

超弦理論がつなぐブラックホールと流体力学

Asia Pacific Center for Theoretical Physics (Korea) 中村 真
E-mail: nakamura@aptcp.org¹

概要

近年、ゲージ・重力対応 (AdS/CFT 対応、または holographic ゲージ理論) と呼ばれる対応関係が超弦理論の枠組みより提唱され、注目をあびています。この対応関係は、強く相互作用するゲージ理論の解析が古典重力理論 (一般相対性理論) を用いて遂行可能であるとする対応関係です。特に、ゲージ粒子の多体系からなる流体の振る舞いは、重力理論における Einstein 方程式や、時空の正則性などを調べることで解析が可能となり、従来とは全く異なる方向から流体力学の考察を行うことができる可能性を秘めています。ここでは超弦理論の非専門家向けにゲージ・重力対応の基本的主張を説明し、今後の異分野交流の促進に役立てたいと思います。²

1 超弦理論とは

1.1 統一理論としての超弦理論

まず、ゲージ・重力対応が提唱される上で非常に重要な寄与をした超弦理論について、おさらいをしたいと思います。現在のところ、この宇宙を形作っている相互作用には 4 種類あると考えられています。それらは (1) 電磁相互作用、(2) 弱い相互作用、(3) 強い相互作用、そして (4) 重力相互作用です。(1)、(4) は私たちの日常生活でもおなじみの相互作用ですが、(2)、(3) については、素粒子の反応において顕著になります。(2) は核子のベータ崩壊などの際に重要な役割を果たしますし、(3) はクォークどうしを結びつける力として重要です。(1)、(2)、(3) はいずれも「ゲージ相互作用」と呼ばれる相互作用であり、素粒子の「標準模型」の中に組み込まれ、基本的性質については場の理論において量子力学的にも理解がなされています。一方で (4) の重力相互作用は恐らく人類が最も最初に体験していた相互作用であるにも関わらず、他の相互作用とは性質が異なり、その量子力学的理解にはまだ完全には到達していません。一番の問題は、場の理論で必要な「繰り込み可能性」の問題です。一般に場の量子論を用いて物理量を計算すると、非物理的な無限大が発生します。通常の場合の理論では、この無限大を正しく「差し引く」ことで、正しい有限の答えを得ることができ、この操作を「繰り込み」と呼んでいます。ところが重力理論 (一般相対性理論) においてはこの繰り込み操作が単純には不可能であることが知られています。

ここで登場したのが超弦理論です。そもそも、計算で発生する「無限大」は、個々の構成粒子が大きさのない「点状」の粒子から出来ているとする仮定から生じていました。そこで超弦理論では、個々の構成粒子は「点」ではなく、ある長さを持った「弦」から出来ているとします。この仮定から出発して量子論を構成すると、重力理論においても、問題となる「無限大」が生じません。

さらに、構成粒子を「弦」に持ち上げたことで、重力理論とゲージ理論の間を、より統一的に理解できるようになりました。弦理論の構成要素である弦には 2 種類の形

¹現在の所属・連絡先: 京都大学大学院理学研究科、nakamura@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

²この講究録では $\hbar = c = k_B = 1$ の単位系を用います。

態が可能です。ひとつは輪ゴムのように閉じた「閉弦」、もうひとつは端点を持つ線分のような形の「開弦」です。原理的にこの2種類が可能です。超弦理論を解析していくと、「ゲージ理論」の粒子は「開弦」で、重力理論は「閉弦」を用いて、記述可能なことがわかります。今まで異種の理論であったゲージ理論と重力理論が、「弦」というキーワードのもとで、より統一的に記述可能になったわけです。

1.2 重力とゲージ理論のかけはしとしての超弦理論

超弦理論のレベルで2種類の弦の形態として導入された「閉弦」と「開弦」ですが、このままでは両者は同じ「弦」として表現されるものの、依然として異なる形態であることに変わりはありません。ここで重要となるのは弦の相互作用です。弦と弦の相互作用を考えると、例えば「開弦 + 開弦 $\rightarrow$ 閉弦」、「閉弦 $\rightarrow$ 開弦 + 開弦」というような相互作用が可能であり、両者の形態が互いに移り合うことが可能になります。詳細は省きますが、このような弦の性質を解析していくと、同じ物理現象を「開弦のみを使って記述」することも可能であると同時に「閉弦のみを使って記述」することも可能であるような、特殊な状況が存在することがわかります。この状況では「開弦のみの理論 = ゲージ理論」を「閉弦のみの理論 = 重力理論」を用いて書き換えることが可能となるのです。

2 ゲージ理論と重力理論

それではまず、詳細に入る前に、ここで重要となる二つの理論について簡単に復習したいと思います。

2.1 ゲージ理論

ゲージ理論とは、ある群で表現される内部対称性が空間の各点ごとに成立している理論で、この群によって理論が分類されます。例えば $U(1)$ 群であれば QED (量子電磁気学)、 $SU(3)$ であればクォーク・グルーオンを記述する QCD になりますし、弱い相互作用を記述するゲージ理論のゲージ群は $SU(2)$ を含んでいます。また仮想的理論ではありますが、一般的なゲージ群として $SU(N_c)$ (N_c は整数) を考えることも出来ます。この理論において、さらに理論の有効的相互作用の強さを保ったまま $N_c \rightarrow \infty$ の極限をとることも可能であり、そのようなゲージ理論は「large- N_c ゲージ理論」と呼ばれています。³

今ここでは、強く相互作用していて解析が困難な QCD を重力理論で記述することに興味があるのですが、実は QCD よりも large- N_c ゲージ理論の方が重力理論による記述が容易となります。QCD のように N_c が有限の場合は重力理論に量子補正を加える必要が生じますが、それ自体が難しい問題となってしまうのです。従って、通常、ゲージ・重力対応においては large- N_c ゲージ理論と重力理論の対応を考えること

³この $N_c \rightarrow \infty$ 極限をとる際には、 $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c$ を一定値に固定したまま極限をとります。ここで g_{YM} はもともとの $SU(N_c)$ ゲージ理論の結合定数、 λ は large- N_c ゲージ理論を特徴づける結合定数であり 't Hooft coupling と呼ばれます。

になります。large- N_c ゲージ理論では物理量は $1/N_c$ を単位として展開することができます。 $N_c \rightarrow \infty$ の極限では展開の高次項が無視できるのに対し、QCD の場合では $N_c = 3$ ですので展開係数は $1/3$ となります。そこで非常に大雑把には、large- N_c ゲージ理論は QCD の結果を誤差 30% くらいで再現してくれると期待できます。large- N_c ゲージ理論は現実の QCD とは異なりますが、QCD と似た性質を持っている、扱いやすい仮想的ゲージ理論ということになります。ここでは以後、「ゲージ理論」と言えば large- N_c ゲージ理論を指すことにします。

2.2 重力理論

ゲージ・重力対応に現れる重力理論は、基本的に Einstein の一般相対性理論です。(より正確には、一般相対性理論を拡張した超重重力理論ですが、ここでは詳細はなるべく省きます。) そこでまず、一般相対性理論の概観から始めたいと思います。

2.2.1 一般相対性理論

一般相対性理論とは、重力を幾何学的に表現する理論です。この理論では時間と空間を対等に扱い、両者をまとめて「時空」と呼びます。例えば我々の時空は空間 3 次元、時間 1 次元の 3+1 次元時空です (あるいは単に 4 次元時空と言う場合もあります)。時空を正確に定義するには二つの要素が必要で、一つは座標系、もう一つは計量です。座標系を $x^0(=t), x^1, x^2, x^3$ で張り、これらをまとめて x^μ (μ は 0 から 3 のいずれか) で表したとします。この時、計量はその時空間上の「単位長さ」を定義するために必要となります。具体的には、計量を $g_{\mu\nu}$ として $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ (ここで、同じ添え字については 0 から 3 まで和をとるものとします) で線素を定義した時に、 $\int ds$ がある点からある点までの物理的距離を与えます。直観的には座標が「目盛」ならば計量が長さの「単位」であり、両者の積が物理的長さになる訳です。一般相対性理論ではこの計量が各点ごとに異なっても良い (つまり時空座標の関数) とします。これにより、時空に曲率の概念を導入することが出来ます。

例えば我々の 3+1 次元時空を 2 次元の紙面に例えた場合、紙面の凹凸は 2 次元面の曲率によって数学的に定義できます。この凹凸、あるいは曲率の概念を 3+1 次元時空に拡張して用いるのです。詳細は教科書に譲りますが、非常に大雑把には計量を時空座標で 2 階微分したものが曲率に対応します。一般相対性理論では時空の曲率は「重力の強さ」と関係しており、大雑把には「重力が強い」ことは、その場所での「曲率が大きい」ことに対応すると言えるでしょう。また、電荷が電場の source となるように、質量を持った物体は重力の source となりますから、周囲の時空を曲げることとなります。物質などの重力の source が存在せず、あらたに質点を置いてもその質点が周囲からの重力を感じないような空間は「平坦な時空」ということになります。

我々の世界では物質同士が重力を及ぼし合っており、決して厳密には平坦な時空ではありません。しかしながら重力の相互作用はゲージ理論の相互作用に比べると非常に弱いので、ゲージ理論の物理を考える場合は事実上、時空は平坦であるとして構いません。従って、以後、ゲージ理論は常に平坦な時空上で定義されているものとします。

それでは一般相対性理論について、より具体的に理論を見てみることにします。一般相対性理論において、重力は以下の Einstein-Hilbert 作用に従う力学で記述され

ます。

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda). \quad (1)$$

ここで g は計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式です。上記では「時間と空間を対等に扱う」と述べましたが、計量の意味においては時間と空間で大きな区別があります。空間方向と時間方向で、計量の符号が逆になるのです。時間方向に対して正負どちらの符号を用いるかは文献ごとに定義が異なりますが、ここでは時間方向の計量が負、空間方向の計量が正となるような、弦理論の文献で標準的な定義を採用するものとします。この符号の取り方のために、 $g_{\mu\nu}$ の行列式は次元の数によらず常に負となります。(1) の中で $\sqrt{-g}$ の中にマイナスが現れているのは、行列式の負符号を打ち消すために現れています。 Λ は宇宙項と呼ばれる定数であり、モデルに応じて値が定められます。 R が時空の曲率を表します。また G_N はニュートン定数です。一般には上記の作用に加えて物質場の作用を含めて議論することになりますが、ここでは省略することにします。

この作用を変分することにより Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda)g_{\mu\nu} = 0, \quad (2)$$

が得られます。ここで $R_{\mu\nu}$ は Ricci tensor と呼ばれ、やはり時空の曲がり具合を定義します。曲率との間には $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ の関係があります。($g^{\mu\nu}$ は計量 $g_{\mu\nu}$ の逆行列です。) Ricci tensor も曲率も、もともと計量とその微分を用いて定義されていますので、(2) は計量についての 2 階の偏微分方程式です。この偏微分方程式を適切な境界条件のもとで解くことで計量が座標の関数として求まりますから、時空が決まることになります。この方程式は宇宙項 Λ に依存することから、 Λ の値によって時空の曲率 R も変化します。具体的には、空間方向の数を d とした場合 $R = 2\frac{d+1}{d-1}\Lambda$ の関係式が成り立ちますので、宇宙項を負の値にとると曲率負の空間が得られます。

2.2.2 ゲージ・重力対応に現れる重力理論

ゲージ・重力対応に現れる重力理論は、(広い意味での) 一般相対性理論であり、現実の宇宙の時空を記述する理論と数学的構造は同じです。しかしながら我々が宇宙を扱う場合の理論とは若干の違いがあります。項目でまとめると以下のようになります。

- 時空の次元

我々の宇宙は 3+1 次元時空ですが、ゲージ・重力対応で出てくる重力理論の時空の典型的なものは 4+1 次元時空です。つまり余分な空間方向が一つ導入されます。⁴

- 宇宙項

我々の宇宙はほとんど平坦ですが、厳密には若干正の曲率を持っていることが観測から知られており、その意味では宇宙項は僅かながら正であると言えます。一方、ゲージ重力対応では負の宇宙項が用いられ、結果として時空間は、負の曲率を持ちます。曲率 R が負で一定の時空の典型的なものに「Anti de Sitter」(AdS) 時空があります。「de Sitter」時空は曲率が正で一定の時空です。) AdS/CFT

⁴より厳密には(超弦理論から出てきますので) 10 次元の理論なのですが、残りの 5 次元方向が丸まって(コンパクト化されて)おり、無限に伸びた残りの方向のみをここでは議論しています。

対応の「AdS」はこの時空に由来しますが、実際にこの対応で用いられる時空は AdS に限らず、状況に応じて様々な時空が登場します。

- 重力以外の場

厳密には、一般相対性理論のみでなく、重力と相互作用する様々な「場」が共存している理論を考えることになります。ここで様々な場とは、スカラー場やゲージ場などですが、重力理論側に登場するゲージ場はあくまで $4+1$ 次元の曲がった空間上の場であり、QCD や large- N_c ゲージ理論とは別のゲージ場です。これらの場についても考慮する必要がありますが、large- N_c ゲージ理論側で stress-energy tensor のみを考慮する場合は、重力モードのみ考慮しても十分な場合があります。以下ではそのような単純な場合を考え、重力のみ考えます。

- ニュートン定数

ここで一般相対性理論を用いる目的は、我々の宇宙を記述するためではなく、あるゲージ理論を数学的に記述するのが目的です。従って、この重力理論における「ニュートン定数」は現実のニュートン定数とは全く無関係です。実際、用いるニュートン定数は対応するゲージ理論に応じて決まりますが、ここではあとで述べる典型的なゲージ・重力対応に的を絞りますので、 $G_N = \pi/(2N_c^2)$ としておきます。ここで N_c は 2.1 章で説明されたゲージ群 $SU(N_c)$ のランクです。

3 ブラックホール

さて、それでは何故、一見似ても似つかない「5次元の重力理論」と「4次元の large- N_c ゲージ理論」が対応するのでしょうか。ここではブラックホールを考えて、ヒントを探りたいと思います。特に我々はゲージ理論の多粒子系として構成される「流体」に興味がありますから、流体力学の成立に必要な「局所熱平衡」の概念が、対応する 5次元重力理論にも存在するののかどうかに興味があります。

実は重力理論側にも熱平衡の概念を導入することができ、その典型的な例がブラックホールです。ブラックホールとは Einstein 方程式 (2) の解の一つです。非常に大雑把には、時空の曲率が大きければ重力が強いことになると述べましたが、もし重力が非常に強く時空が「曲り過ぎる」と、光さえもそこから脱出できないような領域が現れます。それがブラックホールです。ブラックホールの外部から外向きに発せられた光は無限遠方に脱出することができますが、重力が非常に強い領域から発せられた光は脱出できずに戻ってきます。ちょうどこれらの領域の境界、光がぎりぎり脱出できないすれすれの境界面を「地平線 (horizon)」と呼びます。なぜ「地平線」なのかというと、ブラックホールの外部の人間にとっては、地平線内からの光が届かないため地平線の内側が見えないからです。しかし見えないとは言っても時空がそこで終わっているわけではなく、時空は（曲がりながら）スムーズに地平線の内側まで続いています。ちょうど地球上で我々が目にする地平線のように、その先の世界は見えないが世界がそこで終わっている訳ではない、という状況にイメージが合致します。このように、地平線でも時空はスムーズにつながっており、特に物理的におかしい事、例えば時空の曲率が発散するなどの現象が生じているわけではありません。この点は後に流体の輸送係数の計算で重要になります。

それでは、地平線からは本当に何も外部に出てこないのでしょうか？実は Hawking が、ブラックホールを量子力学的に扱うと、地平線から熱輻射 (Hawking 輻射) が外部に放射されることを発見しました。そしてその熱輻射に対応する温度 (Hawking 温

度)を実際に計算することができたのです。実のところ、Hawking 輻射の発見以前から、ブラックホール時空には熱力学と似た性質があることが知られていたのですが、Hawking 輻射の発見によりブラックホールの物理学と熱力学の対応がより鮮明になってきました。ここで言う「熱力学の法則」とは以下のようにまとめられます。(ここで M はブラックホールの質量を表します。) この表からおわかりのように、表面重力

	熱力学	ブラックホール
第0法則	熱平衡では温度 T が一定	定常解では表面重力 κ が一定
第1法則	$dE = TdS$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi G_N} dA$
第2法則	エントロピー S は減少しない	地平線の面積 A は減少しない
第3法則	物理過程で温度をゼロにできない (Nernst)、 ゼロ温度極限でエントロピーはゼロ (Planck)	物理過程で表面重力をゼロにできない

κ (地平線上での重力の強さ) が温度 T に、地平線の面積 A がエントロピー S に対応しています。より正確には、 $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ 、 $S = \frac{A}{4G_N}$ です。このように、ブラックホールには温度の概念、つまり熱平衡の概念が自然に持ち込まれています。

4 ゲージ・重力対応 (AdS/CFT 対応)

それでは前章までで説明した基本事項を用いて、ゲージ・重力対応 (AdS/CFT 対応) の主張する内容の一部を説明したいと思います。この講究録では、「なぜそのような対応の成立が予想できるのか」という原理的な部分よりも、「結論」つまりゲージ・重力対応の主張を説明することに主眼をおきます。

ゲージ・重力対応の大まかな主張

「強く相互作用する、ある種の 3+1 次元量子ゲージ理論」は「負の宇宙項を持つ Einstein 方程式の解である 4+1 次元時空上の古典的重力理論」と等価である。

この主張の詳細を以下で説明します。

- 「等価である」とは?

量子ゲージ理論の物理量を古典重力理論側で計算でき、その結果が正しい答えを与える、という意味です。ここで物理量とは、物理演算子の期待値や、演算子どうしの相関関数を意味します。例えば、ゲージ理論の stress tensor の量子論的期待値や、stress tensor の 2 点相関関数が重力理論の計算で与えられることを意味します。

- 「強く相互作用する、ある種の 3+1 次元量子ゲージ理論」とは?

これ以外のゲージ理論についてもゲージ・重力対応を論じることが出来るのですが、ここでは最も代表的な例として、「3+1 次元、 $\mathcal{N} = 4$ $SU(N_c)$ large- N_c 超対称ゲージ理論で、't Hooft coupling が無限大の極限をとった理論」を扱うことにします。この特殊なゲージ理論について順番を追って説明します。まず「 $SU(N_c)$ large- N_c 」の意味は 2.1 章で説明した通りであり、ある種の理想化を

したゲージ理論です。「3+1 次元」とは、ゲージ理論の住む空間が、空間 3 次元、時間 1 次元のいわゆる我々の世界と同じ次元を持つ世界であることを意味します。さらに、(より一般的な場合も考察できますが) ここでは、ゲージ理論の住む時空は平坦であるとしておきます。「超対称性」とはフェルミオンとボゾンの入れ替えに対する対称性のことで、 $N = 4$ とは、この「入れ替えの方法」として 4 種類の方法が存在するような理論のことを指します。これも一種の理論の理想化と考えて良いでしょう。「t Hooft coupling」とは相互作用の大きさのことで、定義は 2.1 章の脚注で説明されています。また、ゲージ理論は量子化されたものを考えます。以上を大雑把にまとめますと、我々の世界で強く相互作用するゲージ理論を考えるのですが、重力理論との対応を良くするために、ゲージ理論としては現実世界に存在する理論ではなく「理想化された」理論を考えます。

- 「負の宇宙項を持つ Einstein 方程式の解である 4+1 次元時空上の古典的重力理論」とは?

負の宇宙項 $\Lambda < 0$ を持つ Einstein 方程式 (2) の解は、漸近的に AdS 空間になります。ここで「漸近的に AdS」とは、時空の中心から十分離れた「境界」近傍では AdS 空間となっていることを意味します。逆に時空の中心付近では必ずし厳密に AdS 空間である必要はありませんが、いずれにしても時空は負の曲率を持ちます。例えば 4.1 で詳しく調べる時空は AdS ブラックホールと呼ばれており、厳密な AdS 時空ではありませんが負の曲率を持ちます。「4+1 次元」とは、我々の住む時空に比べて、さらに余分な空間方向が 1 つ存在することを意味します。

以上を用いて結論できる一つの主張は、

ゲージ・重力対応の主張の一例

「上記で述べたゲージ理論の stress tensor の期待値は、1 次元高い曲率負の曲がった時空上の重力理論を用いて計算できる」

ということになります。

ここまで来ると、重力理論と流体力学の接点が見えてきます。流体力学とは局所熱平衡が存在する状況において保存量を考え、その保存量の巨視的な振る舞いを記述する有効理論です。ここで「保存量」とは例えば stress tensor を意味します。stress tensor については上記の主張により重力理論側で記述することができます。従って、あとは重力理論側に「局所熱平衡」の概念を導入し、stress tensor の巨視的な振る舞いを抽出すれば、重力を用いた流体力学の記述が出来上がることになります。この時に活躍するのが 3 章で説明したブラックホールです。なぜならばブラックホールには熱平衡の概念が存在するからです。そこで次章ではブラックホール時空から具体的にどのようにゲージ理論の stress tensor を読み取るのかについて説明します。

4.1 重力側からの stress tensor の読み取り

ここでは宇宙項について $\Lambda = -6$ の convention を用います。この場合の (2) の解には

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left[-\frac{(1 - z^4/z_0^4)^2}{1 + z^4/z_0^4} dt^2 + \left(1 + z^4/z_0^4\right) d\vec{x}^2 + dz^2 \right] \quad (3)$$

という計量のブラックホール解があります。ここで $t, \vec{x}, z$ はそれぞれ時間、空間（3方向）、「動径方向」の座標であり、これは時間 1 次元、空間 4 次元の 5 次元時空となっています。ここで 4 つの空間方向のうち、いわゆる我々の日常概念での「空間」に対応する方向は $\vec{x}$ で表現される 3 方向であり、残りの「動径方向 z 」はゲージ理論あるいは流体力学側では存在しない仮想的方向と考えて差し支えありません。

(3) において、地平線は $z = z_0$ の位置にあります。 z の値が大きくなる方向はブラックホールに近づく方向に相当し、この座標の取り方では z 方向の領域は $0 \leq z \leq z_0$ で定義されています。この領域はブラックホールの外側の領域、つまり光などの形態で外部に情報を引き出すことが可能な領域です。地平線から最も遠い $z = 0$ の場所は「境界」と呼ばれる場所で、ゲージ理論あるいは流体力学との関連付けに重要な役割を果たす場所です。

ゲージ・重力対応で二つの理論を結びつけるには、「境界」が重要な役割を果たします。そこで (3) の計量を境界 $z = 0$ 付近で展開して、その振る舞いを見てみたいと思います。まず最初に、(3) の計量がより一般的には

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left[\tilde{g}_{ij}(x, z) dx^i dx^j + dz^2 \right] \quad (4)$$

と書けることに注意したいと思います。ここで i, j の足は 0 から 3 までを走るものとします。これは Fefferman-Graham 座標と呼ばれ、 $\Lambda < 0$ の (2) の解は必ずこの形で書けることが知られています。例えば $\tilde{g}_{ij}$ を対角的にとり $-\tilde{g}_{00} = \tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22} = \tilde{g}_{33} = 1$ としたものは通常の AdS 空間になりますし、 $\tilde{g}_{00} = -(1 - z^4/z_0^4)^2 / (1 + z^4/z_0^4)$ 、 $\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22} = \tilde{g}_{33} = (1 + z^4/z_0^4)$ としたものが (3) の計量です。

それでは、(4) の計量を境界 $z = 0$ 付近で展開することを考えますが、その展開は $g_{ij}(x, z)$ を $z = 0$ 付近で展開することでわかります。この展開は以下の形になることが知られています。

$$\tilde{g}_{ij}(x, z) = \tilde{g}_{ij}^{(0)}(x) + z^4(4\pi G_N)T_{ij}(x) + O(z^6). \quad (5)$$

この時、ゲージ・重力対応は以下の主張をします。

ゲージ・重力対応の dictionary

- ゲージ理論が定義されている 3+1 次元時空の計量は $\tilde{g}_{ij}^{(0)}(x)$ で与えられる。
- ゲージ理論の 3+1 次元 stress tensor は $T_{ij}(x)$ で与えられる。

この規則を具体的に (3) に当てはめてみましょう。計量が

$$ds^2 = z^{-2} \left[\underbrace{(-dt^2 + d\vec{x}^2)}_{\text{3+1d metric}} + z^4 \underbrace{\left(\frac{3}{z_0^4} dt^2 + \frac{1}{z_0^4} d\vec{x}^2 \right)}_{\text{stress tensor} \times (4\pi G_N)} + \cdots + dz^2 \right] \quad (6)$$

と展開されることから、(3+1) 次元計量は $ds_{(4d)}^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2$ で与えられることがわかり、stress tensor は

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi G_N} \frac{1}{z_0^4} \text{diag}(3, 1, 1, 1) \quad (7)$$

となることが読み取れます。ここで diag は対角成分を意味します。今、 $G_N = \pi/(2N_c^2)$ でしたので $(4\pi G_N)^{-1} = N_c^2/(2\pi^2)$ です。 z_0^4 は何を意味するのでしょうか？それにはブラックホール時空 (3) の以下の物理量に注目すると物理的意味が明確になります。

- 温度

(3) の時空の Hawking 温度は $T = \sqrt{2}(\pi z_0)^{-1}$ で与えられることが知られています。これがゲージ理論側の温度に対応します。

- エントロピー密度

ゲージ理論側のエントロピー密度 s はブラックホールのエントロピー密度で与えられます。これは地平線の単位面積を a として $a/(4G_N)$ で与えられます。今の場合、 $a = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = (\sqrt{2}/z_0)^3$ で与えられます。 $G_N = \pi/(2N_c^2)$ および上記の Hawking 温度を用いると

$$s = \frac{1}{2} N_c^2 \pi^2 T^3 \quad (8)$$

が得られます。

従って、 $z_0^{-4} = \pi^4 T^4/4$ と同定できます。以上により stress tensor を完全にゲージ理論の言葉で書くことが出来て

$$T_{ij} = \frac{1}{8} N_c^2 \pi^2 T^4 \text{diag}(3, 1, 1, 1) \quad (9)$$

となります。物理的には、静的な流体の T_{tt} はエネルギー密度 ρ 、 T_{xx} は圧力 P ですので、温度を用いてこれらを表すと、ブラックホール時空から

$$\rho = \frac{3}{8} \pi^2 N_c^2 T^4, \quad P = \rho/3, \quad (10)$$

の関係を読み取ることができたことになります。

今の場合、stress tensor やエントロピー密度について次の事実が確認できます。

1. 共形不変性と状態方程式

stress tensor の trace はゼロであり、 $P = \rho/3$ の関係が成立しています。これは次の事実と合致します。実はここで対応している $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論は共形不変（スケール変換で不変）な理論であることが知られています。今は温度を入れているため温度という物理スケールが理論に入っていますが、それでも（平坦な空間における）共形場理論が持つ性質である、stress tensor が traceless となる性質が保たれています。また、 $P = \rho/3$ の関係は流体方程式を解く上で重要な「状態方程式」を与えています。

2. 次元解析

次元解析から、 ρ や P は「エネルギー～長さの逆数」の 4 乗の次元でなくてはなりません。ここでは唯一の物理スケールである温度 T が次元を担っており、 ρ と P がそれぞれ T^4 に比例していることが確認できます。

3. 自由度

エントロピー密度は次元解析から「長さの逆数」の 3 乗の次元であり、実際に T^3 に比例しています。また large- N_c $SU(N_c)$ ゲージ理論の自由度は N_c^2 に比例しますが、エントロピー密度も N_c^2 に比例していることが確認できます。

4. 熱力学第一法則

ここではエントロピー密度 (8) を直接地平線の面積から求めましたが、この値は stress tensor から読み取った (10) の ρ 、 P を用いると、熱力学第一法則から得られる関係式 $\rho = Ts - P$ を満たしていることが確認できます。

上記では、ゲージ・重力対応を用いると（上記の例では「強結合 large- N_c の $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論」という特殊な理論についてでしたが）、ゲージ理論側の stress tensor という物理量が、Einstein 方程式を解くことで得られることが分かりました。しかし上記で得た結果のいくつかは、ゲージ理論側の知識で既に知られている内容でもありました。ゲージ・重力対応を用いることで新たに得られた情報とは何でしょうか。

上記のような単純な例では、例えば ρ における T^4 の比例係数 $\frac{3}{8}\pi^2 N_c^2$ が、そのような新たな情報の一例です。もちろんこの係数は理論の「自由度」に対応しますので、係数が N_c^2 に比例することは容易に推測できます。問題は数係数 $\frac{3}{8}\pi^2$ です。

質量ゼロの自由粒子系では、この数係数は以下のようにして計算できます。単位体積あたりのエネルギー密度は分配関数 Z を用いて $\rho = Z^{-1} \frac{d}{d\beta} Z$ で与えられます。ただし $\beta = 1/T$ です。（ここでは $k_B = 1$ とします。）自由粒子の場合は分配関数を boson 部分 $Z_B = e^{-\Gamma_{(+)}}$ と fermion 部分 $Z_F = e^{-\Gamma_{(-)}}$ の積に分解できます。さらに質量ゼロの粒子については運動量を $\vec{p}$ としてエネルギーは $E = |\vec{p}|$ で与えられ、系の体積を V とすると、 $\Gamma_{(\pm)} = \pm V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \log(1 \mp e^{\beta|\vec{p}|})$ のように計算できます。具体的に積分を遂行すると $\Gamma_{(+)} + \Gamma_{(-)} = -\pi^2/(48\beta^3)$ を得ますが、 $\mathcal{N} = 4$ の超対称ゲージ理論には boson と fermion に対してそれぞれ $8N_c^2$ 個の自由度があることを勘定に入れると $\Gamma_{(+)} + \Gamma_{(-)} = -\pi^2 N_c^2/(6\beta^3)$ となります。これを用いて単位体積あたりのエネルギー密度を計算すると

$$\rho = \frac{1}{2}\pi^2 N_c^2 T^4 \quad (11)$$

が得られます。これはあくまで粒子間の相互作用を全く無視した場合の計算であり、強結合極限でのゲージ・重力対応からの結果 $\frac{3}{8}\pi^2 N_c^2 T^4$ は自由粒子の場合の $3/4$ 倍となっていることがわかります。この $3/4$ 倍は非常に非自明な相互作用の影響を表していると考えられ、ゲージ・重力対応で予言される一つの結果です。言い換えると、ゲージ・重力対応では重力側の古典的計算により、相互作用も含んだ分配関数の計算を自動的にに行っていることになります。

5 流体方程式と時空の力学

前章では、系が静的な場合のゲージ理論プラズマの stress tensor を重力側から読み取る具体例を見ました。この方法を系が動的な場合に应用すれば、stress tensor の時間的・空間的発展の記述、つまり流体力学が得られることになります。実際、(5) を (4) に代入し、さらに全体の計量を Einstein 方程式に代入すると、境界近傍の Einstein 方程式から

$$\nabla_i T^{ij} = 0 \quad (12)$$

の関係式が得られます。これはとりもなおさずゲージ理論の stress tensor の保存則であり、相対論的流体方程式です。このように流体方程式は Einstein 方程式の一部に組み込まれています。

従って、重力時空の時間的・空間的な発展を追うことができれば、それは流体方程式 (12) に従う流体の stress tensor を追うことが出来ることを意味します。もちろん流体の概念が成立するためには「局所熱平衡」の成立が必要ですが、今までで説明したように重力側ではブラックホール時空を考えることにより「熱平衡」の概念が導入されます。非常に大雑把には、重力側で「ブラックホールが存在していると考えて良いほど系の時間的・空間的な変化が緩やかな場合には」ゲージ理論側で「局所熱平衡」が成立していると考えても良いと思われます。

このように、ゲージ・重力対応を用いると、ゲージ理論側における「熱平衡とは何か」という問いが「ブラックホールとは何か」という問いに翻訳されます。系を平衡からずらしていった際にその物理がどのように記述できるのか、という非平衡物理学の問いは、「ブラックホール時空に時間依存性を入れていった場合に、重力時空の性質がどのように記述されるのか」という問いへと翻訳されるのです。実は、系が時間的・空間的に変化する場合のブラックホールについては、その定義や熱力学的性質なども含め、それ自身がまだ完全には理解されておらず、一般相対性理論における一つの研究テーマとなっています。今後、重力側の知見が非平衡物理学へのヒントを与えるかも知れませんが、あるいは非平衡物理学での知見が重力理論へのヒントを与えることになるのかも知れません。

6 輸送係数

重力時空の時間発展から流体の時間発展が得られるならば、それは流体の輸送係数（例えば粘性係数）が得られることを意味します。なぜならば流体の時間発展は一般に輸送係数に依存するからです。実際に重力理論側では以下のようにして輸送係数を決めることができます。

流体の振る舞いを調べるためには Einstein 方程式を解くことになります。これは 2 階の偏微分方程式ですので 2 種類の境界条件を与えることで解が決まります。これら 2 種類の境界条件は (5) における境界計量 $\tilde{g}_{ij}^{(0)}$ および stress tensor T_{ij} に相当します。境界計量は我々の Minkowski 時空の計量に選びますが、問題は stress tensor の選び方です。実は、勝手な stress tensor (の時間発展) を選ぶと、得られる重力解に「裸の特異点」が現れ、地平線が定義できなくなることが知られています。この特異点とは重力理論における物理量（例えば曲率 tensor の 2 乗 $R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}$ など）が発散してしまう点のことであり、「裸の」とは、この特異点が地平線で囲まれておらず外部から「見える」状態となっていること、を意味します。裸の特異点が存在せず、時空に地平線を定義できるような解を与える境界条件 T_{ij} が、「ゲージ理論側の物理的に正しい stress tensor」を与えるというのが、現在理解されているゲージ・重力対応の主張です。実は 4.1 章で用いた解は、静的で裸の特異点のない解をはじめから選んでいました。

この裸の特異点が存在しないという条件は、宇宙論・重力理論において Penrose により唱えられた「宇宙検閲仮説」を連想させます。宇宙検閲仮説とは、物理的なプロセスで裸の特異点が作られることはない、とする仮説です。一般には宇宙検閲仮説の反例もあるようですが、境界付近で漸近的に AdS となるような時空においては反例は見つかっていません。少なくともゲージ・重力対応の範疇では、この宇宙検閲仮説が正しい物理を決めているようです。

このようにして得られた stress tensor の時間発展から、粘性係数などを読み取ることが可能です。例えば強結合 large- N_c の $N = 4$ 超対称ゲージ理論のプラズマにつ

いて、ずれ粘性 η の値を読み取ると、エントロピー密度を s として $\eta/s = 1/(4\pi)$ が得られます。これは知られている流体の中で最も低い値です。一般に、粘性は粒子間の相互作用が大きければ大きいほど小さくなりますが、ここで考えているゲージ理論では強結合極限をとっていますので、小さいずれ粘性の値が得られることは整合性がとれています。

重力理論側での輸送係数の計算には、上記で述べた方法の他にも様々な手法があります。例えば静的な解の上での stress tensor の 2 点相関関数を重力理論上で計算し、久保公式を用いて求める方法、ブラックホールに摂動を加えて、その摂動が減衰していく様子 (quasi-normal mode) から読み取る方法などがあります。

7 粗見化

通常、多粒子系の微視的記述から流体力学的記述を得るためには「粗見化」の手続きが必要です。重力理論側では、この「粗見化」の手続きがいったいどのように行われているのでしょうか。ポイントは、重力理論側の余分な次元にあります。

3+1 次元のゲージ理論を記述するためには 4+1 次元の重力理論が必要となり、重力理論側では余分な方向、動径方向 (4.1 章の z) が現れました。今までは、この余分な方向は仮想的な方向であるとして特に意味づけはしていませんでした。実は、この動径方向はゲージ理論におけるエネルギースケールに対応しています。境界近傍に存在する自由度は非常に短い長さスケールの自由度に対応し、逆に重力時空の奥深くに存在する重力モードは、ゲージ理論における長距離スケールの自由度に対応します。重力時空の (情報を取り出すことが出来るブラックホール外部領域で) 最奥に位置するのが地平線ですので、最も長距離スケールの物理は地平線上での物理に対応することになります。実際、巨視的な物理である熱力学の法則は地平線上で得られていました。また、巨視的な物理量である輸送係数も、(裸の特異点に邪魔されずに) 地平線が存在するための条件から得られていました。このように考えると、重力理論側では、境界から地平線に向けて動径座標を遡ることで自由度の粗見化 (平均化) が行われていると解釈することも可能です。巨視的自由度を抽出したければ、時空の最奥部分の物理モードに注目すれば良いのです。実際、このような重力理論側の性質を利用してゲージ理論側での「繰り込み群」を理解しようとする「holographic 繰り込み群」の研究もなされています。

もともとゲージ・重力対応はゲージ理論の微視的記述を行う道具として研究されてきた面があります。例えばゲージ・重力対応では、ゲージ理論の構成粒子どうしの微視的反応 (粒子の散乱振幅の計算など) を調べることが可能です。一方で、上で述べたように巨視的な物理を抽出する機構も備えています。巨視的物理を抽出するための粗見化が Einstein 方程式を解くことで「自動的に」なされているのがゲージ・重力対応の一つの特徴であるとも言えると思います。

8 まとめ

以上、簡単にゲージ・重力対応と流体力学のつながりについて概観してきました。それでは、今後、ゲージ・重力対応と流体力学の関係においてどのような発展が期待できるのでしょうか。筆者は個人的に次のような展望を抱いています。

- 流体力学における重要問題に対する新たな視点の提供
流体力学は我々の生活に密着した非常に重要な学問であり、その研究の歴史も長いわけですが、様々な未解決問題があります。例えば筆者が興味を持っている問題は乱流の記述です。流体のレイノルズ数が臨界値を超えると層流が不安定になりますが、これを重力理論側の言葉に焼きなおすと、ブラックホールを静的なものから動的なものへと変化させていく過程で、ある臨界を超えると（層流の不安定性に対応する）新たな不安定性が生じることになるのではないかと予想されます。つまり、流れの不安定性の問題は動的ブラックホールの不安定性の問題に翻訳されるのではないかと考えられます。はたして動的ブラックホールの解析が流体力学における乱流の解析に比べて容易かどうかは判断しかねますが、いずれにしても全く異なる視点から問題に挑戦することが可能になることは確かです。
- 非平衡物理学に対する新たな視点の提供
上記の問題とも関連しますが、時間依存性の入った重力時空の解析から、ゲージ粒子系の非平衡物理学に対するヒントを得ることが可能かも知れません。
- 巨視的物理と微視的物理の接点
ゲージ・重力対応は、特殊なゲージ理論については重力理論側との対応が詳細に調べられており、ゲージ理論の微視的物理と巨視的物理の双方を重力理論のもとで同時に記述することが可能です。従って巨視的物理と微視的物理の接点、あるいは両者の中間スケールの物理現象の研究に、ゲージ・重力対応を応用することが出来る可能性もあると考えています。

現在のところ、ゲージ・重力対応を専門的に研究している研究者は超弦理論の専門家、重力理論の専門家と一部の原子核理論の専門家に限られていると思います。しかしながら、ゲージ・重力対応の応用は、QCD やクォーク・ハドロン物理学にとどまらず、流体力学や物性物理学と広範なテーマへの応用が可能だと考えられています。このような状況では、もはや超弦理論の研究者のみでの研究には限界があります。今後、この分野の研究をいかに発展させることができるかは、超弦理論、重力理論の研究者が、いかに原子核理論、物性理論、流体力学の研究者とうまく議論し共同研究を行っていくことができるかにかかっていると考えます。今回の講演とこの講究録が、そのような異分野交流の良いきっかけとなることを願います。

参考文献

- [1] ゲージ・重力対応の原著論文としては
J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231 [Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113] [arXiv:hep-th/9711200],
および
S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” Phys. Lett. B **428** (1998) 105 [arXiv:hep-th/9802109];
E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253 [arXiv:hep-th/9802150].

- [2] ゲージ・重力対応のより詳細な日本語によるレビュー記事としては、例えば
今村洋介, 「AdS₅/CFT₄ correspondence」, 素粒子論研究 98(6), pp.209-242 (1999).
- [3] 流体力学的物理量のゲージ・重力対応を用いた導出等に関するレビューとしては、例えば
M. Natsuume, “String theory and quark-gluon plasma,” arXiv:hep-ph/0701201;
D. T. Son and A. O. Starinets, “Viscosity, Black Holes, and Quantum Field Theory,” Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **57** (2007) 95 [arXiv:0704.0240 [hep-th]].
- [4] 流体力学と重力理論の対応に主眼を置いたレビューとしては、例えば
M. Rangamani, “Gravity & Hydrodynamics: Lectures on the fluid-gravity correspondence,” arXiv:0905.4352 [hep-th].
- [5] Holographic 繰り込み群のレビューとしては、例えば
K. Skenderis, “Lecture notes on holographic renormalization,” Class. Quant. Grav. **19** (2002) 5849 [arXiv:hep-th/0209067].
- [6] 筆者の仕事で、時間依存する重力時空と流体力学の関係を論じた代表的な論文は
S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, “Consistent Anti-de Sitter-Space/Conformal-Field-Theory Dual for a Time-Dependent Finite Temperature System,” Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 031601 [arXiv:0901.4834 [hep-th]]; S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, “A Holographic Dual of Bjorken Flow,” Prog. Theor. Phys. **121** (2009) 121 [arXiv:0807.3797 [hep-th]].