

細長い容器内の二層流体のファラデー共鳴

京都大学 情報学研究科 複雑系科学専攻 田村 桂太 (Keita Tamura)

船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

Department of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems,
Kyoto University

ファラデー波とは、自由表面あるいは界面をもつ流体を入れた容器を、ある波のモードの固有振動数の 2 倍に近い振動数で鉛直方向に加振するとき、パラメータ共鳴により生じる波のことである。Wu et al. [1] により、容器が細長い直方体の場合には、容器の幅方向の定在波の振幅が容器の長さ方向にゆっくりと変化する、ソリトンのようなファラデー波が観察されている。また Sasaki [2] は、ふたをした細長い容器の中の二層流体の界面のファラデー波を理論的に調べ、その振る舞いが二流体の密度比と深さに依存して変化することを示した。

本研究では、この二層流体中のファラデー波の問題を、上層流体が自由表面を持つように拡張した。この場合は、定在波の各波数に対して 2 つの振動数をもつ波が可能であり、振動数の大きい方を表面波モード、小さい方を内部波モードと呼ぶことにする。図 1 には、細長い容器に対してとった直交座標系 (x', y', z') を示してある。 L を容器の長さ、 W を容器の幅として、 $L \gg W$ であるとする。また、 h_1 を上層流体の水深、 h_2 を下層流体の水深とした。上層流体の密度 ρ_1 は下層流体の密度 ρ_2 に比べて小さいので、 $\rho_1 = \rho_2(1 - \Delta)$ とした。ここで、 Δ は密度差を表し、 $0 < \Delta < 1$ を満たす。

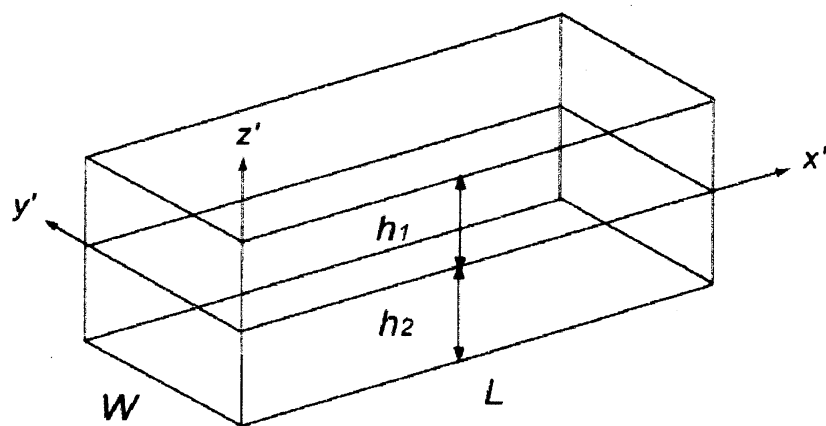


図 1 細長い容器の座標系

本研究では、通減摂動法を用いて、容器の鉛直加振 (振動数 $2\omega_f$) によって励起される、幅方向に N 個の節を持つ表面波モードあるいは内部波モードの定在波が、長さ方向に緩

やかに変化していると仮定し、この波の複素振幅 u の時間発展を決める、非線形シュレディンガー方程式型の次の方程式を導いた。

$$\frac{i}{\omega_0} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u \right) + \frac{\gamma}{k_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u |u|^2 - \mu u \overline{|u|^2} + \frac{\omega_f - \omega_0}{\omega_0} u + \frac{4a\omega_f^2}{g} \delta u^* = 0 \quad (1)$$

ここで、 x と t は長さ方向の座標と時間を無次元化したものであり、係数 $\beta, \gamma, \mu, \delta$ は上層流体と下層流体の水深、密度差、モードに依存する量である。また、 k_0 は定在波の波数であり、 N 個の節ができると考えると $k_0 = N\pi/W$ の関係が成り立つ。 ω_0 は波数 k_0 の定在波の固有振動数である。 a は鉛直加振の振幅、 g は重力加速度である。

(1) において λu は減衰項であり、 λ は減衰定数である。 $\beta u |u|^2$ は非線形性の効果を表す項で、 $\mu u \overline{|u|^2}$ は体積保存から要請される項である。ここで、 $\overline{|u|^2}$ は $|u|^2$ の長さ方向の平均値を表す。また $\frac{\omega_f - \omega_0}{\omega_0} u$ は、共鳴条件からの小さいずれの効果を表す項であり、 $\frac{4a\omega_f^2}{g} \delta u^*$ は鉛直加振の効果を表す外力項である。自由表面をもつ二層流体の系においては、 γ は常に正であり、 β は正にも負になり得ることがわかった。 $\beta > 0$ では、(1) はソリトンのなファラデー波の解をもつことが可能であり、 $\beta < 0$ ではキंक型の解が可能であることが知られている。

本研究では、内部波モードと表面波モードのそれぞれにおいて、非線形項の係数 β の密度差依存性と水深依存性を調べた。その結果、表面波モードでは、どちらかの水深がある値より大きければ、 $\beta > 0$ となってソリトンのな解が可能であるのに対し、内部波モードでは、両方の水深がある値より大きくなければ、 $\beta > 0$ とはならずソリトンのな解が得られないことがわかった。

参考文献

- [1] J. Wu, R. Keolian and I. Rudnick, Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1421-1424.
- [2] K. Sasaki, Standing-wave solitons on an interface between layered fluids in a channel, J. Phys. Soc. Jpn. **62** (1993) 2675-2684.