

熱流の不安定による熱音響振動発生の臨界条件 Marginal conditions for emergence of thermoacoustic oscillations due to instability of heat flow

関西大学・システム理工学部 杉 本 信 正

Nobumasa SUGIMOTO

Faculty of Engineering Science, Kansai University

1. はじめに

温度勾配をうける静止気体には、熱流が背後流れており気体は熱的に非平衡な状態におかれている。熱流は絶えず攪乱に晒されているので、気体の温度は変動し揺らいでいる。温度の変動は当然、密度や圧力の変動を引き起こし、このため気体も完全には静止していない。もし気体全体の系に固有振動モードが存在すれば、攪乱はそのモードを励起し系を不安定化させる可能性がある。しかし、気体には粘性や熱伝導性があるので、この拡散作用により攪乱の成長は抑えられ静止状態が保たれる。

ところが温度勾配が急峻になり熱流が大きくなると、拡散作用が不安定化を抑えきれずに熱流が不安定化することが考えられる。これは丁度物質の流れが速くなると不安定化するのと似ている。不安定モードの攪乱は指数関数的に成長するが、これに伴う流体運動の非線形性によってその高調波が発生しエネルギーが高周波成分にカスケード式に輸送されるので、不安定モードの成長が弱まり振幅が次第に飽和する。この結果出現するのが熱音響自励振動である。

熱流が不安定化し気体が振動しだす現象は古くから知られているが、最近の研究の発端は液体ヘリウムを貯蔵するデュワーに差し込んだ、一端が開口した管の中で発生する気体ヘリウムのタコニス振動である [1]。開口端が液体ヘリウム表面に近づくとその端の温度は極低温になり、片や閉端は室温にあるので両者の絶対温度比は何十倍にもなる。このため軸方向に大きな温度勾配が生じ熱流が流れる。このような極めて大きい温度比でなくても、同様の現象が空気で起きることが後の研究で分かった。室温中に置かれた管内にスタックと呼ばれる細孔が多数軸方向に貫通したセラミックを配置し、これに温度比2倍程度の温度勾配を課すと熱流が不安定化し、中の空気が自励振動することが明らかになった。我々の研究室でも、両端が閉じた直管やループ管路の中にスタックを配置し、一端を高温に加熱すると管内の空気の熱音響自励振動が発生することを実験的に確認している。

そこで熱流が不安定化する温度勾配の臨界条件を定量的に知りたくなる。この最初の試みはタコニス振動に対するロットの解析である [2, 3]。ロットはナビエ・ストークス方程式を完全に解くのではなく、後で紹介する細管近似を用いることによって解析を大幅に簡便化した。この近似の適切さは、臨界条件が実験とよい一致を示すことで今や受け入れられている。ロットの方程式を用いてスタックを挿入した場合の直管やループ管路の場合に臨界条件を求める方法は、上田と加藤 [4] による伝達マトリクス法がある。

臨界条件は気体全体の系の固有振動モードと密接に関係するので、管路の形状やスタックの配置により異なる。本報告では、実験で使用した直管とループ管路を念頭に臨界条件を求める。ロットの方程式をルンゲ・クッタ法で解き、シューティング法によりその条件を求める。

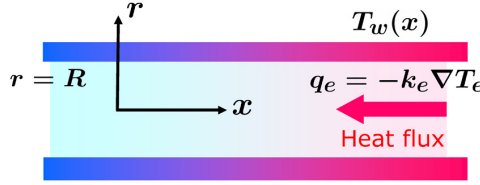


図 1: 温度勾配のある固体壁に囲まれた半径 R の流路内で静止している理想気体中を流れる熱流. 固体壁の温度 T_w が x 軸方向に緩やかに変化しており, 熱流は固体内のみならず気体中を軸方向に流れる. 静止気体の温度を T_e とすると, 熱流ベクトル $\mathbf{q}_e$ は $-k_e \nabla T_e$ で与えられる. ただし, k_e は熱伝導率である.

ロットの方程式は攪乱を振動数分解した複素振幅に対する方程式であるのに対し, これを時空間で表現した熱音響波動方程式が筆者により導かれている [5]. この方程式が導出される近似はロットの理論と同じであるので, 当然ロットの方程式がその中に含まれる. 熱音響波動方程式は, 粘性や熱伝導性による拡散時間の大小, 言い換えれば拡散層の厚さと流路の径の大小で近似できる. この近似方程式を用いる利点は, 非線形性の影響を取り込むことができる点にある [6, 7, 8].

そこで本報告のもう一つの目的は, 熱音響波動方程式を拡散層の厚さで近似した方程式を用いて臨界条件を導出し, ロットの結果と比較することである. 非線形領域への拡張を考えるには, まず線形理論で臨界条件が近似的にせよ再現できることが前提となる. これにより近似理論の性格や適用範囲が明らかになる.

2. 定式化

2.1 静止している気体と熱流

図 1 に示すような, 半径 R の円形断面の管が軸方向に温度勾配を受けるとき, その中で静止している気体中を流れる熱流を考える. 重力は無視する. 管に沿って x 軸をとり, 壁面の温度 $T_w(x)$ が軸方向にのみ変化しているとする. 半径方向座標を r として, 静止した気体温度を $T_e(x, r)$ で表す. 気体中を定常的に流れる熱流ベクトル $\mathbf{q}_e$ は, フーリエの法則を仮定し, 温度 T_e での熱伝導率を k_e として $-k_e \nabla T_e$ で与えられる. 熱流ベクトルの保存よりその発散はゼロであるので, 軸対称性を仮定すると T_e は次の式に従う:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_e \frac{\partial T_e}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.1)$$

熱伝導率は一般に温度の関数であり, 以下においては温度 T のべき乗に比例すると仮定する:

$$\frac{k}{k_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^\beta. \quad (2.2)$$

ここで, k_0 はある基準温度 T_0 での熱伝導率であり, β は 0.5 から 0.6 程度の定数である. これより $k_e/k_0 = (T_e/T_0)^\beta$ である.

いま, 壁の温度勾配が管の径に比べて十分に緩やかであるとして, 次の条件を満たしているとする:

$$\frac{R^2}{T_w} \left| \frac{d^2 T_w}{dx^2} \right| \ll \frac{R}{T_w} \left| \frac{dT_w}{dx} \right| \ll 1. \quad (2.3)$$

以下の解析では、温度勾配 dT_w/dx の 1 次項は考慮するが、 d^2T_w/dx^2 やこれ以上の高階の微分項、また $(dT_w/dx)^2$ 等の勾配の積も小さいとして無視する。この小さな温度勾配を漸近パラメータとして (2.1) を解くと、 T_e は

$$T_e = T_w + \frac{T_w^{-\beta}}{4(1+\beta)} \frac{d^2T_w^{1+\beta}}{dx^2} (R^2 - r^2) + \dots \quad (2.4)$$

と求まる。これより d^2T_w/dx^2 や $(dT_w/dx)^2$ を無視する限り、 T_e を T_w に等しくおいてよいことが分かる。よって熱流ベクトル $\mathbf{q}_e$ は x 軸方向に流れる。

この近似を行うと、静止状態での気体の温度は断面内で一様と見なせ、また気体の密度 $\rho_e(x)$ も x だけの関数で与えられる。重力の影響を無視しているので静止状態では圧力は一様で、この値を p_0 とする。理想気体を仮定するとシャルルの法則より

$$\frac{\rho_e T_e}{\rho_0 T_0} = 1 \quad (2.5)$$

となる。ここで、圧力 p_0 の下で温度が T_0 のときの密度を ρ_0 とする。

2.2 線形近似と細管近似

不安定化の臨界条件を求めるには、微小攪乱を仮定し線形近似を行う。これに加え、流路半径が流路の代表長さ L に比べて十分小さいと仮定する細管近似を導入する：

$$\frac{R}{L} \ll 1. \quad (2.6)$$

攪乱の代表的な角振動数を ω として、その伝播速度を a とするとき、波長 a/ω が長さ L と同程度かそれより長いと仮定する：

$$\frac{L}{a/\omega} = \frac{L\omega}{a} \leq 1. \quad (2.7)$$

この条件はまた、流路を伝播する速度 $L\omega$ が、代表的な攪乱の伝播速度 a に比べて同程度か遅いことを表している。伝播速度は必ずしも断熱音速ではないことに注意する。流路径が十分大きいと a はほぼ断熱音速に近いが、流路径が小さくなると a はそれより遅くなる。

流路径の大小の判断は、粘性や熱伝導性による拡散層の厚さとの比によって決まる。代表的な動粘性率を ν 、温度拡散率を κ とするとき、粘性拡散層および温度拡散層の厚さはそれぞれ、 $\sqrt{\nu/\omega}$ 、 $\sqrt{\kappa/\omega}$ によって見積もられる。以下の解析では流路径とこれらの層の厚さの大小については最初仮定を設けず、

$$\frac{\sqrt{\nu/\omega}}{R} \sim O(1), \quad \frac{\sqrt{\kappa/\omega}}{R} \sim O(1) \quad (2.8)$$

とする。動粘性率と温度拡散率の比はプラントル数 $Pr (= \nu/\kappa)$ であり、空気ではその値は 0.72 である。これより、二つの拡散層の厚さは同程度であると見なすことができる。なお、熱伝導率の温度依存性を (2.2) で考慮したように、粘性係数 μ の温度依存性も同じように温度のべき乗に比例すると仮定する：

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^\beta. \quad (2.9)$$

ここで、 μ_0 は温度 T_0 での粘性係数である。

以上の近似を用いて、気体の運動を支配する連続の式、運動方程式（ナビエ・ストークス方程式）の軸方向および半径方向成分、エネルギー式および理想気体の状態方程式を静止状態の周りに線形化し、さらに細管近似を施す。密度 ρ 、速度ベクトルの x 方向成分 u 、 r 方向成分 v 、圧力 p 、温度 T のそれぞれが静止状態の値から攪乱を受けたとして、 $[\rho, u, v, p, T] = [\rho_e + \rho', u', v', p_0 + p', T_e + T']$ とおく。ここで、 $(\cdot)'$ は攪乱を表す。それぞれの基礎方程式は、攪乱に対して以下のように与えられる [5]：

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_e u') + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho_e v') = 0, \quad (2.10)$$

$$\rho_e \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\mu_e}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u'}{\partial r} \right), \quad (2.11)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial r}, \quad (2.12)$$

$$\rho_e c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u' \frac{dT_e}{dx} \right) = \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{k_e}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T'}{\partial r} \right), \quad (2.13)$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_e} + \frac{T'}{T_e}. \quad (2.14)$$

ここで、 c_p は定圧比熱である。攪乱は座標 x, r と時間 t の関数であるが、細管近似により半径方向の速度は (2.12) で無視され、この結果圧力攪乱 p' は r に依存せず、 x, t だけの関数になる。

これらの方程式に対して、壁面での粘着条件と、壁の熱容量が十分大きいとして等温の境界条件を次のように課す：

$$u' = v' = T' = 0. \quad (2.15)$$

一方、流路は十分長いと仮定し x 方向には境界条件は課さない。

さて、攪乱を時間フーリエ分解し、角振動数 ω の振動だけ考え次のようにおく：

$$\begin{bmatrix} p' \\ \rho' \\ u' \\ v' \\ T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(x) \\ \Phi(x, r) \\ U(x, r) \\ V(x, r) \\ \Psi(x, r) \end{bmatrix} \exp(i\omega t). \quad (2.16)$$

ここで、右辺は実部をとるものとし、各複素振幅 $[P, \Phi, U, V, \Psi]$ は P を除いて x と r の関数である。このことを用いて (2.11) と境界条件 (2.15) とから U を求めると

$$U = \frac{i}{\rho_e \omega} \left\{ 1 - \frac{I_0[(i\omega/\nu_e)^{1/2} r]}{I_0[(i\omega/\nu_e)^{1/2} R]} \right\} \frac{dP}{dx} \quad (2.17)$$

となる。ここで、 I_0 および後に述べる I_1 は第一種変形ベッセル関数である。また、 ν_e は温度 T_e での動粘性率 μ_e/ρ_e を表す。流速 U が dP/dx で表すことができたので、(2.13) から温度 Ψ も同様

に圧力およびその勾配で表すことができる。温度が分かれば (2.14) より密度 Φ が求まるので、これらを (2.10) に代入すれば P に対する方程式が導かれる。このようにして複素圧力振幅 P に対して次式を得る：

$$\frac{d}{dx} \left[(1-f) a_e^2 \frac{dP}{dx} \right] + \left(\frac{f-f^*}{1-\text{Pr}} \right) \frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{dP}{dx} + \omega^2 [1 + (\gamma-1)f^*] P = 0. \quad (2.18)$$

ここで、プラントル数 $\text{Pr} (\equiv \nu_e/\kappa_e; \kappa_e = k_e/\rho_e c_p)$ は定数とし、 $a_e (= \sqrt{\gamma p_0/\rho_e} = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T_e})$ は断熱音速（ただし、 γ は比熱比、 $\mathcal{R}$ は気体定数）であり、 $\eta_e, f(\eta_e)$ および $f^*(\eta_e)$ は、

$$\eta_e(x) = \left(\frac{i\omega}{\nu_e} \right)^{1/2} R, \quad f(\eta_e) = \frac{2I_1(\eta_e)}{\eta_e I_0(\eta_e)}, \quad f^*(\eta_e) = f(\sqrt{\text{Pr}} \eta_e) \quad (2.19)$$

で定義される。方程式 (2.18) がロットの式 [2, 3] として知られている。

この P に対する 2 階の微分方程式を解くよりも、質量流束密度ベクトルの x 方向成分 $\rho_e u'$ を断面平均した量と連立した 1 階の方程式を解くほうが便利である。平均した質量流束密度の複素振幅 $F(x) (\equiv \rho_e \bar{U})$ は

$$F \equiv \rho_e \bar{U} = \frac{i}{\omega} (1-f) \frac{dP}{dx} \quad (2.20)$$

と書ける。この F を用いてロットの方程式を書き直すと

$$\frac{dP}{dx} = - \frac{i\omega}{(1-f)} F, \quad (2.21)$$

$$\frac{dF}{dx} = - \left[1 + \frac{1}{1-\text{Pr}} \left(\frac{f-f^*}{1-f} \right) \right] \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} F - \frac{i\omega}{a_e^2} [1 + (\gamma-1)f^*] P \quad (2.22)$$

となる。ここで F を消去すればもちろんロットの式が得られる。

2.3 熱音響波動方程式とその近似

ロットの方程式は複素圧力振幅が従う方程式であるが、方程式 (2.10)–(2.14) を振動数に分解せずに時間に関するフーリエ変換を用いて解くと、 p' に対して次の熱音響波動方程式が導かれる [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{R} \mathcal{N} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] + \frac{2(\gamma-1) \sqrt{\nu_e}}{\sqrt{\text{Pr}}} \frac{\mathcal{N}_P}{R} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \right) \\ - \frac{2a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{R} \frac{dT_e}{T_e} \frac{dx}{dx} \left[\frac{1}{1-\text{Pr}} \mathcal{N} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{(1-\text{Pr})\sqrt{\text{Pr}}} \mathcal{N}_P \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここで、 $\mathcal{N}_P[\phi]$ は次式で定義される $\phi(x, t)$ の汎関数である：

$$\mathcal{N}_P [\phi(x, t)] \equiv \int_{-\infty}^t \Theta \left[\frac{\nu_e(t-\tau)}{\text{Pr} R^2} \right] \phi(x, \tau) d\tau. \quad (2.24)$$

また、 $\mathcal{N}$ は (2.24) で Pr を形式的に 1 とおいた汎関数である：

$$\mathcal{N} [\phi(x, t)] \equiv \int_{-\infty}^t \Theta \left[\frac{\nu_e(t-\tau)}{R^2} \right] \phi(x, \tau) d\tau. \quad (2.25)$$

汎関数の積分核 Θ は次式で定義される：

$$\Theta \left(\frac{\nu_e t}{\text{Pr} R^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^{-1/2} \frac{I_1(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)}{I_0(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)} e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.26)$$

ここで、 $\delta_e = (\nu_e/i\omega)^{1/2}/R = 1/\eta_e$ である。以上より、 $\mathcal{N}$ は粘性による履歴効果を現し、 $\mathcal{N}_p$ は $\nu_e/\text{Pr} = \kappa_e$ より熱伝導性による履歴効果を現す。

次に熱音響波動方程式を、代表的な変動時間 t と拡散時間 R^2/ν_e との大小関係、言い換えれば管の半径に比べた拡散層の厚さの大小によって近似する。拡散層の厚さが半径に比べて十分薄いときには、熱音響波動方程式は

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{2a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{R} \left[C \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \right) + \frac{(C + C_T)}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (2.27)$$

によって近似できる。ここで、 $-1/2$ 階微分は次のように定義され

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial p'}{\partial x}(x, \tau) d\tau, \quad (2.28)$$

C, C_T は

$$C = 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\text{Pr}}} \quad C_T = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\sqrt{\text{Pr}} + \text{Pr}} \quad (2.29)$$

によって定義される定数である。

いま $p' = P(x) \exp(i\omega t)$ と振動数分解すると、(2.27) は以下のように書ける：

$$(1 - 2C\delta_e) \frac{d^2 P}{dx^2} + [1 - 2(C + C_T)\delta_e] \frac{1}{T_e} \frac{dP}{dx} + \frac{\omega^2}{a_e^2} P = 0. \quad (2.30)$$

ここで、 $\exp(i\omega t)$ の $-1/2$ 階微分は $(i\omega)^{-1/2} \exp(i\omega t)$ であることを用いた。拡散層が薄いと見なしていることから、 $|\delta_e| \ll 1$ である。

この方程式もこのまま解くのではなく、質量流束密度の断面平均量との連立方程式の形に設定する。質量流束密度の複素振幅 F は同じ近似で

$$F = \frac{i}{\omega} (1 - 2\delta_e) \frac{dP}{dx} \quad (2.31)$$

となる。この F を用いると (2.30) は

$$\frac{dF}{dx} = - \left[1 - (2C_T - 1 - \beta) \frac{\delta_e}{(1 - 2\delta_e)} \right] \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} F - \frac{i\omega}{a_e^2} [1 + 2(C - 1)\delta_e] P \quad (2.32)$$

となる。方程式 (2.31) と (2.32) から F を消去すると、 δ_e の一次の範囲で二つの式は (2.30) と一致する。

一方、変動時間が拡散時間に比べて長いときには、すなわち拡散層の厚さが半径に比べて厚い場合には、熱音響波動方程式は次の拡散・波動（移流）方程式によって近似できる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ + \frac{\alpha_e}{a_e^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\frac{8}{6} \gamma - (\gamma - 1) \text{Pr} \right] \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{6} (1 + \beta + \text{Pr}) \frac{a_e^2 R_s^2}{\nu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

ここで、 α_e は $a_e^2 R_s^2 / 8\gamma\nu_e (= p_0 R_s^2 / 8\mu_e)$ で定義される拡散率である。この式はスタック内の流路でしか適用しないので、その半径を R を R_s とおいた。ここでも $p' = P(x) \exp(i\omega t)$ とおくと、(2.33) は次のようになる：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\alpha_e \frac{dP}{dx} \right) - \left[1 - \frac{i}{6}(1 + \beta + \text{Pr}) \frac{\omega R_s^2}{\nu_e} \right] \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{dP}{dx} \\ - \left\{ i\omega - \left[\frac{8}{6}\gamma - (\gamma - 1)\text{Pr} \right] \frac{\omega^2 \alpha_e}{a_e^2} \right\} P = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

一方、質量流束密度の複素振幅を求めると

$$F = -\frac{R_s^2}{8\nu_e} \left(1 - i \frac{\omega R_s^2}{6\nu_e} \right) \frac{dP}{dx} \quad (2.35)$$

となる。いま $\omega R_s^2 / 6\nu_e$ を ζ_e とおくと、 R_s が拡散層厚さ $\sqrt{\nu_e/\omega}$ より十分小さいので、 $|\zeta_e| \ll 1$ である。よって (2.34) は

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{i\text{Pr}\zeta_e}{(1 - \zeta_e)} \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} F - \frac{\omega}{a_e^2} \left[i\gamma + \frac{6}{8}(\gamma - 1)\text{Pr}\zeta_e \right] P \quad (2.36)$$

となる。

3. 熱流の不安定化の臨界条件

前節で示したロットの方程式を用いて熱流の不安定化の臨界条件を求める。まず図2に示す両端が閉じた直管の中にスタックを配置し、その両側を低温（室温）と高温の熱交換器で挟み込んで温度勾配を課し熱流を与える場合を考える。次に図3に示す閉じたループ管路の対向した位置に、大きさや性能が同じスタックと熱交換器を配置し、両者に温度勾配を等しく課した場合について考える。いずれの場合も管路の全長を L 、管の半径を R 、スタックの長さを L_s とし、流路半径を R_s とする。

室温および低温熱交換器の温度を T_0 、高温熱交換器の温度を T_H として、熱交換器の長さは短く無視できるものとする。管路の中心軸に沿って x 軸をとる。図2では左の閉端にその原点をとり、スタック低温端の位置を x_1 、高温端の位置を $x_2 (= x_1 + L_s)$ とする。一方、ループ管路では、下部のスタック1の低温端に原点をとり半時計回りに管路中心軸に沿って x 軸をとる。スタック1の高温端の位置は $x = L_s$ 、上部のスタック2の低温端の位置は $L/2$ 、高温端の位置は $L/2 + L_s$ となる。ループを一周した下部の低温端の位置は $x = L$ である。

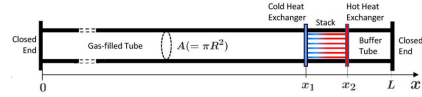


図2: 両端が閉じた全長 L 、半径 R の直管の中にスタックを配置した場合

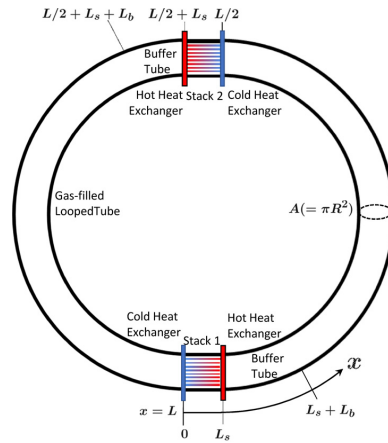


図3: ループ管路の中に同じスタックを二つ対向位置に配置した場合。管路の全長を L 、半径を R とする。

高温端からスタックを離れるにつれ、壁面温度は減少しやがて室温に戻る。この間の管路を温度バッファ（緩衝）管と呼び、その長さを L_b とする。しかし、直管では $x = L$ の閉端で温度が室温に下がりきらないので、バッファ管長さ L_b を $L - x_2$ とする。このとき閉端の温度を与える必要があり、以下では高温端の温度と室温の平均温度 $(T_H + T_0)/2$ であると仮定する。一方、ループ管路では $x = L_s + L_b$ では室温に下がっているものとする。

境界条件は直管では両端で質量流束 F がゼロ、すなわち圧力勾配がゼロ $dP/dx = 0$ を課す。閉端上で等温境界条件を課すと温度境界層が発達するが、この影響は小さいとして無視する。スタック両端では、圧力と断面にわたる質量流束の連続を要求する接続条件を課す。スタックの空隙率を $\phi (= A_s/A < 1$: A は管路の断面積 πR^2 , A_s はスタック内の全流路の断面積の和) とおくと、図2の $x = x_1$ では、接続条件は

$$P(x_1-) = P(x_1+), \quad F(x_1-) = \phi F(x_1+) \quad (3.1)$$

となる。ここで、 x_1- , x_1+ はそれぞれ、低温端 $x = x_1$ を挟む左右の位置である。また、スタック高温端 $x = x_2$ では、接続条件は

$$P(x_2-) = P(x_2+), \quad \phi F(x_2-) = F(x_2+) \quad (3.2)$$

となる。スタック両端では温度は連続であるので密度も連続であるが、速度はスタック両端で不連続になる。

ループ管路には端が無いが、ループを一周すると元の値に一致する周期条件が必要となる。ループの任意の位置において、

$$P(x) = P(x + L), \quad F(x) = F(x + L) \quad (3.3)$$

が要求される。なお、計算では $x = 0-$ にとる。

臨界条件は、スタックとバッファ管の壁面温度を与え、ロットの方程式を上で述べた境界条件および接続条件、または周期条件と接続条件の下で解いて、未定の角振動数 ω の虚部がゼロになる条件である。そこで、 ω と T_H/T_0 をパラメータとして境界条件または周期条件を満足するロットの方程式を求める固有値問題を解く。これを解析的に解くことは極めて難しいので、ここではロットの方程式をルンゲ・クッタ法で数値的に解き、 ω と T_H/T_0 を求めるにはニュートン法と組み合わせたシューティング法を用いる。

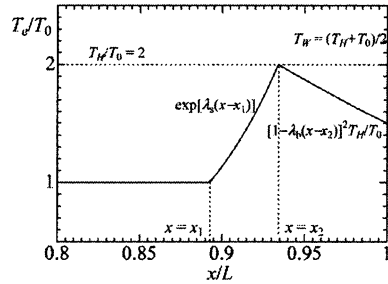


図4: スタックおよびバッファ管の壁面温度分布。スタック内では温度は指数関数的に変化し、バッファ管内では放物線関数で変化する。

3.1 直管の場合の臨界条件

スタックおよびバッファ管内の温度分布を図4に示すように、それぞれ指数関数と放物線関数

$$\frac{T_e}{T_0} = \exp[\lambda_s(x - x_1)] \quad (x_1 < x < x_2), \quad (3.4)$$

$$\frac{T_e}{T_0} = \frac{T_H}{T_0} [1 - \lambda_b(x - x_2)]^2 \quad (x_2 < x < L) \quad (3.5)$$

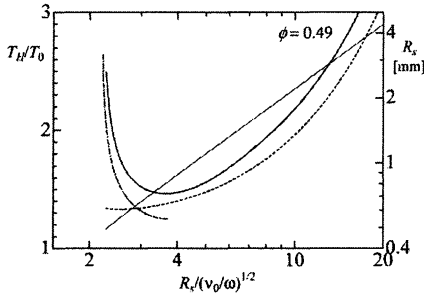


図 5: 直管内の気柱の不安定化の臨界条件.

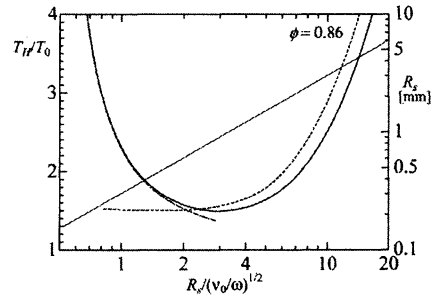


図 6: ループ管内の気柱の不安定化の臨界条件.

によって与える. ここで, $\lambda_s = \log(T_H/T_0)/L_s$ であり, $x = L$ では壁面温度 T_w が $(T_H + T_0)/2$ であるので, $\lambda_b = [1 - \sqrt{(T_H + T_0)/2T_H}]/(L - x_2)$ である. 以上の区間以外では $T_e/T_0 = 1$ とする.

ルンゲ・クッタ法で閉端 $x = 0$ から解く. 境界条件から $F = 0$, すなわち $dP/dx = 0$ であるが, P は未知である. しかし, 解くべき方程式は線形の同次方程式であるので, $x = 0$ での圧力を一般性を失うことなく $P = 1$ にとることができる. これで境界条件が二つ揃うので, 解を $x = L$ に向かって求めることができる. この端では境界条件より F がゼロでなければならないが, ω や T_H/T_0 を適当に選ぶと一般にはゼロにはならない.

そこで $x = L$ で F の値を z と置くと, これは ω と T_H/T_0 の関数である:

$$F(L) \equiv z(\omega, T_H/T_0). \quad (3.6)$$

適当に T_H/T_0 を与えて $z = 0$ を満たす ω を求めると一般に複素数になる. 複素解は発散または減衰振動を表し, 両者の境目が臨界条件である. そこで $z = 0$ を満たし, ω の虚部がゼロで実部が正

$$\text{Im}\{\omega\} = 0, \quad \text{Re}\{\omega\} > 0 \quad (3.7)$$

になるように温度比を求める. これを満たす ω と温度比はニュートン法によって求める. 関数 z の具体的な形は分からないが, 繰り返し計算に必要な微分は数値的に評価する.

こうして求めた臨界条件を図 5 に太い実線で示す. 横軸は角振動数 ω の代わりに, 室温での粘性拡散層の代表厚さ $\sqrt{\nu_0/\omega}$ に対するスタックの流路半径 R_s をとり, 左の縦軸は高温端温度の低温端温度に対する比である. なお, ν_0 は T_0 での動粘性率であり, 空隙率は実験で用いたスタックより $\phi = 0.49$ とした. 曲線の上が不安定領域, 下が安定領域である. 角振動数の実部は, 両端を閉端とする半波長管の固有振動数 $\pi a_0/L$ にほぼ等しく変化が小さいので, 横軸は実質 R_s を変化させたとも考えられる. 実験との比較のために, 細い実線は右縦軸の半径 R_s と横軸との関係を示す. 例えば, 横軸が 4 での R_s の値は, 4 での細線の値を右縦軸から読み取ると, 概ね 1 mm であることが分かる. 破線や一点鎖線の意味は後に述べる.

参考のために実験装置の概略を示す. 直管の長さ $L = 3.63$ m, 半径 $R = 40$ mm であり, スタック長さ $L_s = 0.15$ m, バッファ管長さ $L_b = 0.24$ m である. スタックには, 断面 1 平方インチ当たり 100 個の正方形の細孔が規則正しく開口しており, 空隙率 $\phi = 0.49$ である. 細孔の水力半径を, 流路断面積を濡れ縁で割った量の 2 倍と定義すると 1 mm になる. これを R_s とする. 発生する自励振動の基本振動数は約 50 Hz である.

3.2 ループ管路の場合の臨界条件

ループ管路の二つのスタックに同じ温度分布を与えるとして、図3の下スタック1の温度分布だけを示す。スタック内およびバッファ管内はそれぞれ指数関数と放物線関数で与える：

$$\frac{T_e}{T_0} = \exp(\lambda_s x) \quad (0 < x < L_s), \quad (3.8)$$

$$\frac{T_e}{T_0} = \frac{T_H}{T_0} [1 - \lambda_b(x - x_1)]^2 \quad (L_s < x < L_s + L_b). \quad (3.9)$$

ここで、 $\lambda_s = \log(T_H/T_0)/L_s$ 、 $\lambda_b = (1 - \sqrt{T_0/T_H})/L_b$ である。スタック2については、(3.8)の x を $x - L/2$ に置けばよい。これらの区間以外では $T_e/T_0 = 1$ とする。温度分布(3.9)を仮定すると、室温側との境界 $x = L_s + L_b$ で温度勾配に不連続が起きるので熱流に不連続が現れる。この差を埋め合わせるため、不連続箇所にも低温熱交換器があるものとする。

数値計算では、 $x = 0-$ での圧力の値を最初は1とし、一方 F の値は適当に与えてルンゲ・クッタ法により管路を一周した $x = L$ での解を求める。そこで、 $x = 0-$ での P と F の出発の値 $P_n(0-)$ と $F_n(0-)$ と一周回った後の値 $P_{n+1}(L)$ と $F_{n+1}(L)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) との差を

$$P_{n+1}(L) - P_n(0-) \equiv z_1[P_n(0-), F_n(0-), \omega, T_H/T_0], \quad (3.10)$$

$$F_{n+1}(L) - F_n(0-) \equiv z_2[P_n(0-), F_n(0-), \omega, T_H/T_0] \quad (3.11)$$

とおいて、 $z_1 = z_2 = 0$ になるように $P_n(0-)$ と $F_n(0-)$ および ω と T_H/T_0 の値を求める。

こうして求めた臨界条件を図6の太い実線で示す。空隙率は実験で用いたスタックから $\phi = 0.86$ に選んだ。曲線の上部が不安定領域で、下部が安定領域である。角振動数の実部は $2\pi a_0/L$ より少し大きい値をとり、ループ全長を1波長とするモードである。臨界条件を与える温度比の最小値は横軸の値が4付近にあることが分かる。このときのスタック内の流路半径 R_s は約1.5mmである。

実験に用いたループ管路の中心軸に沿った全長 L は13.4 m、内径は $R = 40$ mm である。スタックの長さ L_s は0.15 m、バッファ管長さ L_b は低温熱交換器を $x = L_s + L_b$ に設置していないので特定しづらいが、概ね計算で用いた値0.91 mに近い。スタックには1平方インチ当たり600個の正方形断面をもつ細孔が開口しており、水力半径は0.48 mm である。この半径に対する臨界条件の横軸の値は約1.5であるので、温度比は約2で最小値より高いことが分かる。発生する自動振動の基本振動数は約25 Hz である。

4. 結果についての議論

4.1 近似理論による臨界条件との比較

拡散層厚さと流路径との比で近似した方程式を用いて臨界条件を導出し、ロットの式による結果と比較する。スタックの外部の管路では、拡散層の厚さは流路径 R に比べて十分薄いと考えられるので、常に(2.31)と(2.32)を使う。一方、スタック内の流路に対しては拡散層が薄い近似、すなわち(2.31)、(2.32)、または厚い近似(2.35)、(2.36)とを使い分ける。

ここで注意したいのは、これらの方程式は漸近近似によるものであり、それぞれ仮定したパラメータの一次の近似の範囲で(2.30)、(2.34)とに一致する。したがってパラメータの値が大きくなってくると、誤差は当然大きくなる。方程式を dP/dx と dF/dx の連立した形で解くときには、右

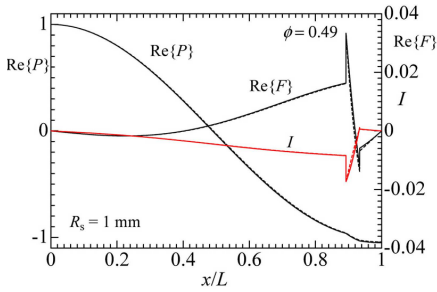


図 7: 直管内に半径 $R_s = 1$ mm のスタックを置いた場合の圧力 P および質量流束密度 $\rho_e U$ の実部の分布と、音響エネルギー流束密度の一周期にわたる平均値 $I (= \overline{P\dot{U}^*}/2)$ の分布。

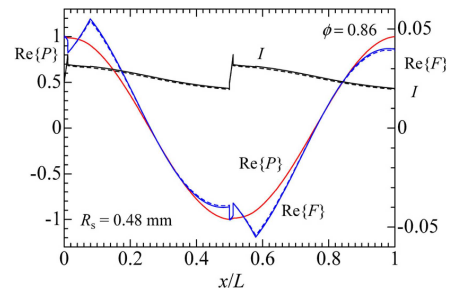


図 8: ループ管内に半径 $R_s = 0.48$ mm のスタックを置いた場合の圧力 P および質量流束密度 $\rho_e U$ の実部の分布と、音響エネルギー流束密度の一周期にわたる平均値 $I (= \overline{P\dot{U}^*}/2)$ の分布。

辺をパラメータで展開して 1 次で打ち切ると結果は当然違ってくる。図 5 の破線は (2.31), (2.32) をそのまま解いた場合の臨界条件であり、図 6 の破線は展開して計算した臨界条件である。一方、一点鎖線は (2.35) の $(1 - \zeta_e)^{-1}$ を $(1 + \zeta_e)$ と展開したときの臨界条件である。そのまま解くと、最低温度付近でロットの結果との差が大きくなる。

ロットの結果による臨界条件と比較すると、近似理論でも概ね似た条件が得られる。温度比が最小値をとる半径より大きい所では薄い拡散層近似が成り立ち、小さい所では厚い拡散層近似が成り立つことが見られる。特に、半径が小さくなるにつれ一致は良好になる。しかし、温度比が最小値をとる値付近では、温度比に若干の違いが見られる。一方、半径が大きくなると、図 5 ではロットの結果より温度比が低く、図 6 では高いことがわかる。しかし、 R_s の値がさらに大きくなるといずれもロットの結果に漸近するものと考えられるが、温度比が非現実的に大きくなる。

4.2 臨界状態での管路内の圧力、質量流束密度および音響エネルギー流束分布

臨界条件が求まったので、得られた角振動数や温度比を用いて圧力 P や質量流束密度 F の実部の軸方向の分布や、さらには断面平均した音響エネルギー流束密度 $\overline{p\dot{u}'}$ の一周期にわたる平均値 $I = (\overline{p\dot{u}'}) = \text{Re}\{PF^*\}/2\rho_e$ の分布を求める。ここで、 $(\overline{\cdot})$ は断面平均量を、 $(\cdot)$ は一周期にわたる時間平均量を表し、 F^* は F の複素共役である。図 7 は実験で用いた直管の場合であり、半径 $R_s = 1$ mm とした。一方、図 8 も実験に用いたループ管路の場合であり、半径 $R_s = 0.48$ mm とした。実線はロットの方程式を用いた臨界条件から求めた分布であり、破線は近似方程式を用いた分布である。両者はこの図で見る限り殆ど一致している。

図 7 から分かることは、直管での圧力分布は管の両端で腹、中央部で節となり、温度勾配を課さない場合の両端が開いた直管での定在波の固有振動モードに近い。しかし、質量流束密度はスタック近傍で空隙率が変わるので不連続になり、その大きさや向きが大きく変化する。このためエネルギー流束密度もスタックにわたって大きく変化する、スタックの内部で $I = 0$ になる場所が見れる。これから I がスタックから左右に湧き出していることが分かる。

一方、図 8 では直管とは違い、ループ管路の全長を一波長として x 軸の正の向きに伝播する進行波が出現することが分かる。また、音響エネルギー流束が温度勾配の向きに湧き出していることが見られる。

これまで求めた臨界条件は、直管では管の長さを半波長とするモード、ループ管路では全長を1波長とするモードだけである。この他にも、直管では1波長、ループ管路では2波長とする高次のモードも存在する。モードが高くなるにつれ不安定化する最低温度が高くなる傾向が見られるが、ループ管路では1波長と2波長モードの最低温度比が近い場合もある。実験でもこれを確認することができる。

5. おわりに

直管とループ管路の中に配置したスタックに温度勾配を課すと、静止気体中を流れる熱流が不安定化し管内の気柱全体が振動し始める臨界条件を求めた。この解析は、線形近似と細管近似に基づくロットの方程式に対する固有値問題を数値的に解くことによって行われた。これに対し、線形近似と細管近似に加え、拡散層と流路径の大小により薄い拡散層近似と厚い拡散層近似を用いた近似方程式によっても臨界条件を求めた。この結果、臨界条件は薄い拡散層近似と厚い拡散層近似で実質カバーでき、定量的にもロットの方程式による臨界条件に近い条件が得られることが分かった。

この比較の目的は、臨界条件における近似の精度を検討するだけではない。ロットの方程式は一つの振動数の振動を仮定しており、この方程式を非線形領域へ拡張することはできない。これに対し、拡散層の大小による近似は、非線形項を新たに追加することによって拡張可能である。近似方程式の有効性の一つのチェックは、その線形近似がまずロットの結果に近い臨界条件を与えることができるかを確認することである。臨界条件に関する限り、近似方程式はこのチェックを合格したと言ってもよいと結論される。

本研究は科学研究費補助金 (no.26289036) の補助の下で行われたことを記し謝意を表す。

参考文献

- [1] 杉本 信正, “熱流の不安定性と熱音響現象 第1回—導入編—,” 日本流体力学会誌「ながれ」, **33** (2014) 181–194; “同 第2回—線形理論編—,” **33** (2014) 307–322; “同 第3回—非線形現象編—,” **33** (2014) 375–393.
- [2] Rott, N., “Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **20** (1969) 230–243.
- [3] Rott, N., “Thermally driven acoustic oscillations. Part II. Stability limit for helium,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **24** (1973) 54–72.
- [4] Ueda, Y. & Kato, C., “Stability analysis of thermally induced spontaneous gas oscillations in straight and looped tubes,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **124** (2008) 851–858.
- [5] Sugimoto, N., “Thermoacoustic-wave equations for gas in a channel and a tube subject to temperature gradient,” *J. Fluid Mech.*, **658** (2010) 89–116.
- [6] Sugimoto, N. & Shimizu, D., “Boundary-layer theory for Taconis oscillations in a helium-filled tube,” *Phys. Fluids*, **20** (2008) 104102 1–11.
- [7] Shimizu, D. & Sugimoto, N., “Numerical study of thermoacoustic Taconis oscillations,” *J. Appl. Phys.*, **107** (2010) 034910 1–10.
- [8] Sugimoto, N., “Nonlinear theory for thermoacoustic waves in a narrow channel and pore subject to a temperature gradient,” *J. Fluid Mech.*, **797** (2016) 765–801.