

存在域を定義する多様体 のある族について

東大理 鈴木 理

§1. 問題の定式化と resolution の概念。

Grauert [1] は 1963 年に次の様な多様体を発見した。(1) weakly 1-complete manifold (定義については本研究録 Narkano [5] を見る) であり global な holomorphic function S は定数しか存在しない。(2) weakly 1-complete manifold である analytic set を除く $\bar{S}$ holomorphically separable でありながら global holomorphic function S の作る algebra が Stein algebra でないもの。この 2 つの多様体は従来の Stein 多様体の理論では説明が出来ない。さらに一般多様体上の函数論は Stein 多様体上のそれとは相当異なるものであると予想させる。多様体上の函数論とは何を対象としたらよいのか? — という疑問が自然に生じる。

他方 Grauert-Remmert [2], Scheja [3] 及び Kerner [4] により $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) 上の分岐 Riemann domain が考察されたが

不分岐な場合に成立した基本的関係が一般には成立しないことが見いだされた。つまり

$$\text{存在域} \not\iff \text{正則凸} \not\iff \text{擬凸}.$$

(ここで X が存在域とは X の K -hull が X と同型になることとし、擬凸の定義は Grauert-Remmert [2] による Oka の円族族によるもので与える。)

分岐存在域の必要条件は何か？ 正則凸を真に含む充分条件は何であるか？

我々は この2つの問題が密接に関係すること、つまりオ1の問題の半分はオ2の問題に帰されることを見よう。この事柄を compact 多様体の "projective model" の方法を応用する。compact 多様体 Y では、 $\mathcal{M}(Y) \cong \mathbb{C}$ となる事は常識的である。ここで $\mathcal{M}(Y)$ は Y 上の有理函数の作る体を現わす。射影的代数多様体からこの種の多様体を一括して取扱うのは次の定理に負う。 $\mathcal{M}(Y)$ は超越元 $f_1, \dots, f_l$ に原始要素 f_{l+1} を付加して得られる代数函数体であり、 $\Phi = (f_1, \dots, f_{l+1}) : Y \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1 \ (l+1\text{ 回})$ となる meromorphic map を得るが不定点を除いて holomorphic としてよい。 $\mathcal{M}(Y) = \mathcal{M}(\mathcal{Y})$ とすると $\mathcal{M}(Y) \cong \mathcal{M}(\mathcal{Y})$ が成立つ。 $\mathcal{M}(Y) \cong \mathbb{C} \iff \mathcal{Y} = \emptyset$ ということである。

これに対応する non-compact 多様体 X の結果は Grauert

[4]により与えられている。 X に次の同値関係を入れる。

$$x, y \in X \text{ に対して } x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

for any holomorphic function on X .

この同値関係で割って得られる商空間には付環空間の構造が入り（但し一般に複素解析構造をもっているとは限らないことに注意する）これを $\text{Spec } \mathcal{O}(X)$ とかく。ここで $\mathcal{O}(X)$ は X 上の global holomorphic functions の作る algebra の事とする。 $\omega: X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}(X)$ により自然射影を定義する。

$$A = \{x \in X \mid r \mathcal{R}_x \omega \neq r \mathcal{R} \omega\}$$

とおくと解析的集合になる。我々は以下次の仮定をおく：

仮定 (I): (1) $\omega^{-1}\omega(x)$ は connected

$$(2) \mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(X-A).$$

この仮定のもとでは $\text{Spec } \mathcal{O}(X)$ で “複素構造をもたぬ集合、以下これを I とかくことにすると、 $I \subseteq \omega(A)$ となることが知られており、次の事柄が成立つ：

Theorem. $X = \text{Spec } \mathcal{O}(X) - I$ とおく。 $\dim X = 2$ とすると、ある $\Phi: X \rightarrow \mathbb{C}^2$ により分岐 Riemann domain として実現される。

こうして多様体上の函数論を “ X を存在域とする様な複素多様体 X を特徴づけること” という事にする。

従って問題は (1) 分岐領域 X の問題 と (2) fibre structure ω を特長づけることに帰される。我々はここでは (1) だけについて考える。(1) についてはあらかじめ X が与えられている必要はなく、初めから分岐領域 X が与えられていると考えることもできる。 X が与えられている時には分岐領域は $\mathbb{P}$ が出現することにより困難を生じている。ここで我々は resolution なる概念を導入しておく。

Definition. X を $\mathbb{C}^2$ 上の分岐領域とする。 X^* が X の resolution であるとは, (i) X^* が complex space. (ii) $\text{Spec } \mathcal{O}(X) - \mathbb{P} \cong X$ が成立つこととする。

X があらかじめ与えられている時には,

Definition. (X, τ, X^*) が resolution $\iff$ (i) $\tau: X \rightarrow X^*$ が holomorphic map. (ii) $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(X^*)$. (iii) X^* が $X_{\infty} = \text{Spec } \mathcal{O}(X) - \mathbb{P}$ の resolution.

(1) τ resolution が存在するかは非常に困難な問題と思われ。我々は以下次の仮定をおこう。

仮定 (II): X を分岐領域とした時 X は resolution をもつとする。(或は X が与えられている時には, X が resolution をもつとする。)

§2. 存在域を定義する多様体の或る族.

X が存在域となる為の充分条件を与える。これは Stein 多様体の最も自然な拡張になっている。resolution X^* に次の条件をもつ non-effective divisor $[S^*]^n$ が存在すると仮定する。

Definition. X^* が $[S^*]^n$ -representable $\iff$ 任意の点 p に対してある近傍 $U(p)$ が存在し、さらに $\Phi_p = (\varphi_0, \dots, \varphi_N)$, $\varphi_\sigma \in H^0(X^*, \mathcal{O}([S^*]^n))$ $\sigma=0, \dots, N$ と言う $U(p)$ の embedding が存在する。即ち, $\mathbb{P}^N$ 内のある open set G_p 及び G_p の analytic set N_p が存在し $\Phi_p: U_p \cong N_p$ が成立つ。

Definition. X^* が $[S^*]^n$ -separable $\iff$ 任意の異なる 2 点 p, q に対して section $\varphi \in H^0(X^*, \mathcal{O}([S^*]^n))$ が存在して, $\varphi(p) \neq 0$, 及び $\varphi(q) = 0$ が成立つ。

Definition. X^* が $[S^*]^n$ -convex except I $\iff$ (i) I は解析的集合である。(ii) $q_n \notin I$ となる任意の発散点列 $\{q_n\}$ に対して I の近傍 U をとり $\Omega = X^* - \bar{U}$ と置くと $q_n \in \Omega$ となるものを勝手に 1 つ取る。この Ω について次の事柄が成立つ: K を任意の compact set とした時, ある集合 K が存在して (α) $K \cap \Omega$ は relatively compact in X^* , (β)

任意の正数 ε, δ 及び任意 $y \in X^* - K$ 及びその勝手な近傍 $U(y)$ に対して, ある section $\varphi \in H^0(X^*, \mathcal{O}(S^*J^n))$ があって,

$\|\varphi\|_K < \varepsilon$ 及び $\|\varphi\|_{y'} \geq \delta$ ある点 $y' \in U(y)$ が成立つ。ここで $\|\cdot\|$ はあらかじめ取られた $[S^*J^n]$ の metric による長さとする。(この定義は metric の取り方によるぬ)。

こうして我々の族は次の様に定義される。

Definition. X^* が δ -manifold $\iff$ ある $[S^*J^n]$ が存在して (i) $[S^*J^n]$ -representable (ii) $[S^*J^n]$ -separable (iii) $[S^*J^n]$ -convex except some analytic set I .

次の定理が示される。

Theorem I. X^* が δ -manifold $\Rightarrow X$ は存在域である。

次に δ -manifold になるための充分条件を与える。

Definition. X^* が $\mathcal{L}$ -manifold $\iff [S^*J^n]$ が存在して (i) $[S^*J^n] \otimes K_{X^*}^{-1} > 0$, ここで K_{X^*} は X^* の canonical line bundle とする。 (ii) complete pseudoconvex function ψ が存在する。

Theorem II. X^* が $\mathcal{L}$ -manifold $\Rightarrow X^*$ は δ -manifold.

これを示すのに Nakano [5] & Kazama [3] による次の定理が基本的である:

Theorem: X^* が $\mathcal{L}$ -manifold とすると, $X_c^* = \{\psi < c\}$ とおくと $H^q(X_c^* \otimes [S^*]^{-n} \otimes \mathcal{L}) = 0$ ($q \geq 1, n \geq n_0$) 特に $H^q(X^* \otimes [S^*]^{-n}) = 0$ ($q \geq 1$).

さらに次の事柄を示せる。

Theorem (III). X^* が $\mathcal{L}$ -manifold の時には,

- (i) $I = \emptyset \Rightarrow \mathcal{O}(X^*)$ は Stein algebra をもつ.
- (ii) $I \neq \emptyset$, さらに $I = \{p\}$: $B \cup \bar{\omega}^{-1}(p) = S^*$ が成立つとする。この時、次の条件を満たす divisor D が存在すると仮定する。(a) ある S^* の irreducible component S_p^* が存在して $S_p^* \cap D \neq \emptyset$ (但し $S_p^* \neq D$ とする) (b) $D^1 \geq 0$ とある metric をもつ。この時 $\mathcal{O}(X^*)$ は Stein algebra ではない。

次に例を見よう。Ohtuki の例 (本研究録 参照) を取扱う。記号はそこにあるものに従う。 R, F, G はそこにあげられて いるものとする。 F は topologically trivial line bundle であるから, fibre-coordinate ξ ζ_λ とするとき, $\zeta_\lambda = f_{\lambda\mu} \zeta_\mu$ として $F = \{f_{\lambda\mu}\}$ とする時, $|f_{\lambda\mu}| \equiv 1$ としてよい。従って $\bar{h} = |\zeta_\lambda|^2$ は F 上の function とする。 G は negative line bundle であるから, metric $\{a_\lambda\}$ で $\partial\bar{\partial} \log a_\lambda > 0$ とするものがある。

これを1つ定める。 G の fibre coordinate を ξ_λ とするとき $g = a_\lambda |\xi_\lambda|^2$ は G 上の function とある。 $V = F \oplus G$ とおく。 g, h は自然射影により V 上の函数と見なせる。 $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$ とおき、 $V_c = \{g < c\}$, ここで $g = g + h$ とする。

Proposition. 任意の C について, $X_c = \text{Spec } \mathcal{O}(V_c) - I$ とおくと, V_c は $\mathcal{L}$ -manifold になる。

$\hat{\text{Ohtsuki [6]}$ により $\mathcal{O}(V_c)$ は Stein algebra をもたないから $I = \varpi(S)$ が成立つ。ここで $S = \{\xi_\lambda = 0\}$ により定義される divisor である。(自然な同-視により F, G の fibre-coordinate と V のそれとを同-視して113)。 $[S]_R \cong G$ であるから, $\pi^* a_\lambda = a_\lambda^*$ とおき, $\alpha_\lambda = a_\lambda^{*-1} \cdot e^{-g}$ とおくと $[S]'$ の metric c を定め, これは任意の V_c について positive になる。 V の canonical bundle K_V の metric を V_c に制限して V_c の K_{V_c} の metric とする。 $[S]'^n \otimes K_{V_c}^{-1} > 0$ とある。尚 V_c は決して正則凸でないことに注意する。

Grauert の与えた元の例 ($\hat{\text{Ohtsuki [6]}$ をみよ) についても F の zero section の tubular nbd F_c はやはり $\mathcal{L}$ -manifold になっている。この時には $[S]'^2 \otimes [S]'^m$ を取ればよい。

例 2 $V = F \oplus G \oplus G$ とおこう。同様にして V_c を作る。 V_c は $\mathcal{L}$ -manifold になっている。 fibre-coordinate

nate を $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ とおくと, 次の事柄が Otuki とまったく同様に示される。 $A = \{\xi_\lambda = 0\} \cap \{\eta_\lambda = 0\}$ とおくと,

- (i) 任意の $f \in \mathcal{O}(V_c)$ について $f|_A \equiv 0$. さらに $\forall p, q \in V_c - A$, $p \neq q$ に対してある正則函数があり, $f(p) \neq f(q)$.
- (ii) $\mathcal{O}(V_c)$ は non-Stein algebra である。従って $\text{Spec } \mathcal{O}(V_c) - \pi(A)$ は $\mathbb{C}^4$ 上の分岐 Riemann 多様体として実現され, A は境界点を定める。所が $\text{codim } A \geq 2$ であるから, どのように実現の仕方を変えても A はギ凸でない境界点に属する。 S^* としては $S = \{\xi_\lambda = 0\}$ も $S' = \{\eta_\lambda = 0\}$ のいずれもが取れることに注意しよう。

従って次の定理を得る:

Theorem IV: $\mathcal{L}$ -manifold であって, (i) どの様に被覆してもギ凸でない境界をもつものがある。 (ii) X^* で正則でないものがある。 (iii) $\mathcal{O}(X^*)$ が Stein algebra でないものがある。

最後に問題をのべておく。

Problem 1. resolution は存在するだろうか?

§2 に於いては, $\mathcal{L}$ -manifold $\Rightarrow \mathcal{S}$ -manifold $\Rightarrow X$ が存在域が示された。そこで

Problem 2. X が存在域なる resolution として $\mathcal{L}$ -manifold となるものがとれるだろうか?

これは不分岐存在域の場合の 存在域 $\Rightarrow$ 擬凸に対応して
いる事と見なせる。

Reference

- [1]. Grauert: Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten. Math. Zeit 81 (1963) 377-391.
- [2]. Grauert - Remmert: Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math Zeit 1957.
- [3]. Kazama. Approximation theorem and its application to Nakano's vanishing theorem. Mem Fac Sci Kyushu Univ vol 27 (1973) 221-240.
- [4] Kerner. Holomorphiehüllen zu K -vollständigen komplexen Räumen. Math Ann (138) (1959) 316-328.
- [5] Nakano. weakly 1-complete manifold 上の消滅定理について. (本研究録)
- [6] Ôtuki. Stein algebra をもたぬ多様体の例について. (本研究録)
- [7] Scheja. Über das Auftreten von Holomorphie- und Meromorphie gebieten, die nicht holomorph-konvex sind. Math Ann 140 (1960) 33-50.