

折り紙ユニットで構成可能な凸多面体の合同判定

九州工業大学・大学院工学研究院 藤田 敏治

Toshiharu Fujita

Graduate School of Engineering, Kyushu Institute of Technology

1 はじめに

正方形あるいは長方形の折り紙から折り紙ユニットと呼ばれるものを作成し、それらを複数組み合わせることで多面体を作成することができる。折り紙ユニットは、継手や差し込み口をもつ多角形の形状をしたもので、ユニットの継手が、他のユニットの差し込み口に差し込まれることで、ユニット同士がつながっていく。1種類（場合によっては数種類）の折り紙ユニットをもとに、折り目を工夫して組み合わせることで多様な多面体を作成できることが魅力である。代表的な折り紙ユニットとして園部式と呼ばれるものが知られているが、他にも様々な折り紙ユニットが考案され、美しい多面体を作成することが可能である。例えば [9, 10] の中で三村は、正方ユニットおよび3角ユニット、3角正方ユニットと呼ばれるものを用いて、正多面体や準正多面体をはじめ様々な多面体の構成方法を与えている。また、[11, 12, 13, 14] では一般3角ユニットなるものが考案され、星形正多面体なども正確に実現されている。

著者らは [7] において、折り紙ユニットで作成可能な凸多面体すべてを網羅すべく、折り紙ユニットから構成し得る立体の展開図として実現可能な図形の列挙、および得られた各展開図から凸多面体が構成可能な条件の抽出について動的計画法を用いて考えた。その結果、組み合わせる折り紙ユニットの数が比較的少ない場合については、作成可能な凸多面体は何種類あり、どのような形であるかについて知ることができた。しかし、一定数以上の折り紙ユニットを組み合わせた場合、確認すべき組み合わせ数（解として得られる条件の数）が膨大になり、確認作業は困難を極めた。そこで本報告では、確認すべき組み合わせ数を大幅に削減すべく、[7] で得られた結果をもとに、そこから構成される凸多面体の合同判定について考える。なお、ここでの凸多面体は、凸多角形を面として持つ2面体も含むものとする。

2 折り紙ユニットによる凸多面体の構成

本節では、折り紙ユニットで構成可能な凸多面体を調べた [7] の概要、および、ここで解決すべき問題について述べる。また、[7] および本報告において具体的に想定している折り紙ユニットは [9, 10] で用いられた正方ユニットおよび3角ユニットであるが、もちろん他の折り紙ユニットに対しても適用可能な枠組みとなっている。

2.1 多角形からの凸多面体構成

折り紙ユニットで構成可能な凸多面体を探るにあたって、当初、問題としていたものは、与えられた展開図（多角形）から、何種類の凸多面体を作成できるかであった。実際、正方ユニットにより作成する立体は、複数の合同な正方形を、互いの1辺を共有させる形で接続した図形を展開図として持つものとなっている。そして、展開図から立体を組み立てる場合も、（展開図を構成する正方形の単位で考えた際の）辺と辺を共有させることで実現されている。例えば、3節の図3において、(A) は正方形3個からなる展開図の一つで、辺0と辺3、辺1と辺2、辺4と辺7、辺5と辺6がそれぞれ共有されるように立体を作成すると、(c) の両3角錐を得る。すなわち、目的を

達成するためには、与えられた展開図から凸多面体が作成可能な辺の組み合わせをすべて求めることが必要となる。

この問題の解決にあたって、[7] では Lubiw と O'Rourke の [8] のアイデアをもとに、新たに相互依存型決定過程の枠組みで定式化し、解法を与えた。

2.2 折り紙ユニットの接続

前小節で述べた結果により、特定の形（展開図）に接続した折り紙ユニットから凸多面体が構成可能か否か、そして可能な場合、どのように辺を組み合わせれば凸多面体が得られるかについては解決した。しかし、一定数の折り紙ユニットを利用した場合でも、その接続の仕方によって展開図に相当する部分の形が異なり、作成できる凸多面体も一般に異なる。よって、折り紙ユニットのあらゆる接続の仕方から生じる図形をすべて展開図として考慮する必要があるが、折り紙ユニット数が増えるにつれ、その種類は爆発的に増加する。そこで、折り紙ユニットから構成可能なすべての展開図の列挙についても動的計画法を適用し、先の結果と合わせて、どのような凸多面体が構成可能であるかを考えた。

なお、正方ユニットに比べて、3角ユニットの場合がより細かく接続状況を考慮する必要がある、[7] においては3角ユニットについて詳細に解析している（正方ユニットの場合も同様に処理することは可能）。定式化にあたり、初期状態を1個の3角ユニットに対応する展開図（すなわちひし形）とし、ステージごとに3角ユニットを1個接続していき、対応する展開図を次状態として表した。そして、最終状態として現れる展開図に2.1節で紹介した手法を適用して、その展開図で凸多面体が作成可能か否かを判定させた。

2.3 合同判定

これまでの結果により、折り紙ユニットの個数を与えた際に考慮すべき展開図の列挙、そして得られた各展開図において凸多面体が構成されるための折り紙ユニット間の接続情報 — すなわち正方形または3角形の辺の接続情報 — をすべて列挙することができた。しかしながら、具体的にどのような凸多面体が出来上がるかは、辺の接続情報をもとに実際に作成してみるまでわからない。たとえば、正方ユニット1個の場合、正方形の各辺に順に0, 1, 2, 3 とラベルが付され、 $\{0-1, 2-3\}$ または $\{0-3, 1-2\}$ の組み合わせが解として得られる。前者は、「辺0」と「辺1」、「辺2」と「辺3」がそれぞれ共有されるように組み合わせることを意味し、この場合、一本の対角線が折り目となり、直角2等辺3角形を面として持つ2面体が出来上がる。後者の場合も同様に考えると、もう一本の対角線を折り目として、やはり直角2等辺3角形を面として持つ2面体を得る（図1参照）。

正方ユニット2個の場合については、正方形2個が連なった展開図に対し、5組の解が得られ、 $\{0-1, 2-3, 4-5\}$, $\{0-5, 1-2, 3-4\}$ については直角2等辺3角形、 $\{0-1, 2-5, 3-4\}$, $\{0-5, 1-4, 2-3\}$ については平行四辺形、 $\{0-3, 1-2, 4-5\}$ については正方形を面にもつ2面体がそれぞれ出来上がる（図2参照）。

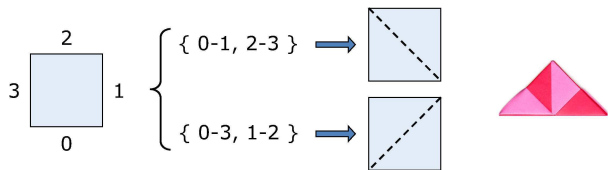


図 1: 正方形1個からの凸多面体

表 1: 正方ユニットに対する展開図数と辺の組合せ総数

ユニット数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
展開図数	1	1	2	5	12	35	108	369	1280	4587	16472	59323
辺の組合せ総数	2	5	15	55	148	502	1539	5135	15385	51935	150673	467775

表 2: 3角ユニットに対する展開図数と辺の組合せ総数

ユニット数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
展開図数	1	2	9	40	238	1514	10145	68657	458118	2964308
辺の組合せ総数	2	9	56	306	1918	11997	73166	422058	2353875	12497475

次に、正方ユニット 3 個の場合について考えると、2 種類の展開図 (図 3 の (A),(B)) を考慮する必要があり、凸多面体が構成可能な辺の組み合わせは、(A) に対し 8 通り、(B) に対し 7 通り存在する。15 通りについてすべて実際に作成してみると、台形や等脚台形を面にもつ 2 面体 (図 1(a),(b))、および両 3 角錐 (図 1(c)) の 3 種類が得られる。

一般に、正方ユニット n 個に対し、可能なすべての展開図数と各展開図に対する辺の組み合わせの総数を表 1 に挙げる。解として生じる展開図には、図形としては合同な展開図だがラベル

の付け方が異なるもの、あるいは鏡像関係にあるものも含まれるが、表 1 においては除外している。なお、3 角ユニットに対するものは表 2 である。具体的に作成して形を調べつくすことは、正方ユニットで $n = 5, 6$ 、3 角ユニットで $n = 3, 4$ あたりが限界であろうと思われる。したがって次節では、展開図および辺の組み合わせ情報をもとにして、そこから構成される凸多面体の合同判定について考える。

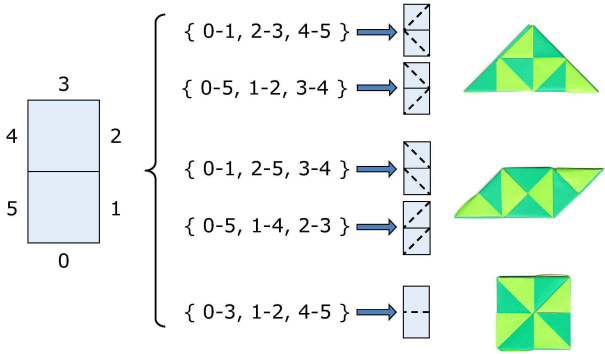


図 2: 正方形 2 個からの凸多面体

3 凸多面体合同判定問題

ここでは、まず 1 段の決定過程からなる相互依存型決定過程問題 (MDDP) について紹介し、次いで、凸多面体合同判定問題を 1 段 MDDP により定式化する。

3.1 1 段 MDDP モデル

相互依存型決定過程 [2, 3, 4, 6] とは、複数の決定過程から構成

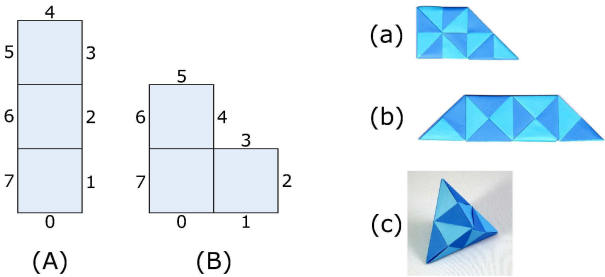


図 3: 正方形 3 個に対する展開図と凸多面体

され、各決定過程の利得関数が他の決定過程問題群の最適値の関数として定まるものである。このような依存構造が再帰的に与えられ、各決定過程における終端状態に対しては、通常の終端利得関数が割り当てられる。ここで適用されるモデルは、2種類の決定過程から構成されるもので、各決定過程が特に1段問題になっているものである。この種のモデルは [5] において扱われており、ここでは、その概要について述べる。なお、相互依存型決定過程は、ノンシリアル推移 ([1, 15]) の一種である分岐型状態推移上に構成された決定過程の1種でもある。

まず、2つの(1段)決定過程問題 — 主決定過程と副決定過程 — を考える。

$$\begin{aligned} \text{主決定過程 } P(x_0) \quad & \text{maximize } \left[r(x_0, u_0) + r_G(x_1) \right] \\ & \text{subject to } x_1 = f_{XX}(x_0, u_0) \\ & u_0 \in U(x_0), \end{aligned}$$

ただし

- (1) X は有限状態空間をあらわし、 $T_X \subset X$ は終了状態集合とする。また、 $x_n \in X$ ($n = 0, 1$) は時刻 n における状態をあらわす。
- (2) U は有限決定空間をあらわし、 $u_0 \in U$ は時刻 0 における決定をあらわす。以下、一般に与えられた集合 S に対し、 S の部分集合全体を 2^S で表す。ここで、写像 $U : X \setminus T_X \rightarrow 2^U \setminus \{\phi\}$ は各非終了状態に対し実行可能な決定全体を与えるものとする。
- (3) $f_{XX} : G_r(U) \rightarrow T_X$ は確定的推移法則をあらわす。ただし、

$$G_r(U) = \{(x, u) \mid u \in U(x), x \in X \setminus T_X\}$$

である。

- (4) $r : G_r(U) \rightarrow \mathbf{R}$ は利得関数をあらわし、 $r_G : T_X \rightarrow \mathbf{R}$ は終端利得関数をあらわす。

である。

$$\begin{aligned} \text{副決定過程 } Q(y_0) \quad & \text{maximize } \left[q(y_0, v_0) + q_G(y_1) \right] \\ & \text{subject to } y_1 = f_{YY}(y_0, v_0) \\ & v_0 \in V(y_0), \end{aligned}$$

ただし

- (1) Y は有限状態空間をあらわし、 $T_Y \subset Y$ は終了状態集合とする。また、 $y_n \in Y$ ($n = 0, 1$) は時刻 n における状態をあらわす。
- (2) V は有限決定空間をあらわし、 $v_0 \in V$ は時刻 0 における決定をあらわす。ここで、写像 $V : Y \setminus T_Y \rightarrow 2^V \setminus \{\phi\}$ は各非終了状態に対し実行可能な決定全体を与えるものとする。
- (3) $f_{YY} : G_r(V) \rightarrow T_Y$ は確定的推移法則をあらわす。
- (4) $q : G_r(V) \rightarrow \mathbf{R}$ は利得関数をあらわし、 $q_G : T_Y \rightarrow \mathbf{R}$ は終端利得関数をあらわす。

である。

ここで、主決定過程および副決定過程の最適値関数 W, Z をそれぞれ次で定義する。

$$\begin{aligned} W(x_0) &= r_G(x_0) & x_0 \in T_X, \\ W(x_0) &= \max_{u_0 \in U(x_0)} [r(x_0, u_0) + r_G(x_1)] & x_0 \notin T_X, \\ Z(y_0) &= q_G(y_0) & y_0 \in T_Y, \\ Z(y_0) &= \max_{v_0 \in V(y_0)} [q(y_0, v_0) + q_G(y_1)] & y_0 \notin T_Y. \end{aligned}$$

また、各決定過程の状態空間 X と Y の間に確定的推移：

$$f_{XY} : G_r(U) \rightarrow Y, \quad f_{YX} : G_r(V) \rightarrow X$$

を与える。 f_{XY} は、主決定過程の状態 $x \in X$ とその時の決定 $u \in U(x)$ に対し、副決定過程の初期状態 $f_{XY}(x, u) \in Y$ を定め、 f_{YX} は、副決定過程の状態 $y \in Y$ とその時の決定 $v \in V(y)$ に対し、主決定過程の初期状態 $f_{YX}(y, v) \in X$ を定める。さらに、主決定過程 $P(x_0)$ の利得関数 $r(x, u)$ および副決定過程 $Q(y_0)$ の利得関数 $q(y, v)$ は、それぞれ副決定過程問題 $Q(f_{XY}(x, u))$ 、主決定過程問題 $P(f_{YX}(y, v))$ の最適値で与えられるとする。すなわち

$$r(x, u) = Z(f_{XY}(x, u)), \quad q(y, v) = W(f_{YX}(y, v))$$

である。なお、 $f_{XY}(x, u)$ 、 $f_{YX}(y, v)$ が終了状態のとき、右辺は終端利得となる。このとき、解くべき問題は、所与の初期状態 $\bar{x}_0 \in X$ に対する問題 $P(\bar{x})$ である。

相互依存型決定過程の最適値関数 $W(x)$ 、 $Z(y)$ に対しては、次の相互依存型再帰式が成り立つ ([5])。

$$\begin{aligned} W(x) &= r_G(x) & x \in T_X, \\ W(x) &= \max_{u \in U(x)} \left[Z(f_{XY}(x, u)) + r_G(f_{XX}(x, u)) \right] & x \notin T_X, \\ Z(y) &= q_G(y) & y \in T_Y, \\ Z(y) &= \max_{v \in V(y)} \left[W(f_{YX}(y, v)) + q_G(f_{YY}(y, v)) \right] & y \notin T_Y. \end{aligned}$$

これらを利用することで、問題 $P(\bar{x})$ の最適値 $W(\bar{x})$ が得られる。

3.2 合同判定問題の定式化

最初に正方ユニット 3 個の場合、すなわち展開図が正方形 3 個からなる場合について詳しく見ていく。この場合、先に述べたように、3 種類の凸多面体が作成可能（内 2 種類は 2 面体）であるが、ここでは図 3(c) の両 3 角錐について考える。以後、図 3 の展開図 (A)、(B) をそれぞれ展開図 A、展開図 B と呼ぶこととする。両 3 角錐は、展開図 A をもとに $\{0-3, 1-2, 4-7, 5-6\}$ または $\{0-5, 1-4, 2-3, 6-7\}$ で表される辺の組み合わせにより構成され、また展開図 B をもとにした $\{0-1, 2-5, 3-4, 6-7\}$ から構成される。この 3 通りの展開図と辺の組み合わせを如何に同一視するかが問題となる。

そこで、まず、展開図の構成単位として個々の正方形にラベルを A, B, C と付け、各正方形の 4 辺に、辺ラベル 0, 1, 2, 3 を付与する。ラベル付けの例を図 4 に示す。なお、後の定式化にお

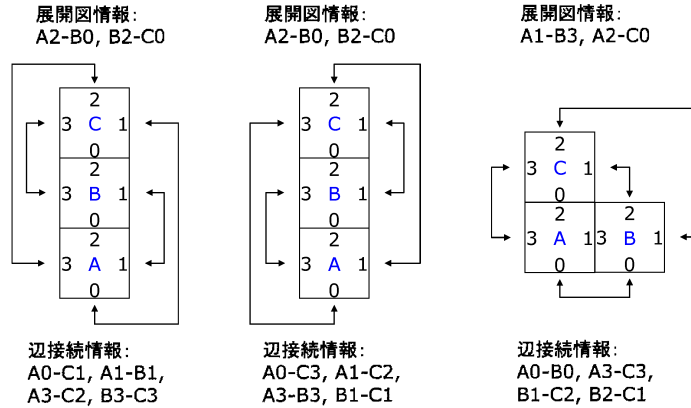


図 4: ラベル付けと両三角錐を構成する辺の組合せ

いて、どの正方形にどのラベルを与えるかは任意であり、どの辺にどのラベルを与えるかについては、右回りか左回りに統一さえしておけば任意でよい。

さて、このラベル付けに合わせて、あらためて辺接続情報を書き直すと

$$\{0-3, 1-2, 4-7, 5-6\} \rightarrow \{A0-C1, A1-B1, A3-C2, B3-C3\}, \quad (1)$$

$$\{0-5, 1-4, 2-3, 6-7\} \rightarrow \{A0-C3, A1-C2, A3-B3, B1-C1\}, \quad (2)$$

$$\{0-1, 2-5, 3-4, 6-7\} \rightarrow \{A0-B0, A3-C3, B1-C2, B2-C1\} \quad (3)$$

となる(図4の左から順に対応)。(1)~(3)の后者(右辺)を辺接続情報と呼ぶ。これに加えて、展開図情報が必要である。これは、各正方形の辺がどのように接続されて展開図が構成されているかを表し、展開図Aについては $A = \{A2-B0, B2-C0\}$ 、展開図Bについては $B = \{A1-B3, A2-C0\}$ となる(図4参照)。

これらの情報をもとに、展開図の同値性を検証していく。具体的には、「辺接続情報(1)+展開図情報A」を基準とし、「辺接続情報(2)+展開図情報A」および「辺接続情報(3)+展開図情報B」がいかなる変換で同一視できるかを考える(本質的にはグラフの同型判定)。

(i) 「辺情報(2)+展開図情報A」の場合

図4の左2つを比較してみると、両者は鏡像関係にあることが見て取れる。よって、図5のように辺ラベルの右回りと左回りを入れ替えるとき $((0,1,2,3) \rightarrow (0,3,2,1))$ 、これに合わせて辺接続情報を書き換えると

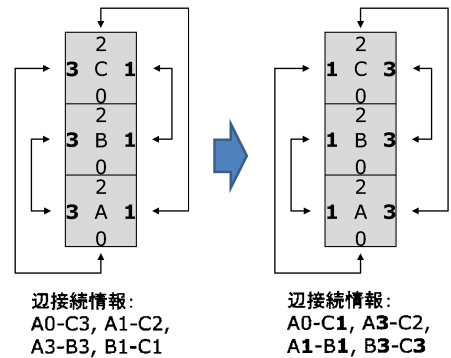


図 5: 辺ラベルの付け替え

$$\{A0-C3, A1-C2, A3-B3, B1-C1\}$$

$$\rightarrow \{A0-C1, A3-C2, A1-B1, B3-C3\}$$

を得る。これは辺接続情報 (1) に一致 (接続情報は順不同)。

(ii) 「辺情報 (3)+ 展開図情報 B」の場合

展開図が異なることから、展開図情報もあわせて考慮しなければならない。ここで、正方形ラベルの A と B を入れ替え、入れ替え後の正方形 A において、辺ラベルを $(0, 1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 0, 1)$ と 2 つづらすことにより (図 6 参照)、辺接続情報は

$$\{A0 - B0, A3 - C3, B1 - C2, B2 - C1\} \rightarrow \{B0 - A2, B3 - C3, A3 - C2, A0 - C1\}$$

に変換され、展開図情報は

$$B \rightarrow \{B1 - A1, B2 - C0\}$$

と変換される。これらの組み合わせは、辺接続情報 (1)+ 展開図情報 A に一致。

以上の考察から、「辺接続情報+ 展開図情報」をもとに、正方形ラベルの入れ替えと辺ラベルの付け替えで接続情報が一致するかを判定すればよいことが分かる。各正方形の接続関係がすべて一致するとき、本質的には同じ形の展開図から同じ辺の組み合わせにより凸多面体が構成されるのである。

以後、一般に正 p 角形 ($p \geq 3$) を N 個組み合わせた展開図について定式化を行う。ただし、 p が奇数の場合、 N は偶数でなければならない。 p, N がともに奇数であれば、全ての正 p 角形の辺の総数が奇数となり、組み立て時に共有されるペアが構成できないからである。

(I) ラベル付与と接続情報

N 個の正 p 角形にラベル $0, 1, \dots, N-1$ を、各 p 角形の辺に対し、順にラベル $0, 1, \dots, p-1$ を割り当てる。これ以降は、数式での取り扱いの観点から多角形ラベルも整数で与えることとする。展開図情報と辺接続情報は、まとめて接続情報と呼ぶこととし、

$$M = \frac{pN}{2}$$

において、比較元と比較先の接続情報をそれぞれ

$$\hat{E} = \{(\hat{s}_{11}, \hat{e}_{11}, \hat{s}_{12}, \hat{e}_{12}), (\hat{s}_{21}, \hat{e}_{21}, \hat{s}_{22}, \hat{e}_{22}), \dots, (\hat{s}_{M1}, \hat{e}_{M1}, \hat{s}_{M2}, \hat{e}_{M2})\},$$

$$E = \{(s_{11}, e_{11}, s_{12}, e_{12}), (s_{21}, e_{21}, s_{22}, e_{22}), \dots, (s_{M1}, e_{M1}, s_{M2}, e_{M2})\}$$

であらわす。 $(s_1, e_1, s_2, e_2) \in E$ は、「正 p 角形 s_1 の辺 e_1 」と「正 p 角形 s_2 の辺 e_2 」を接続することを意味するものとする ($\hat{E}$ の要素についても同様)。また、必要ならば入れ替えて $\hat{s}_{i1} \leq \hat{s}_{i2}$ ($i = 1, 2, \dots, M$) とし $\hat{E}$ 内では $(\hat{s}_{i1}, \hat{s}_{i2})$ に関して辞書式順序で並んでいるものとする (これは、計算機上に実装する際の計算効率を上げるためであり、定式化のうえで特に影響を与えるものではない)。

(II) 状態空間と決定空間

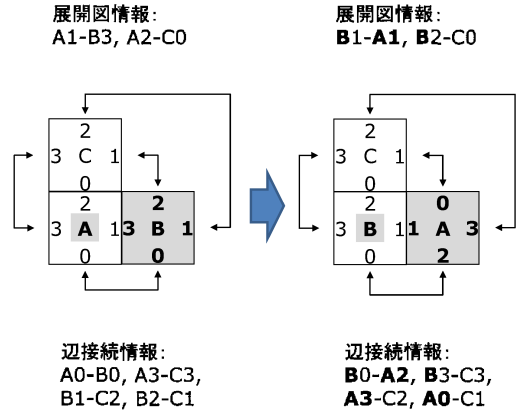


図 6: 辺ラベルと正方形ラベルの付け替え

基本的な考え方は以下の通り．まず，展開図を構成する正 p 角形に対し，順に正 p 角形ラベル（主過程の決定）・辺ラベル（副決定過程の決定）を交互に与えていく．状態によって，その時点までのラベルの与え方を記憶させ，推移と評価関数によりその都度，接続情報の同値性に関する判定を行う．

主決定過程および副決定過程における状態空間・決定空間は以下のように定める．

$$\begin{aligned}
 X &= \{(), \text{null}\} \cup \{(u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \mid u_i \in U, v_i \in V \ (i = 0, 1, \dots, n), \\
 &\quad n = 0, 1, \dots, N-1\}, \\
 T_X &= \{\text{null}\} \cup \{(u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{N-1}, v_{N-1}) \mid u_i \in U, v_i \in V \ (i = 0, 1, \dots, n)\}, \\
 Y &= \{\text{null}\} \cup \{(u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}, u_n) \mid u_i \in U \ (i = 0, 1, \dots, n), \\
 &\quad v_i \in V \ (i = 0, 1, \dots, n-1), \\
 &\quad n = 0, 1, \dots, N-1\}, \\
 T_Y &= \{\text{null}\},
 \end{aligned}$$

ただし，決定空間については

$$\begin{aligned}
 U &= \{0, 1, \dots, N-1\}, \\
 V &= \{d_0, d_1, d_2, d_3\} \quad \text{または} \quad V = \{\bar{d}_0, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\}, \\
 d_i(e) &= e + i \pmod{p} \quad (i, e = 0, 1, \dots, p-1), \\
 \bar{d}_i(e) &= (p - e) + i \pmod{p} \quad (i, e = 0, 1, \dots, p-1)
 \end{aligned}$$

である．初期状態は $x = ()$ （ラベルを定めていない状態）とし，主決定過程の決定制約については

$$\begin{aligned}
 U(x) &= U \quad (x = () \in X), \\
 U((u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1})) &= U \setminus \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\} \\
 &\quad ((u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}) \in X), \quad n = 1, 2, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

と定める．主決定過程における決定 $u_0 \in U(())$ および $u_n \in U((u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}))$ は比較元の展開図を構成する正 p 角形 n にラベル u_n を割り当てることを意味し，決定制約は，その時点までに割り当て済みのラベルを除外するものとなっている．また，副決定過程における決定 $v \in V$ は辺ラベルの付け替え関数である．2通りの V を与えているが，これらは順周りと逆回りのラベルの付け替えを表し，それぞれの V に対し別問題として扱われる．すなわち，(I) で与えた接続情報のペアに対し，2つの問題を考えることになる．実際は，一方の問題を解いて，接続情報の一致が確認できなかった場合に V を入れ替えた問題を解けばよい．

(III) 状態推移と利得関数

今回の定式化において，3.1 節で与えた主決定過程および副決定過程内の推移先としての終端状態は本質的に必要としない．そこで，推移先は無効な状態 (null) と定め：

$$f_{XX}(x, u) = f_{YY}(y, v) = \text{null} \quad (x \in X, u \in U, y \in Y, v \in V),$$

これらに対する終端利得は

$$r_G(\text{null}) = q_G(\text{null}) = 0$$

とおく．次に，副決定過程の初期状態を与える f_{XY} について考える．主決定過程の状態 $x = (u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1})$ は，比較元の正 p 角形 i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) に対し，正 p 角

形ラベルおよび辺ラベルが割り当て済みであることを表し、この x に対する決定 $u_n \in U(x)$ は正 p 角形 n に正 p 角形ラベル u_n を割り当てることであった。このとき、比較元の正 p 角形 n は比較先の正 p 角形 u_n とみなされるので、必要条件として、ラベル割り当て済みの各正 p 角形と接続される正 p 角形の数は同じでなければならない。すなわち、 $\#$ でそれに続く集合の要素数をあらわすとき

$$\# \left(\bigcup_{(\hat{s}_1, \hat{e}_1, \hat{s}_2, \hat{e}_2) \in \hat{E}; \hat{s}_1 = n} \{\hat{s}_2\} \cup \bigcup_{(\hat{s}_1, \hat{e}_1, \hat{s}_2, \hat{e}_2) \in \hat{E}; \hat{s}_2 = n} \{\hat{s}_1\} \right) = \# \left(\bigcup_{(s_1, e_1, s_2, e_2) \in E; s_1 = u_n} \{s_2\} \cup \bigcup_{(s_1, e_1, s_2, e_2) \in E; s_2 = u_n} \{s_1\} \right)$$

が成り立たなければならない。この段階でこれが成り立たなければ、以後のラベルの割り当て方如何にかかわらず、接続情報が一致することはない。したがって、等号不成立の場合 $f_{XY}(x, u_n) = \text{null}$ とおき、MDDP の推移を終了させる。そうでない場合は、ラベルの割り当て u_n を記憶させ、副決定過程の初期状態を生成する：

$$f_{XY}(x, u_n) = (u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}, u_n).$$

さて、こうして得られた副決定過程の状態 $y = (u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}, u_n)$ とこの状態に対する決定（比較元正 p 角形 n への辺ラベルの割り当て） $v_n \in V$ に対し主決定過程の初期状態を与える $f_{YX}(y, v_n)$ についても、接続情報一致の必要条件の判定をし、以後見込みがなければ $f_{YX}(y, v_n) = \text{null}$ とおき、可能性が残されていれば

$$f_{YX}(y, v_n) = (u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}, u_n, v_n)$$

と定める。ここでの必要条件は、比較元正 p 角形 n に割り当てられた辺ラベル変換関数 v_n によって、新たに定まる接続先と比較先の正 p 角形 u_n の接続先とが一致することである。すなわち $\hat{E}(n) = \{(\hat{s}_1, \hat{e}_1, \hat{s}_2, \hat{e}_2) \in \hat{E} \mid \hat{s}_2 = n\}$ に対し

$$(u_{\hat{s}_1}, v_{\hat{s}_1}(\hat{e}_1), u_n, v_n(\hat{e}_2)) \in E \quad \forall (\hat{s}_1, \hat{e}_1, n, \hat{e}_2) \in \hat{E}(n)$$

を満たすこととなる。

最後に、全てのラベルがつけ終わったとき、すなわち主決定過程に初期状態として $x = (u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{N-1}, v_{N-1})$ が渡されたとき、推移法則の与え方によって比較元と比較先の全ての接続情報が一致したこととなる。このとき

$$r_G((u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{N-1}, v_{N-1})) = 1$$

と定める。

以上の定式化 (I)～(III) により、3.1 節のモデルにおける初期状態 $x = () \in X$ に対する主決定過程問題 $P(x)$ を再帰式により解くことで、接続情報が一致するか否かを判定できる。実際、目的関数値は、利得の与え方により、一致しない場合は 0 となり、一致する場合は 1 となる。よって、 $W(x) = 1$ となるとき、接続情報は一致し、そのときの最適政策が一致させるためのラベル割り当てをあたえる。

3.3 計算機による結果

数値計算でこれまでに判明している構成可能凸多面体数について表 3 に示す。正方ユニットの場合と 3 角ユニットの場合について、ユニット数ごとまとめたものである。上段の数が、作成可

表 3: 凸多面体数

ユニット数	1	2	3	4	5	6	7	8
正方 ユニット	1 (1+0)	3 (3+0)	3 (2+1)	8 (6+2)	6 (4+2)	13 (7+6)	11 (5+6)	23 (11+12)
3角 ユニット	1 (1+0)	4 (3+1)	7 (5+2)	13 (8+5)	17 (7+10)	29 (12+17)	39 (13+26)	65
ユニット数	9	10	11	12	13	14	15	
正方 ユニット	17 (5+12)	31 (13+18)	28 (7+21)	50	41	68	65	
3角 ユニット	88	134						

能な凸多面体数をあらわし、下段のカッコ内は2面体とそうでないものの数を分けたものである。 $(a + b)$ の記述は、2面体が a 種類、それ以外（真の立体）が b 種類という意味である。2面体か否かは、実際に作成してみなければわからず、数が膨大なため判明していない分もまだまだ残されている。2面体判定問題も今後の課題である。

なお、図形として合同でも、折り紙ユニットによる作成方法は1通りとは限らない（折り紙ユニットへの折り目の付け方は一意ではない）。

謝辞

本研究は科研費 15K05004 の助成を受けたものである。

参考文献

[1] U. Bertelé and F. Brioschi, Nonserial Dynamic Programming, Academic Press, New York, 1972.

[2] T. Fujita, 結合型評価をもつ相互依存型決定過程, 京都大学数理解析研究所講究録 1802, 78-84, 2012.

[3] T. Fujita, Associative Criteria in Mutually Dependent Markov Decision Processes, Proceedings of IIAI International Conference on Advanced Applied Informatics (IIAI AAI 2014), 147-150, 2014.

[4] T. Fujita, 相互依存型マルコフ決定過程 — 結合型評価 —, 京都大学数理解析研究所講究録 1939, 189-195, 2015.

[5] T. Fujita, 相互依存型決定過程 — 1 ステージモデル — 京都大学数理解析研究所講究録 1990, 204-212, 2016.

[6] T. Fujita and A. Kira, Mutually Dependent Markov Decision Processes, Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, 18(6), 2014, 992-968.

[7] 藤田敏治, 長友健太郎, 折り紙ユニットを用いた凸多面体の構成 — 相互依存型決定過程によるアプローチ —, 京都大学数理解析研究所講究録, 1912, 17-25, 2014.

- [8] A. Lubiw and J. O'Rourke, When can a polygon fold to a polytope?, Technical Report 048, Smith College, 1996
- [9] 三村文武, ユニットにより構成される多面体の模型, 九州工業大学研究報告(工学) 47, 87-97, 1983
- [10] 三村文武, ユニットにより構成される多面体の模型 II, 九州工業大学研究報告(工学) 49, 69-76, 1984
- [11] 三村文武, ユニットにより構成される多面体の模型 III, 九州工業大学研究報告(工学) 49, 77-85, 1984
- [12] F. Mimura, Some Stellated Polyhedrons Constructed by Paper Units, HUE Journal of Humanities, Social and Natural Sciences, 32, 3-8, 2009
- [13] F. Mimura, Two Compounds Constructed by Paper Units, HUE Journal of Humanities, Social and Natural Sciences 32, 27-30, 2009
- [14] 三村文武, 岩下有里, ユニットによる星形多面体の構成, 広島経済大学研究論集 34, 23-34, 2011
- [15] G. L. Nemhauser, Introduction to Dynamic Programming, Wiley, New York, 1966.