

反復関数の収束次数の改良

東京女子大 長田 直樹 (Naoki Osada)

1. はじめに

実または複素反復関数 $\phi(z)$ の収束次数が $p(>1)$ であるとき、

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{p}\phi'(z)[z - \phi(z)] \quad (1.1)$$

の収束次数は $p+1$ となることが知られている。(例えば、Petković and Tričković[5] を見よ。)

本論文では、この性質を一般化し、反復関数の収束次数を高める方法を述べる。ついでこれらの方法を、多重解を持つ単独方程式 $f(z) = 0$ に適用し、新しい 3 次と 4 次の反復解法を導く。また、数値例により有効性を調べる。

2. 反復関数の収束次数

実または複素反復関数 $\phi(z)$ が不動点 α を持つとする。自然数 p と定数 C ($C \neq 0$) が存在して

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{\phi(z) - \alpha}{(z - \alpha)^p} = C$$

のとなるとき、反復関数 $\phi(z)$ の (α への) 収束次数は p であるという。言い替えると点 α で連続な関数 $\eta(z)$ により

$$\phi(z) = \alpha + \eta(z)(z - \alpha)^p, \quad \eta(\alpha) \neq 0 \quad (2.1)$$

と表されるとき、 ϕ の収束次数は p となる。 $C = \eta(\alpha)$ は漸近誤差定数と呼ばれる。

定理 1. α に $p(\geq 1)$ 次収束する反復関数 $\phi(z)$ が α で連続微分可能とする。また、 α に $q(>1)$ 次収束する反復関数 $\psi(z)$ が α で連続とする。このとき、反復関数

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{p}\phi'(z)[z - \psi(z)] \quad (2.2)$$

の収束次数は少なくとも $p+1$ である。

証明 $\phi(z)$ は (2.1) と表されるので、

$$\phi'(z) = p\eta(z)(z - \alpha)^{p-1} + \eta'(z)(z - \alpha)^p$$

となる。また、

$$\psi(z) = \alpha + \rho(z)(z - \alpha)^q, \quad \rho(\alpha) \neq 0$$

と表されるので、これらを (2.2) に代入すると

$$\Phi(z) = \alpha - \frac{1}{p}\eta'(z)(z-\alpha)^{p+1} + O((z-\alpha)^{p+q-1})$$

が得られる。□

(2.2) において $\phi(z) = \psi(z)$ で $p \geq 2$ の場合が (1.1) である。(2.2) において $\Phi(z) = \psi(z)$ つまり

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{p}\phi'(z)[z - \Phi(z)]$$

とおき、 $\Phi(z)$ について解くと

$$\Phi(z) = z - \frac{z - \phi(z)}{1 - \frac{1}{p}\phi'(z)} \quad (2.3)$$

となる。(2.3) について次の定理が成り立つ。

定理 2. α に $p(>1)$ 次収束する反復関数 $\phi(z)$ が α で連続微分可能とする。このとき、反復関数

$$\Phi(z) = z - \frac{z - \phi(z)}{1 - \frac{1}{p}\phi'(z)}$$

の収束次数は少なくとも $p+1$ である。

証明 $\phi(z)$ は (2.1) を満たすので、

$$\phi'(z) = p\eta(z)(z-\alpha)^{p-1} + \eta'(z)(z-\alpha)^p$$

となる。よって $p > 2$ のときは

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= z - (z-\alpha)[1 - \eta(z)(z-\alpha)^{p-1}] \\ &\quad \times [1 + \eta(z)(z-\alpha)^{p-1} + \frac{1}{p}\eta'(z)(z-\alpha)^p + O((z-\alpha)^{2p-2})] \\ &= \alpha - \frac{1}{p}\eta'(z)(z-\alpha)^{p+1} + O((z-\alpha)^{2p-1}) \end{aligned}$$

となる。 $p=2$ のときも同様に

$$\Phi(z) = z - \frac{1}{2}\eta'(z)(z-\alpha)^3 + O((z-\alpha)^4)$$

が導ける。□

定理 1 を $q=1$ の場合にも成立するように修正する。

定理 3. α に $p(\geq 1)$ 次収束する反復関数 $\phi(z)$ と $q(\geq 1)$ 次収束する反復関数 $\psi(z)$ が α で連続微分可能とする。このとき、反復関数

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{p} \phi'(z) \frac{z - \psi(z)}{1 - \frac{1}{q} \psi'(z)}$$

の収束次数は少なくとも $p+1$ である。

証明 定理 1、定理 2 と同様である。□

定理 3 で $\phi(z) = \psi(z)$ とおくと (2.3) が得られる。

3. 単独方程式の 1 点反復解法への応用

単独方程式 $f(z) = 0$ の解 α を求める 1 点反復解法

$$z_{n+1} = \phi(z_n)$$

を考える。 p 次収束する反復関数 $\phi(z)$ が $f(z), f'(z), \dots, f^{(p-1)}(z)$ と α の多重度 m のみによって定まるとき、 ϕ は p 次最適解法¹ という。

次の記号を用いる。

$$u = u(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad A_j = A_j(z) = \frac{f^{(j)}(z)}{j! f'(z)} \quad (j = 2, 3, \dots).$$

3.1. 既知の例

良く知られた解法に前節の諸定理を適用すると、別の良く知られた解法が得られる。

例 1. $f(z) = 0$ の単解 α を求める Newton 法

$$\phi(z) = z - u$$

に定理 1 および 2 を適用する。 $p = 2$, $\phi'(z) = 2A_2u$ より

(i) $\phi(z) - \frac{1}{2} \phi'(z) [z - \phi(z)] = z - u - A_2u^2$ (Traub の 3 次基本系列).

(ii) $z - \frac{z - \phi(z)}{1 - \frac{1}{2} \phi'(z)} = z - \frac{u}{1 - A_2u}$ (Halley 法).

例 2. $f(z) = 0$ の単解 α を求める parallel-chord 法 (簡易 Newton 法)

$$\phi(z) = \psi(z) = z - cf(z) \quad c \neq 0$$

¹ 最適解法は、関数値計算回数の点で最適であって、必ずしも精度の点での最適ではない。精度には収束次数のほかに漸近誤差定数も関係する。

に定理 3 を適用する。 $p = q = 1$, $\phi'(z) = \psi'(z) = 1 - cf'(z)$ より

$$\phi(z) - \phi'(z) \frac{z - \psi(z)}{1 - \psi'(z)} = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \quad (\text{Newton 法}).$$

例 3. $f(z) = 0$ の単解 α を求める

$$\phi(z) = z - u, \quad \psi(z) = z - cf(z) \quad c \neq 0$$

に定理 3 を適用すると、 $p = 2$, $q = 1$ より

$$\phi(z) - \frac{1}{2}\phi'(z) \frac{z - \psi(z)}{1 - \psi'(z)} = z - u - A_2 u^2$$

が得られる。これは例 1(i) と同じである。

例 4. $f(z) = 0$ の m 重解 α を求める Schröder 法

$$\phi(z) = z - mu$$

に定理 1 および 2 を適用する。 $p = 2$, $\phi'(z) = 1 - m + 2mA_2u$ より

$$(i) \phi(z) - \frac{1}{2}\phi'(z)[z - \phi(z)] = z - mu \left[\frac{1}{2}(3 - m) + mA_2u \right] \quad (\text{Traub の 3 次基本系列}).$$

$$(ii) z - \frac{z - \phi(z)}{1 - \frac{1}{2}\phi'(z)} = z - \frac{u}{\frac{1+m}{2m} - A_2u}$$

(Hansen and Patrick[2], Farmer and Loizou[1]).²

例 5. (Traub[7, Lemma 7-1]) $f(z) = 0$ の m 重解 α を求める Traub の 3 次基本系列

$$\phi(z) = z - mu \left[\frac{1}{2}(3 - m) + mA_2u \right]$$

に $\psi(z) = z - mu$ として定理 1 を適用すると、Traub の 4 次基本系列が得られる。

$$\Phi(z) = z - mu \left[\frac{1}{6}(m^2 - 6m + 11) + m(2 - m)A_2u + m^2(2A_2^2 - A_3)u^2 \right].$$

3.2. 多重解を持つ方程式の 3 次の 1 点反復解法

以下では $f(z)$ は、 $f(z) = (z - \alpha)^m g(z)$, $m > 1$, $g(\alpha) \neq 0$ を満たすとする。そして、 $f(z) = 0$ の解 α を求める 1 点反復解法 $z_{n+1} = \phi(z_n)$ を調べる。ただし、多重度 m は既知とする。

命題 1. 次の反復関数 $\psi(z)$ は、 $g'(\alpha) \neq 0$ のとき α に 2 次収束する。

² この方法は Hansen and Patrick と Farmer and Loizou により独立に得られ、共に 1977 年に発表された。

$$(i) \psi(z) = z - \frac{2m^2}{m-1}A_2u^2, \quad (ii) \psi(z) = z - \frac{m-1}{2A_2}.$$

証明 次の漸近公式からいえる。

$$(i) A_2u^2 = \frac{m-1}{2m^2}(z-\alpha) - \frac{m-3}{2m^3} \frac{g'(z)}{g(z)}(z-\alpha)^2 + O((z-\alpha)^3).$$

$$(ii) \frac{1}{2A_2} = \frac{f'(z)}{f''(z)} = \frac{1}{m-1}(z-\alpha) - \frac{m+1}{m(m-1)^2} \frac{g'(z)}{g(z)}(z-\alpha)^2 + O((z-\alpha)^3). \quad \square$$

Schröder 法 $\phi(z) = z - mu$ を基に 3 次の最適な 1 点反復解法を導く。

命題 2. $\phi(z) = z - mu$ と 次の $\psi(z)$

$$(i) \psi(z) = z - \frac{2m^2}{m-1}A_2u^2, \quad (ii) \psi(z) = z - \frac{m-1}{2A_2}$$

に対し

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{2}\phi'(z)[z - \psi(z)]$$

は以下の 3 次最適解法を与える。

$$(i) \Phi(z) = z - mu \left[1 - mA_2u + \frac{2m^2}{m-1}(A_2u)^2 \right]. \quad (3.1)$$

$$(ii) \Phi(z) = z - \frac{1}{2}m(m+1)u + \frac{(m-1)^2}{4A_2} \quad (\text{Osada}[3]). \quad (3.2)$$

証明 定理 1 と命題 1 から得られる。 $\phi'(z) = 1 - m + 2mA_2u$ を用いる。□

命題 3. $\phi(z) = z - mu$ と 次の $\psi(z)$

$$(i) \psi(z) = z - mu \left[\frac{1}{2}(3-m) + mA_2u \right]$$

$$(ii) \psi(z) = z - \frac{1}{2}m(m+1)u + \frac{(m-1)^2}{4A_2}$$

$$(iii) \psi(z) = z - \frac{\sqrt{mu}}{\sqrt{1-2A_2u}} \quad (\text{Ostrowski})$$

に対し

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{2}\phi'(z)[z - \psi(z)]$$

は以下の 3 次反復解法を与える。

$$(i) \Phi(z) = z - mu \left[\frac{1}{4}(m^2 - 4m + 7) + m(2-m)A_2u + m^2(A_2u)^2 \right]. \quad (3.3)$$

$$(ii) \Phi(z) = z + \frac{1}{2}m(m+1)(m-2)u - \frac{1}{2}m^2(m+1)A_2u^2 - \frac{(m-1)^3}{8A_2}. \quad (3.4)$$

$$(iii) \Phi(z) = z - mu - \frac{\sqrt{m}(1-m+2mA_2u)u}{2\sqrt{1-2A_2u}}. \quad (3.5)$$

証明 $\psi(z)$ はそれぞれ既知の 3 次反復解法であるので、定理 1 から得られる。□

命題 4. $\phi(z) = z - mu$ と $\psi(z) = z - u$ に対し

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{2}\phi'(z)\frac{z - \psi(z)}{1 - \psi'(z)} = z - \frac{\left(\frac{1}{2}(1+m) - mA_2u\right)u}{1 - 2A_2u} \quad (3.6)$$

は 3 次反復解法である。

証明 定理 3 から得られる。□

3.3. 多重解を持つ方程式の 4 次の 1 点反復解法

Traub の 3 次基本系列 $\phi(z) = z - mu \left[\frac{1}{2}(3-m) + mA_2u \right]$ を基に 4 次の最適な 1 点反復解法を導く。

命題 5. $\phi(z) = z - mu \left[\frac{1}{2}(3-m) + mA_2u \right]$ と 次の $\psi(z)$

$$(i) \psi(z) = z - \frac{2m^2}{m-1}A_2u^2, \quad (ii) \psi(z) = z - \frac{m-1}{2A_2}, \quad (iii) \psi(z) = \phi(z)$$

に対し

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{3}\phi'(z)[z - \psi(z)]$$

は以下の 4 次最適解法を与える。

$$(i) \Phi(z) = z - mu \left[\frac{1}{2}(3-m) + \frac{m}{3}(m+1)A_2u - 2m^2(A_2u)^2 + \frac{2m^3}{m-1}(2A_2^2 - A_3)u^2A_2u \right]. \quad (3.7)$$

$$(ii) \Phi(z) = z + \frac{1}{2}m(m+1)(m-2)u - m^3A_2u^2 - \frac{1}{12A_2}(m-1)^2(m-2) + \frac{A_3}{2A_2}m^2(m-1)u^2. \quad (3.8)$$

$$(iii) \Phi(z) = z - \frac{1}{12}m(3-m)(m^2 - 3m + 8)u - \frac{1}{6}m^2(4m^2 - 15m + 17)A_2u^2 - 2m^3(2-m)A_2^2u^3 + \frac{1}{2}m^3(3-m)A_3u^3 + m^4A_2A_3u^4 - 2m^4A_2^3u^4. \quad (3.9)$$

(Petković and Tričković[5])

次に $\phi(z) = z - \frac{u}{\frac{1+m}{2m} - A_2u}$ を基に 4 次の最適な 1 点反復解法を導く。

命題 6. $\phi(z) = z - \frac{u}{\frac{1+m}{2m} - A_2u}$ と 次の $\psi(z)$

$$(i) \psi(z) = z - mu, \quad (ii) \psi(z) = z - \frac{2m^2}{m-1}A_2u^2,$$

$$(iii) \psi(z) = z - \frac{m-1}{2A_2}, \quad (iv) \psi(z) = \phi(z)$$

に対し

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{3}\phi'(z)[z - \psi(z)]$$

は以下の4次最適解法を与える。

$$(i) \quad \Phi(z) = z - \frac{\left(-\frac{1}{4m}(m+1)(m-7) - 3A_2u + 3mA_2^2u^2 - 3mA_3u^2\right)u}{3\left(\frac{m+1}{2m} - A_2u\right)^2}. \quad (3.10)$$

$$(ii) \quad \Phi(z) = z - \frac{\left(\frac{m+1}{2m} - \frac{1}{6}(m+7)A_2u + \frac{2m^2}{m-1}A_2u^3(A_2^2 - A_3)\right)u}{\left(\frac{m+1}{2m} - A_2u\right)^2}. \quad (3.11)$$

$$(iii) \quad \Phi(z) = z - \frac{\left(\frac{m+1}{2m} + \frac{1}{2}(m-3)A_2u - \frac{(m-1)^2(m+1)}{24m^2A_2u} - \frac{(m-1)A_3u^2}{2A_2u}\right)u}{\left(\frac{m+1}{2m} - A_2u\right)^2}. \quad (3.12)$$

$$(iv) \quad \Phi(z) = z - \frac{\left(\frac{(m+1)(m+2)}{6m^2} - \frac{m+1}{m}A_2u + (2A_2^2 - A_3)u^2\right)u}{\left(\frac{m+1}{2m} - A_2u\right)^3}. \quad (3.13)$$

(Petković and Tričković[5])

次に定理2を用いて、4次最適解法を求める。

命題7. 次の $\phi(z)$

$$(i) \quad \phi(z) = z - \frac{1}{2}m(3-m)u - m^2A_2u^2$$

$$(ii) \quad \phi(z) = z - \frac{u}{\frac{1+m}{2m} - A_2u}$$

$$(iii) \quad \phi(z) = z - \frac{\sqrt{mu}}{\sqrt{1-2A_2u}}$$

$$(iv) \quad \phi(z) = z - \frac{1}{2}m(m+1)u + \frac{(m-1)^2}{4A_2}$$

に対し

$$\Phi(z) = z - \frac{z - \phi(z)}{1 - \frac{1}{3}\phi'(z)}$$

はそれぞれ以下の4次最適解法を与える。

$$(i) \Phi(z) = z - \frac{m \left(\frac{1}{2}(3-m) + mA_2u \right) u}{\frac{1}{6}(4-m)(m+1) - m(1-m)A_2u + m^2A_3u^2 - 2m^2A_2^2u^2}. \quad (3.14)$$

$$(ii) \Phi(z) = z - \frac{3 \left(\frac{1+m}{2m} - A_2u \right) u}{\frac{(2m+1)(m+1)}{2m^2} - 3 \frac{m+1}{m} A_2u + 3A_3u^2}. \quad (3.15)$$

(Farmer and Loizou[1])

$$(iii) \Phi(z) = z - \frac{3\sqrt{m}u(1-2A_2u)}{2(1-2A_2u)\sqrt{1-2A_2u} + \sqrt{m}(1-3A_2u+3A_3u^2)}. \quad (3.16)$$

$$(iv) \Phi(z) = z - \frac{\frac{1}{2}m(m+1)u - \frac{1}{4A_2}(m-1)^2}{\frac{1}{2}(m+1) - \frac{1}{3}m(m+1)A_2u + \frac{A_3}{4A_2^2}(m-1)^2}. \quad (3.17)$$

4. 数値例

前節で導いた解法の有効性を数値例を用いて検証する。テスト問題は、多重度の異なる表4.1の4問を用いる。比較のため Traub の3次基本系列(例4(i))、Hansen and Patrick 法(例4(ii))、Ostrowski 法、Traub の4次基本系列(例5)も取り上げる。

表4.1. テスト問題

$f(z)$	m	α	z_0
$(z^2 - 2z + 2)^2(z^2 + 2z + 3)^3$	2	$1+i$	$2+2i$
$(z^2 - 2z + 2)^2(z^2 + 2z + 3)^3$	3	$-1 + \sqrt{2}i$	$-2+2i$
$(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 3)^4$	4	$-1 + \sqrt{2}i$	$-2+2i$
$(z^2 - 2z + 2)^{2.5}(z^2 + 2z + 3)$	2.5	$1+i$	$2+2i$

計算は fortran90(Fortran Power Station) を用いて、複素倍精度で行なう。以下の表では、

$$|z_n - \alpha| < 10^{-15}$$

を満たす最小の n とそのときの誤差の絶対値 $|z_n - \alpha|$ を示す。表において exact は、誤差0を表す。

表 4.2. 3 次最適解法 (命題 2,3,4)

formula	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2.5$
例 4 (i)	5 exact	4 exact	4 $.22 \times 10^{-15}$	4 exact
例 4 (ii)	5 exact	4 exact	4 exact	4 exact
Ostrowski	4 exact	4 $.22 \times 10^{-15}$	3 exact	4 exact
(3.1)	5 exact	4 $.22 \times 10^{-15}$	4 exact	4 exact
(3.2)	6 $.11 \times 10^{-15}$	5 $.22 \times 10^{-15}$	4 $.22 \times 10^{-15}$	5 exact
(3.3)	5 exact	4 $.22 \times 10^{-15}$	4 $.22 \times 10^{-15}$	4 exact
(3.4)	5 $.11 \times 10^{-15}$	4 $.31 \times 10^{-15}$	4 $.22 \times 10^{-15}$	4 $.11 \times 10^{-15}$
(3.5)	4 $.50 \times 10^{-15}$	4 $.22 \times 10^{-15}$	4 $.22 \times 10^{-15}$	4 exact
(3.6)	4 exact	3 $.31 \times 10^{-15}$	3 exact	3 exact

表 4.3. 4 次最適解法 (命題 5,6)

formula	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2.5$
例 5	4 $.11 \times 10^{-15}$	4 $.22 \times 10^{-15}$	3 exact	4 exact
(3.7)	4 $.25 \times 10^{-15}$	4 $.50 \times 10^{-15}$	3 exact	4 exact
(3.8)	5 exact	4 $.50 \times 10^{-15}$	3 exact	4 $.22 \times 10^{-15}$
(3.9)	4 $.11 \times 10^{-15}$	4 $.22 \times 10^{-15}$	3 $.22 \times 10^{-15}$	4 exact
(3.10)	4 exact	3 $.40 \times 10^{-15}$	3 $.22 \times 10^{-15}$	3 exact
(3.11)	4 exact	3 exact	3 exact	3 exact
(3.12)	4 exact	3 $.31 \times 10^{-15}$	3 $.22 \times 10^{-15}$	4 exact
(3.13)	4 exact	3 $.25 \times 10^{-15}$	3 exact	3 exact

表 4.4. 4 次最適解法 (命題 7)

formula	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2.5$
(3.14)	4 exact	3 $.50 \times 10^{-15}$	3 exact	3 $.90 \times 10^{-15}$
(3.15)	4 exact	3 $.22 \times 10^{-15}$	3 $.22 \times 10^{-15}$	3 exact
(3.16)	3 $.11 \times 10^{-15}$	3 $.22 \times 10^{-15}$	3 $.22 \times 10^{-15}$	3 exact
(3.17)	4 $.50 \times 10^{-15}$	4 $.31 \times 10^{-15}$	3 $.22 \times 10^{-15}$	4 exact

これらの表から以下のことがいえる。

- 3.2 節で得られた解法はすべて、表 4.1 の方程式に対し要求精度の範囲内の解を与えている。
- 3 次最適解法の中で最良の結果を与えるものは、Schröder 法を Newton 法で改良した (3.6) である。
- 4 次最適解法の中で最良の結果を与えるものは、Ostrowski 法に定理 2 を適用して得られる (3.16) である。
- 定理 1 において $\psi(z) = z - (m-1)/(2A_2)$ として得られる解法 - (3.2) と (3.8) - は、収束次数が同じ他の解法に比べ精度が少し劣る。
- 定理 1 において $\phi(z) = z - mu$ とし $\psi(z)$ を $f(z), f'(z), f''(z)$ を用いる 2 次または 3 次解法とすると、得られる解法は 3 次最適解法である。 $\psi(z)$ が 3 次解法のときは、得られる解法の数値結果は $\psi(z)$ の結果に似ているが、演算量の点で $\psi(z)$ に劣る。

5. おわりに

定理 1, 2, 3 は、収束次数の異なる反復法の間の相互関係を明らかにするとともに、既知の反復法から、新しい高次の反復法を導出する。今回は、これらの定理を多重解を持つ方程式の 1 点反復解法に適用した。これ以外の反復法への適用は今後の課題である。

参考文献

- [1] M. R. Farmer and G. Loizou, An algorithm for the total, or partial, factorization of a polynomial, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 82(1977), 427-437.
- [2] E. Hansen and M. Patrick, A family of root finding methods, Numer. Math. 27(1977), 257-269.
- [3] N. Osada, An optimal multiple root-finding method of order three, J. Comput. Appl. Math. 51(1994), 131-133.
- [4] A. M. Ostrowski, *Solution of Equations in Banach Spaces* (Academic Press, New York, 1973)
- [5] M. S. Petković and S. Tričković, On zero-finding methods of the fourth order, J. Comput. Appl. Math. 64(1995), 291-294.
- [6] E. Schröder, Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, Math. Ann. 2(1870), 317-365.
- [7] J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations* (Chelsea, New York, 2nd ed. 1982)