

Tor Gives the Inverse to the
Hilbert Function of a Graded Algebra

Cornell Univ. Moss E. Sweedler

k を体、 $U = \bigoplus_{i=0}^{\infty} U_i$ を次数 k ベクトル空間で、各 i について、 $\dim U_i < \infty$ とする。 U の Hilbert generating function とは次のべき級数をいう。

$$\psi(U)(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim U_i) t^i \in \mathbb{Z}[[t]]$$

V を k ベクトル空間、 TV , $\wedge V$, SV をそれぞれ V 上のテンソル代数、外積代数、対称代数とする。また $DV = SV / \langle vw \rangle_{v,w \in V}$ とする。従って、次数 k ベクトル空間として $DV = k \oplus V$ である。

Bass の K 理論の本の中に (528 頁 (8.4))、この結果の K 理論的一般化がある：

$$(き) \quad [\psi(SV)(t)][\psi(\wedge V)(-t)] = 1$$

この数年の間、これは私が気に入った、そして美しく、

神秘的でもある結果のひとつでした。同じように見えるが、もっと簡単な公式は

$$[\psi(DV)(t)][\psi(TV)(-t)] = 1$$

です。 $V \cdot k = \{0\}$ として k に自明な SV 加群、 DV 加群の構造を入れ、 $\text{Tor}^{SV}(k, k)$, $\text{Tor}^{DV}(k, k)$ を考える。次数ベクトル空間の同型

$$\Lambda V \cong \text{Tor}^{SV}(k, k)$$

$$TV \cong \text{Tor}^{DV}(k, k)$$

がある。これは、次数環 U ($U_0 = k$) に対する次の公式 (実は正しくない) を示唆する。

$$(*) \quad [\psi(U)(t)][\psi(\text{Tor}^U(k, k))(-t)] = 1$$

この(*)は正しくないが、それは $[\psi(U)(t)]^{-1}$ を表わすのに、 $\text{Tor}^U(k, k)$ を使うことができるという正しいアイデアを含んでいる。さらに(*)は、ほとんど正しい。(*)を正しい公式に直すためには、 $\text{Tor}^U(k, k)$ が自然な双次数をもっていて、その双次数を使って $\text{Tor}^U(k, k)$ からベキ級数を作れることに気がかねばならない。

双次数ベクトル空間 M に対して、ベキ級数 $\psi(M)(t)$ を次の様に定義する。

$$(と) \quad \Phi(M)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim M_{ij} \right) t^j$$

これが定義可能であるためには、次の有限性の条件が必要である。即ち「各 j について、 $n_j \in \mathbb{N}$ が存在して、 $i \geq n_j$ ならば、 $M_{ij} = \{0\}$ である。」

k が体の時 (一般の可換環の時 は後述) の(*)の正しい形は次の通りである。

$$(**) \quad [\psi(U)(t)][\Phi(\text{Tor}^U(k, k))(t)] = 1$$

後で定理を正確に述べる時に、 U や $\text{Tor}^U(k, k)$ にどんな条件が必要かを述べる。注目すべきことは(き)から(**)に行くと、第二項の「 $-t$ 」が「 $+t$ 」に変化していることである。

$\wedge V$ と $\text{Tor}^{SV}(k, k)$ を同一視すると、双次数ベクトル空間として、それは対角成分に集約される。(即ち、対角成分以外はすべて零ベクトル空間) 従って、

$$\Phi(\wedge V)(t) = \psi(\wedge V)(-t)$$

TV と $\text{Tor}^{DV}(k, k)$ についても、同様のことが成立する。

次に k を可換環とする。 $\mathcal{M}$ を有限生成 k 加群の類とする。各 $M \in \mathcal{M}$ に対して、可換環 S の元 $[M]$ があり、次の(i), (ii), (iii)をみたすとする。

$$(i) \quad [k] = 1_S$$

(ii) $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ が k 加群の完全系列ならば、 $[M] = [M'] + [M'']$ である。

$$(iii) \quad [M][M'] = [M \otimes_k M']$$

身近な例は、 k が体、 $\mathcal{M}$ が有限次元 k ベクトル空間の類、 $S = \mathbb{Z}$ 、 $[M] = \dim_k M$ である。与えられた k に対するこのような $[\]$ と S の普遍例は $K_0(k)$ であり、これが $K_0(k)$ の定義である。

$|\mathbb{Z}| = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。 $\mathcal{M}^{|\mathbb{Z}|}$ を $|\mathbb{Z}|$ 添数の次数射影 k 加群で、 $U = \bigoplus_{i \in |\mathbb{Z}|} U_i$ 、 $U_i \in \mathcal{M}$ なるものの類とする。

このような U に対して ψ の一般的な形

$$\psi(U) = \sum_{i=0}^{\infty} [U_i] t^i \in S[[t]]$$

を得る。 $U_0 = k$ ならば、 $\psi(U)$ は $1 + \sum_{i=1}^{\infty} s_i t^i$ なる形をしたべき級数である。従って、可逆元である。

双次数 k 加群に対しても同様に重を一般化する。 $\mathcal{M}^{|\mathbb{Z}|^2}$ を $M = \bigoplus_{i,j \in |\mathbb{Z}|} M_{ij}$ 、 $M_{ij} \in \mathcal{M}$ 、各 j について、充分大きな i に対して、 $M_{ij} = \{0\}$ なる形の射影 k 加群の類とする。

$M \in \mathcal{M}^{|\mathbb{Z}|^2}$ に対して、前述の (i) において $\dim M_{ij}$ を $[M_{ij}]$ に

置きかえて得られるべき級数 ($\in S[[t]]$) を $\Psi(M)$ と定義する。

定理 U を次数 k 代数で、 $U_0 = k$, $U \in \mathcal{M}^{|\mathbb{Z}|}$ なるものとする。 k は $U_i \cdot k = \{0\}$ ($i \geq 1$) なる、自明な U 加群構造をもつものとする。このとき、 $\text{Tor}^U(k, k)$ は自然な双次数をもち、もし $\text{Tor}^U(k, k)$ が射影 k 加群ならば、この双次数で、 $\text{Tor}^U(k, k) \in \mathcal{M}^{|\mathbb{Z}|^2}$ であり、次の式が成立する。

$$[\Psi(U)][\Psi(\text{Tor}^U(k, k))] = 1$$

この定理の証明の概略は最後に述べることにする。

⊗ Product properties of Ψ & Ψ

次数加群のテンソル積上の普通の次数に関して、次のことは簡単に確かめられる。即ち、 $U, V \in \mathcal{M}^{|\mathbb{Z}|}$ に対して

$$\underbrace{\Psi(U) \Psi(V)}_{S[[t]] \text{ での積}} = \Psi(U \otimes V)$$

双次数加群 C, D に対して、 $C \otimes D$ の双次数は、次で与えられる。

$$(C \otimes D)_{nm} = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ r+s=m}} C_{ir} \otimes D_{js}$$

この時、 $C, D \in \mathcal{M}^{|\mathbb{Z}|^2}$ に対して

$$\overline{\Phi}(C) \overline{\Phi}(D) = \overline{\Phi}(C \otimes D)$$

定義 $\cdots \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow \cdots$ を k 加群の
 系列とする。この系列が M で複体 (complex at M)
 とは、 $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ が成立するときをいう。この
 時、 $H(M) = \text{Ker } g / \text{Im } f$ と定義する。 M が系列の
 右端、或いは左端のときは、いつでも M で複体と約
 束し、 $H(M)$ は次のように定義する。

$$H(M) = \begin{cases} \text{Ker } g & , \quad M \text{ が左端のとき} \\ \text{Im } f & , \quad M \text{ が右端のとき} \\ M & , \quad \text{系列が } M \text{ だけのとき} \end{cases}$$

各加群で複体のとき、その系列を複体という。

完全系列 $0 \rightarrow N_2 \rightarrow N_1 \rightarrow N_0 \rightarrow 0$ は $H(N_i) = 0$ なる
 複体 $N_2 \rightarrow N_1 \rightarrow N_0$ である。このような複体に対しては、
 [] の定義より

$$[N_0] - [N_1] + [N_2] = 0.$$

この結果の拡張として

補題 $N_{t+1} \rightarrow N_t \rightarrow \cdots \rightarrow N_0$ を $\{N_i\}_{i=0}^{t+1} \subset \mathcal{M}$

で $H(N_i)$ ($1 \leq i \leq t$) が射影 k 加群になるような

複体とすれば、次の 2 つのことがいえる。

$$\{H(N_i)\}_{i=0}^{t+1} \subset \mathcal{M}$$

$$\sum_{i=0}^{t+1} (-1)^i [N_i] = \sum_{i=0}^{t+1} (-1)^i [H(N_i)]$$

定義 C を $C \in \mathcal{M}^{|\mathbb{Z}|^2}$ なる双次数加群とする。

双次数 $(-1, 0)$ の写像 $d: C \rightarrow C$ が C に「袖」

(sleeves) を与えるとは、 $d^2 = 0$ でホモロジー加群

$H(C) = \text{Ker } d / \text{Im } d$ が射影 k 加群のときにいう。

我々は、各 d のつくる下の絵より、用語「袖」を使う。

$$\begin{array}{c}
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 \left(\begin{array}{l}
 C_{03} + C_{13} + C_{23} + C_{33} + C_{43} + \cdots \\
 \hline
 C_{02} + C_{12} + C_{22} + C_{32} + C_{42} + \cdots \\
 \hline
 C_{01} + C_{11} + C_{21} + C_{31} + C_{41} + \cdots \\
 \hline
 C_{00} + C_{10} + C_{20} + C_{30} + C_{40} + \cdots
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

補題と「袖」を合わせて、次の命題を得る。

命題 $C \in M^{|\mathbb{Z}|^2}$ で d が C に「袖」を与えるならば、 $H(C) \in M^{|\mathbb{Z}|^2}$ かつ $\Phi(C) = \Phi(H(C))$ である。

定理の証明。

次の5つの等号を説明する。

$$\begin{aligned} & \Psi(U) \Phi(\text{Tor}^U(k, k)) \\ & \stackrel{(1)}{=} \Phi(C) \Phi(\text{Tor}^U(k, k)) \stackrel{(2)}{=} \Phi(C) \Phi(D) \\ & \stackrel{(3)}{=} \Phi(C \otimes D) \stackrel{(4)}{=} \Phi(H(C \otimes D)) \stackrel{(5)}{=} 1 \end{aligned}$$

(1) C は U から次のように得る。

$$C_{ij} = \begin{cases} U_j, & i = 0 \text{ のとき} \\ 0, & i \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき、 $\Psi(U) = \Phi(C)$ は自明である。

(2) D は次の双次数加群である。

$$D_{nl} = \bigoplus_{\substack{j_1 + \dots + j_n = l \\ j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}}} U_0 \otimes U_{j_1} \otimes \dots \otimes U_{j_n} \otimes U_0$$

次の写像、

$$\begin{array}{ccc} D_{nl} & \alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_n \otimes \beta & \\ \downarrow & \downarrow & \\ D_{n-1, l} & \sum_{i=2}^n (-1)^i \alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes (u_{i-1} u_i) \otimes \dots \otimes u_n \otimes \beta & \end{array}$$

は D に袖を与える。これらの袖で、双次数加群として、
 $H(D) = \text{Tor}^U(k, k)$ である。これらの袖は、 $\text{Tor}^U(k, k)$ を
 計算するのに使われる棒分解 (bar resolution) だからである。
 この Tor の双次数付けは、次数 U 加群の圏で考えているのた
 から自然に出てくる双次数付けである。前述の命題より、
 $\overline{H}(D) = \overline{H}(H(D))$ がでる。

(3) これは前述の $\overline{H}$ の product property より出る。

(4) と (5) $C \otimes D$ は次の双次数加群である。

$$(C \otimes D)_{nl} = \bigoplus_{\substack{j_0 + \dots + j_n = l \\ j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N} \\ j_0 \in |\mathbb{Z}|}} U_{j_0} \otimes U_{j_1} \otimes \dots \otimes U_{j_n} \otimes U.$$

この双次数加群は袖を持ち、それが $\text{Tor}^U(U, k)$ を計算す
 るのに使われる棒分解になっている。従って

$$H(C \otimes D) = \text{Tor}^U(U, k)$$

等号 (4) は前述の命題からでる。等号 (5) は、 $\text{Tor}^U(U, k)$ が
 自明であるということ — 次数 $(0, 0)$ に k があり、他はすべ
 て $\{0\}$ ということ — からでる。

参 考 文 献

Sweedler, M.E., Tor gives the inverse to the Hilbert function of a graded
 algebra, to appear (J. Pure & Applied Algebra).