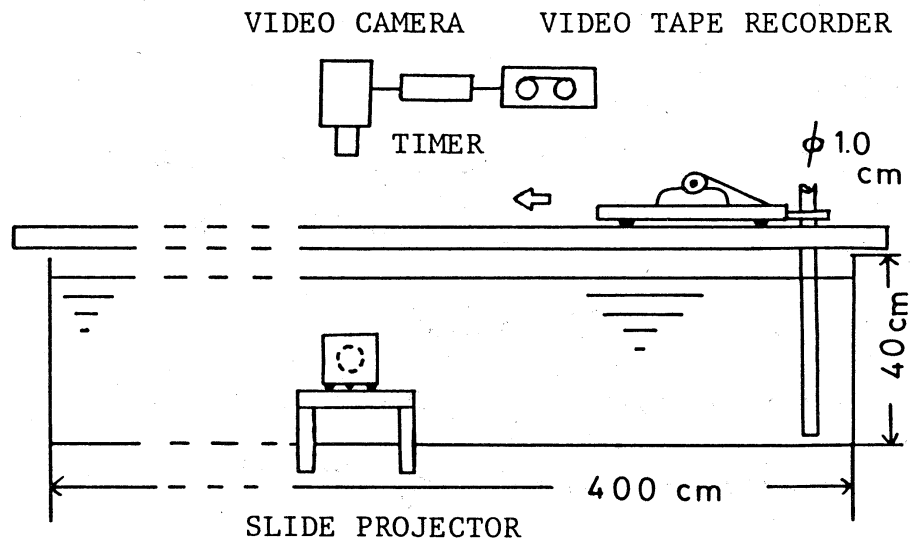


図 1 実験装置

ビデオカメラは、モデルの初期位置より約1.5m前方で水槽に固定した。このため、収録した流れの円柱からの距離は時間に比例して増加している。すなわち、後流の円柱からの距離による変化は、ビデオカメラ上では時間の経過による後流の変化に対応している。

流れを支配するパラメータ、レイノルズ数( $R$ )は円柱の直径を $d$ 、速度を $V$ 、水の動粘性係数を $\nu$ とすると  $R = dV/\nu$  となる。実験は主にレイノルズ数が104と140のとき行なった。

### 3. 速度の基礎データの収集方法

実験のビデオ画像から時刻 $T$ における速度の基礎データを

得るには、画像処理による解析システム<sup>7)</sup>を用いた。具体的にはまず、二値化のしきい値 $b$ と時間間隔 $\Delta T$ を適当に選  
び、時刻 $T_1 = T - \Delta T/2$ 、 $T_2 = T + \Delta T/2$ における粒子画像、及  
び、時刻 $T_1$ から $T_2$ までの間の流跡線画像、という合計3つの  
二値化画像を画像処理用プロセッサ（以下ではプロセッサと  
略称する）の上に作る。そして、「流跡線上には、時刻 $T_1$   
と $T_2$ での粒子画像がただ1つずつ、かつ、流跡線の両端に存  
在する」という条件をみたす流跡線のみを有効であるとし、  
有効な流跡線については、両端の座標をよみとり、その値と、  
 $\Delta T$ の値から速度の基礎データを作る。その際、得られた速  
度は両端点の中点における値であるとみなす。この一連の作  
業の詳細については種子田ら<sup>7)</sup>を参照のこと。

そして、実験のビデオ画像から最大限の基礎データを取り  
出すために、いくつかの $b$ について上の方法でデータの収集  
を行ない、得られたデータを統合したものから、次節で述べ  
る方法で速度分布などを求めた。今回の解析では $b$ を3通  
りに変化させ、各々の $T$ での速度の基礎データを得た。な  
お $\Delta T$ の値としては、1～5秒程度を使った。得られた基礎  
データは、重複したものを1つと数えると、大体400～500  
個程度であった。

基礎データの収集にあたっては、ビデオ画像にうつしこま

れた時刻  $T$  を使って各画像を判別したが、以下では  $T$  のかわりに、時刻  $T$  における画像の中央の点と円柱後端との距離  $L$  を使って画像の指定を行なうことにする。

次に、水槽に対して固定した座標系  $(x, y)$  を、 $x$  が円柱の進行方向、 $y$  がそれと直角方向になるように決め、流体の速度の  $x$ 、 $y$  成分をそれぞれ  $u$ ,  $v$  とする。またプロセッサの画面は、 $512 \times 480$  ドットの分解能をもっているので、以下の説明を容易にするために画面座標系  $(X, Y)$  ( $0 \leq X \leq 511$ ,  $0 \leq Y \leq 479$ ) を定義する。

#### 4. 速度場・渦度場の計算方法

前節の方法で得た速度の基礎データのうち、流跡線の長さ<sup>8)</sup> ぎるもの及びまわりに比べてあまりに値のかけはなれたものを取り除いたあと、一辺  $l$  の正方格子の各格子点での速度を次のようにして求めた。まず格子点を中心にして半径  $l_a$  の円内にある速度基礎データの中から、この格子点をその中に含むような三角形を構成する三点の組をすべて求める。そして速度成分  $u$ ,  $v$  がいずれもこの円内で  $x$ ,  $y$  の一次関数の形で近似されると仮定し、先の条件をみたす三角形すべての頂点におけるデータを使って、最小二乗法で一次関数の係数を決める。これにより格子点での速度  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  が求まる。

もしある格子点について、半径  $r_a$  の円内にこの点を中に含む三角形を構成するような基礎データが存在しなくて、上の方法では値が決められず、かつ、まわりの格子点では値が求まっている、という場合には、まわりの格子点でのデータの適当な補間により、その格子点での値を求めた。今回の解析では、画面座標単位で  $l=25$ 、 $r_a=40\sim50$  とした。この  $l$  の値は約  $0.6d$  に相当する。

速度の基礎データがある程度数多く、かつあまりかたよらずに得られていれば、上記の方法により速度場（各格子点での速度）が求まる。その一例を示したのが図2である。この図から、速度場の計算が大体うまくいっていることがわかる。

得られた基礎データ及び速度場の信頼性を調べるために、次の量を計算した。

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |u_k - \tilde{u}_k|^2} / |\tilde{u}|_{\max},$$

ここで、 $N$  は（速度場の計算に用いた）基礎データの個数、 $u_k$  は基礎データにおける速度、 $\tilde{u}_k$  は各々の基礎データの位置における速度をまわりの格子点での速度から面積の逆数補間により求めたものである。さらに  $|\tilde{u}|_{\max}$  は格子点での速度絶対値の最大値である。今回の解析においては  $l/d <$



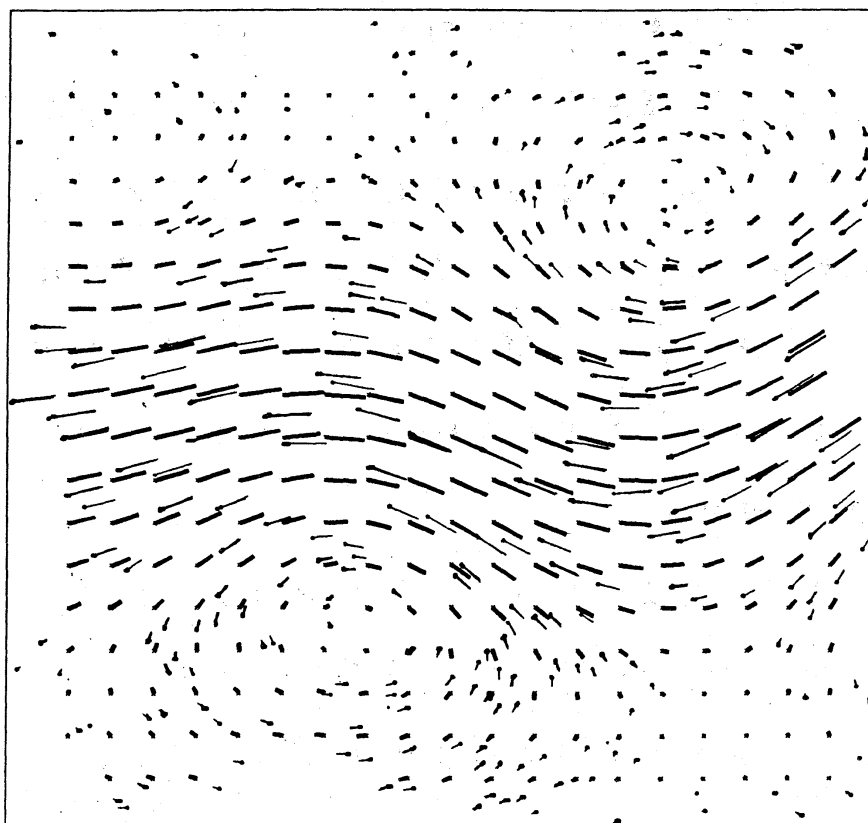


図2

速度の基礎データ (細線)  
及び各格子点での速度 (太線).  $R=140$ .  
 $L=150.6d$ .

50 のときには  $0.1 \sim 0.2$ 、 $L/d \geq 50$  のときには  $0.04 \sim 0.10$  であった。

次に、本研究で調べた流れについては流体は非圧縮である  
とみなすことができるので、得られたデータに基づく  $\partial u / \partial x +$   
 $\partial v / \partial y$  がどの程度 0 に近いかが、速度場の計算精度や二次元  
性の程度の目安になる。そこでまず、

$$\delta_D = \sqrt{\frac{1}{N_m} \sum_{i,j} D_{ij}^2},$$

を計算した。ここで、

$$D_{i,j} = \frac{\tilde{u}_{i+1,j} - \tilde{u}_{i-1,j}}{2l} + \frac{\tilde{v}_{i,j+1} - \tilde{v}_{i,j-1}}{2l},$$

であり、 $(\tilde{u}_{i,j}, \tilde{v}_{i,j})$  は格子点  $(il, jl)$  における速度ベクトルである。そして、ここでは  $l$  は物理座標単位で与える。また  $N_m$  は、その点及びまわりの4点で速度が求まっているような格子点の数である。

また渦度場は、次の最も単純な式により計算した。

$$\omega_{i,j} = \frac{\tilde{v}_{i+1,j} - \tilde{v}_{i-1,j}}{2l} - \frac{\tilde{u}_{i,j+1} - \tilde{u}_{i,j-1}}{2l},$$

ここで、 $\omega_{i,j}$  は格子点  $(il, jl)$  における渦度である。求めた渦度場の時間変化については次節で結果を示し考察を行なう。この  $\omega_{i,j}$  を用いて

$$\delta\omega = \sqrt{\frac{1}{N_m} \sum_{i,j} \omega_{i,j}^2},$$

を計算し  $\delta D / \delta\omega$  を求めた。その結果、 $\delta D / \delta\omega$  は  $L/d < 50$  のときには  $0.2 \sim 0.4$ 、 $L/d \geq 50$  に対しては  $0.1 \sim 0.15$  であった。

## 5. カルマン渦列の時間発展

本研究では  $R = 104$  と  $140$  の場合を調べた。Taneda<sup>2)</sup> の実験結果によると、これらの  $R$  では、カルマン渦列がいった

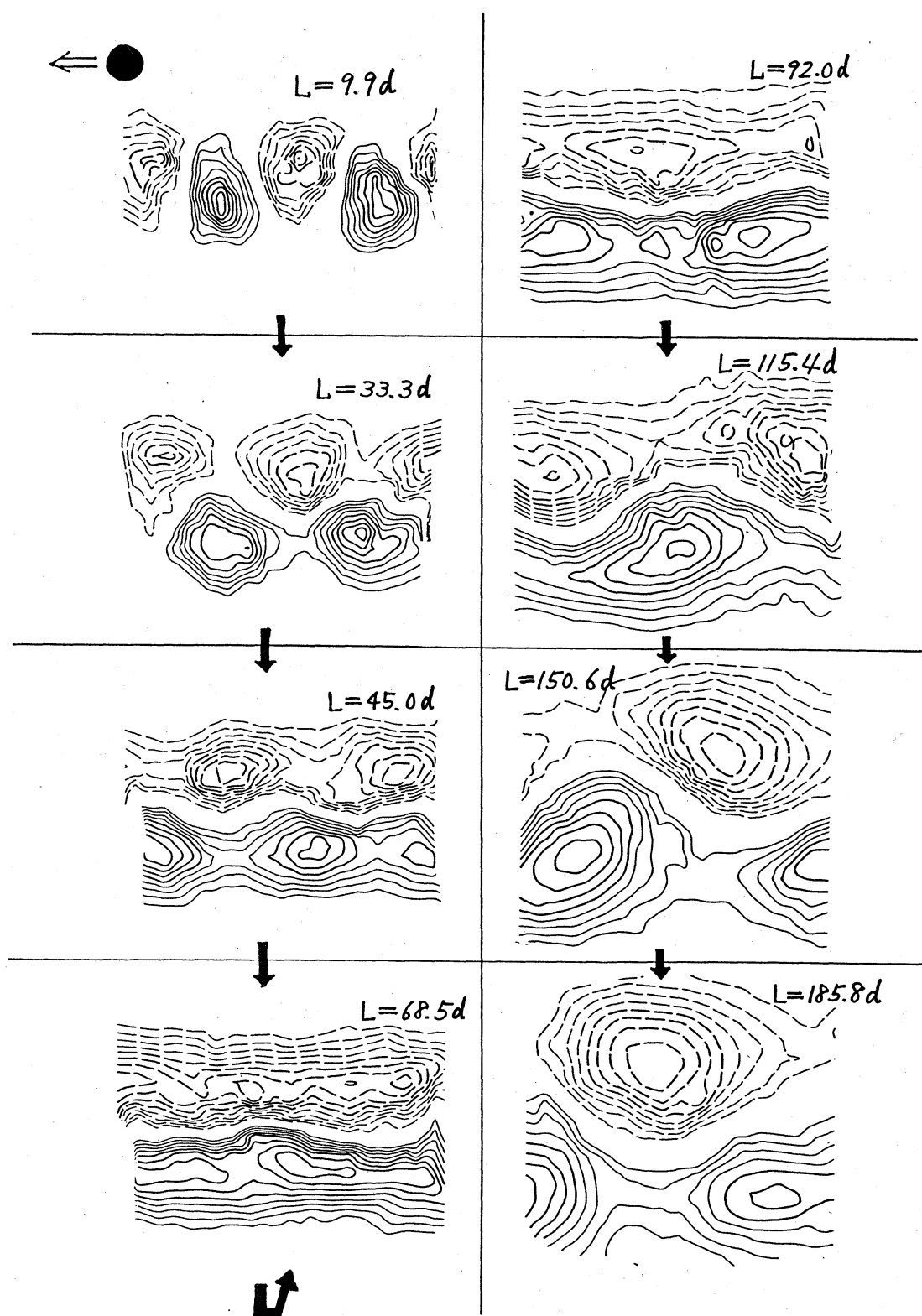


図3. 各 $L$ における渦度分布.  $R=140$ . 実線、破線はそれぞれ正負の渦度の等高線を示し、各 $L$ に対する渦度の最大絶対値の0.1倍きざみで描いてある。なお、左上の黒丸は円柱の大きさを示している。

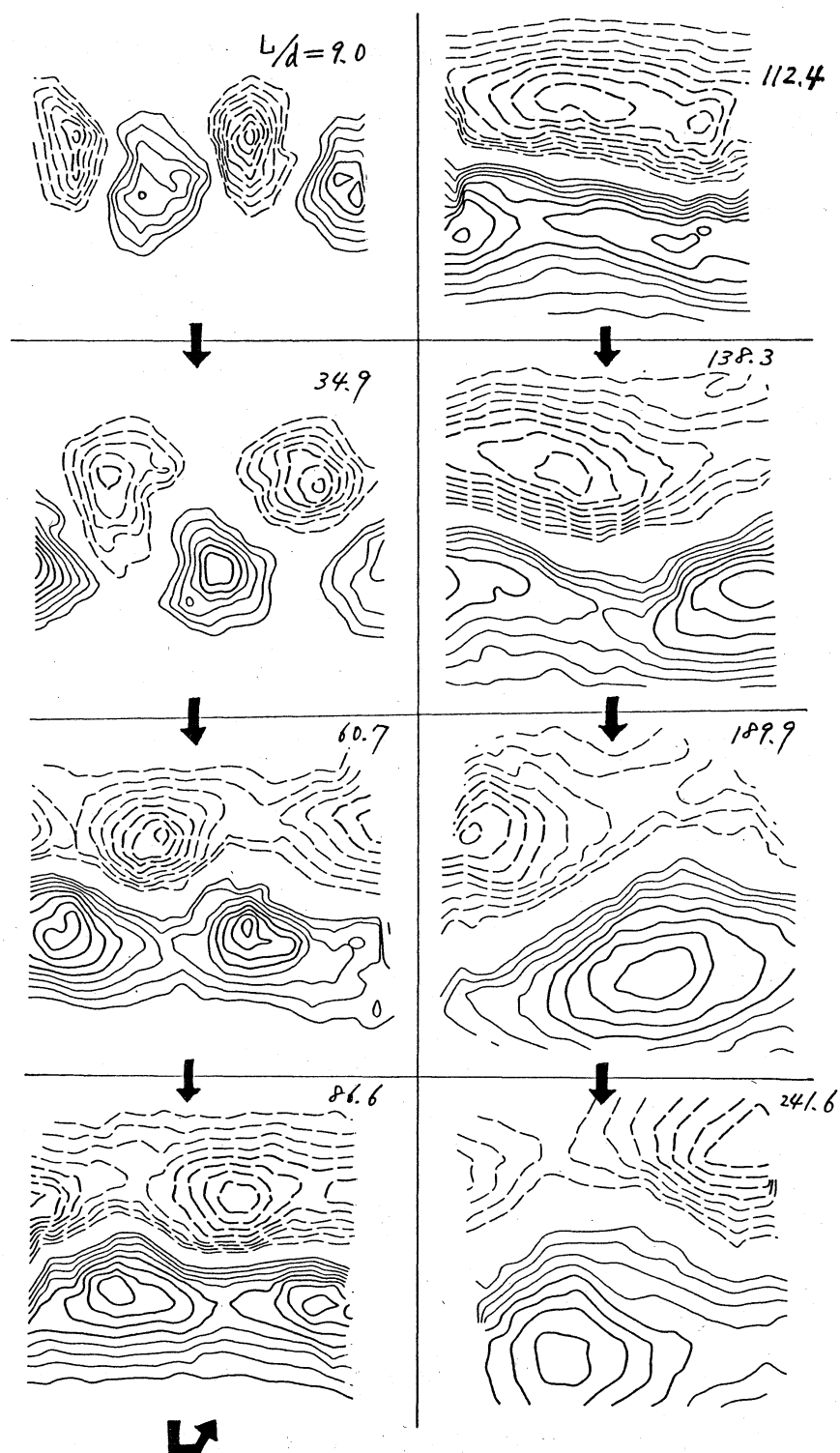


図4. 各 $L$ における渦度分布.  $R=104$ . 各等高線の意味は図3と同じ. なお、円柱は右から左へ動かした。

ん崩壊したあと、しばらくして二次カルマン渦列が形成される。前節で述べた方法によって得られた渦度の空間分布が $L$ とともにどのように変化していくかを図3、4に示した。これらの図において、実線、破線はそれぞれ正、負の等渦度線を示す。ここで注意すべきことは、等高線を書く渦度の値は、各 $L$ での渦度の最大絶対値の定数倍としたので $L$ によって異なる、ということである。これらの図からわかるように、比較的小さい $L$ に対しては互い違い型配列のほぼ規則的な渦列がみえるが、 $L$ の増大とともに渦度は主に $x$ 方向（円柱の進行方向）に拡散していき、 $L/d = 68.5$ （図3）、 $112.4$ （図4）では、むしろ平行二重渦層に近い感じになっている。このような状態がカルマン渦列の崩壊に対応していると思われる。さらに大きい $L$ では、よりスケールの大きい二次カルマン渦列の形成がみられる。また、Honji<sup>4)</sup>の実験によると、 $R$ が104、140のとき、円柱からそれぞれ $90d$ 、 $60d$ 程度の距離でカルマン渦列が崩壊するが、上に示したように、本研究でも大体同様な結果が得られた。

次にカルマン渦列の崩壊・再配列のメカニズムについて考えてみよう。渦列の崩壊の本質的理由はよくわからないが、少なくともここを示した $R$ の場合には、現象的には図3、4で示したように渦度の主に $x$ 方向への拡散がおこっている。

従って、渦度の集中した領域が相互作用をして合併などを行なうことにより渦列が崩壊していく、という感じはない。

Matsui と Okude<sup>5), 9)</sup> は、 $R=140$  で、カルマン渦列の速度変動周波数の半分の周波数の擾乱を与えた特別の場合について、渦度分布の時間変化を求め、渦領域の pairing がおこるとしているが、彼らの得た渦度分布は我々のものとよく似ており、二次カルマン渦列の構造があらわれる前に、やはり平行二重渦層に近い状態が存在している。また、Tsuboi と Oshima<sup>10)</sup> による離散渦点法を用いた数値計算では、粘性が無視されているにもかかわらず、適当な比  $h/a$  と擾乱の波長に対しては、図3、4と同様な渦領域のふるまいがみられる。従って、今回示したようなカルマン渦列の崩壊過程においては、粘性はあまり重要でない可能性がある。

また、ともかく渦列の崩壊により平行二重渦層に近い流れができるとすれば、その流れの不安定により二次カルマン渦列ができる、と解釈するのが自然であろう。従って、二次カルマン渦列の波長は、カルマン渦列が崩壊した場所における速度分布（近似平行剪断流）に対する最も不安定なモードの波長に近いことが予想される。実際に得られた速度分布に対する安定性の計算結果については後日報告する予定である。いまのところわかっているのは、この速度分布から求

めた局所レイノルズ数は臨界レイノルズ数よりず、と大きい、  
 というのである。

### 参 考 文 献

- 1) Roshko, A. NACA Report, No. 1191 (1954).
- 2) Taneda, S. J. Phys. Soc. Japan 14 (1959) 843.
- 3) 例えは、Lamb, H: "Hydrodynamics", Cambridge Univ. Press  
 (1932) 228 を参照.
- 4) Honji, H. J. Phys. Soc. Japan 55 (1986) 2897.
- 5) Matsui, T. & Okude, M. "Proc. IUTAM Symposium  
 Marseille 1982", Springer (1983) 156.
- 6) 例えは、流れの可視化学会編: "新版流れの可視化ハンド  
 ブック", 新倉書店, (1986), 第10章を参照.
- 7) 種子田 他 九州大学応用力学研究所所報 65 (1987)  
 511.
- 8) 鳥谷, 船越, 星野 九州大学応用力学研究所所報 65  
 (1987) 199.
- 9) Matsui, T. & Okude, M. "Proc. 7th Biennial Symposium on  
 Turbulence, 1981" (1983) 303.
- 10) Tsuboi, K. & Oshima, Y. "Numerical Method in Fluid  
 Mechanics I" (ed. K. Oshima) 230.