

## 渦層の運動の離散渦法による解析

名大工学部 王 魯濱 (Wang Lubin)

名大工学部 桑原 真二 (Kuwabara Shinji)

名大工学部 金田 行雄 (Kaneda Yukio)

## 1 序

渦層についての数値解析は、渦系近似法がよく用いられている。よく知られているように、Rosenhead (1931) の研究によって最初にこの方法を与えられた。しかし、この方法の不備が Birkhoff (1959) によって指摘され、実際に Takami (1964) は飛行機の翼から出る渦層の渦巻の計算にこの方法を用いたが、渦層の特異点となるところで、なめらかな spiral は観測されず、渦系がカオス的な動きとなってしまう。その後渦系近似法の研究が、いろいろと進められてきた。その中で、Van de Vooren (1980) は、Birkhoff の方程式の Cauchy 主値の被積分関数の正則化によって、離散化を行なった。近年のこの方面の研究は、代表的なものとして、Higdon & Pozrikidis (1985) と Krasny (1986) の研究である。ここでは、離散渦法と名付ける方法を利用して

完全流体における二次元の渦層の運動を数値的に解析した。  
 この離散渦法は、渦層を有限個の微小弧(arc)によって近  
 似するもので、各々の微小弧は、その中心点での位置、傾斜  
 及び曲率によって代表される。渦層の連続性を考慮して、傾  
 斜と曲率を取り入れるものがあるが、それによって、なめら  
 かな spiral が期待される。そして、時間発展とともに、ある  
 点のまわりに渦度が高度集中するもので、したがって、微小  
 弧の再分割化を行なう。

## 2 離散化

完全流体における二次元渦層によって誘起される速度場  
 は、Birkhoff の方程式で表される。ここでは、Lagrangian 記述  
 法を用いて書く。

$$\frac{D}{Dt} z(z, t) = \frac{i}{2\pi} \int \frac{\gamma(z', t)}{\bar{z}(z, t) - \bar{z}(z', t)} dz' \quad (2.1)$$

$z(z, t) = x(z, t) + i y(z, t)$ ;  $\bar{z}$  は  $z$  の共役複素数

$z$ : Lagrangian parameter. 初期の長さ parameter.

$\int$ : Cauchy 主値.

渦層を  $n$  個の微小弧に分けて、それらに通し番号をつけ  
 る。1 番目の微小弧の Lagrangian 位置座標を  $z_0$  とし

$$z(z, t) = \sum_p A(z, p) \left\{ z_p + D z_p (z - z_p) + \frac{1}{2} D^2 z_p (z - z_p)^2 + \dots \right\}$$

$$\gamma(\xi, t) = \sum_l \Delta(\xi, l) \left\{ \gamma_l + D\gamma_l(\xi - \xi_l) + \frac{1}{2} D^2\gamma_l(\xi - \xi_l)^2 + \dots \right\}$$

∴ ∴

$$\Delta(\xi, l) = \begin{cases} 1, & \text{for } \xi \in l\text{-th arc;} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Z_l = z(\xi_l, t), \quad D^2 Z_l = \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} z(\xi, t) \right]_{\xi = \xi_l}$$

$$\gamma_l = \gamma(\xi_l, t), \quad D^2 \gamma_l = \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \gamma(\xi, t) \right]_{\xi = \xi_l}$$

(2.1)の両辺に、 $\delta(\xi - \xi_l)$  をかける、 $\xi$  について積分ある

ことにより、離散方程式を導く。得られた基礎離散方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} Z_l &= \frac{i}{2\pi} \sum_{l' \neq l} \left[ \frac{P_{l'}}{\bar{Z}_l - \bar{Z}_{l'}} + \frac{D\bar{Z}_{l'}}{(\bar{Z}_l - \bar{Z}_{l'})^2} P P_{l'} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2} \frac{D^2 \bar{Z}_{l'}}{(\bar{Z}_l - \bar{Z}_{l'})^2} + \frac{D\bar{Z}_{l'}}{(\bar{Z}_l - \bar{Z}_{l'})^3} \right\} P^2 P_{l'} \right] \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \frac{1}{D\bar{Z}_l} \left\{ (D\gamma_l - \frac{1}{2} \gamma_l \frac{D^2 \bar{Z}_l}{D\bar{Z}_l}) \lambda_l - \frac{1}{48} D^2 \gamma_l \frac{D^2 \bar{Z}_l}{D\bar{Z}_l} \lambda_l^3 \right\}. \end{aligned}$$

(2.2)

である。∴ ∴ は、 $\lambda_l$  は  $l$  番微小弧の初期の長さである。 $P_l$ 、

$P P_l$  と  $P^2 P_l$  は次のように定義されている。

$$P_l = \int \gamma(\xi, t) \Delta(\xi, l) d\xi$$

$$P P_l = \int \gamma(\xi, t) \Delta(\xi, l) (\xi - \xi_l) d\xi$$

$$P^2 P_l = \int \gamma(\xi, t) \Delta(\xi, l) (\xi - \xi_l)^2 d\xi$$

近似的に  $P_e$ ,  $DP_e$  と  $D^2P_e$  は次のようになる。

$$P_e \cong \sigma_e \lambda_e + \frac{1}{24} D^2 \sigma_e \lambda_e^3$$

$$DP_e \cong \frac{1}{12} D \sigma_e \lambda_e^3$$

$$D^2P_e \cong \frac{1}{12} \sigma_e \lambda_e^3$$

傾斜及び曲率の計算については、(2.2)式同様に行われるが、スキームが不安定である故に、実用的ではない。ここでは、渦層の連続性を条件に、中心差分法を用いることにした。

$$DZ_e = \frac{2[(\lambda_{e-1} + \lambda_e)^2 Z_{e+1} - (\lambda_{e+1} + \lambda_e)^2 Z_{e-1} - \{(\lambda_{e-1} + \lambda_e)^2 - (\lambda_{e+1} + \lambda_e)^2\} Z_e]}{(\lambda_{e-1} + \lambda_e)(\lambda_{e+1} + \lambda_e)(2\lambda_e + \lambda_{e+1} + \lambda_{e-1})} \quad (2.3)$$

$$D^2Z_e = \frac{8[(\lambda_{e-1} + \lambda_e)Z_{e+1} + (\lambda_{e+1} + \lambda_e)Z_{e-1} - (2\lambda_e + \lambda_{e+1} + \lambda_{e-1})Z_e]}{(\lambda_{e-1} + \lambda_e)(\lambda_{e+1} + \lambda_e)(2\lambda_e + \lambda_{e+1} + \lambda_{e-1})} \quad (2.4)$$

(2.3)、(2.4)そして(2.2)は、離散渦法における基礎的な3つの離散式で、実際の計算では(2.2)式を4次のルンゲークッタ法を利用して、得られた  $Z_e$  を用いて、(2.3)式及び(2.4)式の計算を行ない、傾斜及び曲率を計算する。

### § 3 初期値及び計算の途中処理

### 3.1 初期値.

初期のモデルとして、次のような曲線で表される渦層を用いる。

$$r = 1 + \epsilon \cos(m\theta).$$

$(r, \theta)$  は極座標である。

この曲線と Circulation density  $\gamma(s, t)$  を一様に分布させて、 $\epsilon$  と  $m$  をいろいろな値を代入して、この曲線で代表される渦層の運動を追跡して与える。初期値の処理については、曲線の全長を Double Exponential Formula によって計算されて、そして、微小弧の代表点の位置座標を Fehlberg 公式を用いて計算されている。

### 3.2 微小弧の伸縮についての処理.

計算の初期に微小弧の個数を有限個取って、計算をはじめるが、しかし、渦層の運動にともなう、各々の微小弧は伸縮し、Circulation density も著しく変化がある。したがって、渦度の変化にともなう、微小弧の再分割化をしなければならぬ。Kelvin の循環定理から、各々の微小弧の循環  $\Gamma$  は、保存量であり、

$$\Gamma_0 = \int_{s \in \text{arc}} \gamma(s, t) ds = \gamma_0 \Delta s$$

のように書ける。

$$\gamma(z, t) \cong \frac{\gamma_0 \lambda_0}{S(z, t)}$$

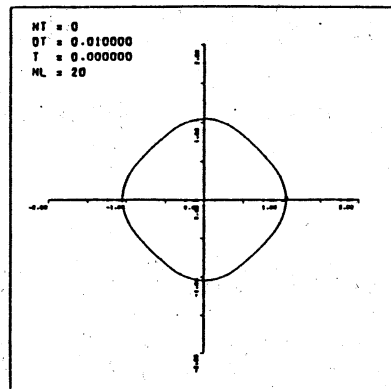
ここで  $\gamma_0$  と  $\lambda_0$  は前述のように初期の ( $t=0$ ) 1 番目の *Circulation density* と微小弧の長さであり、 $\gamma(z, t)$  と  $S(z, t)$  は時間  $t$  での 1 番目微小弧の *Circulation density* と長さである。したがって、時間発展により  $S(z, t)$  が変化し、それによって  $\gamma(z, t)$  も変化する。実際によく知られてるように、特異点のまわりに渦度が集中する。ここには、再分割化を行なうことによって渦層の運動の迹跡をさらに進むようにする。再分割の条件によりは、時間  $t$  での微小弧の長さと曲率半径を  $S_t$  と  $\rho_t$  とする。  $S_t > \rho_t$  となる時点で 1 番微小弧を二分し、そして相応する時間間隔を縮小する。

#### §4 結果

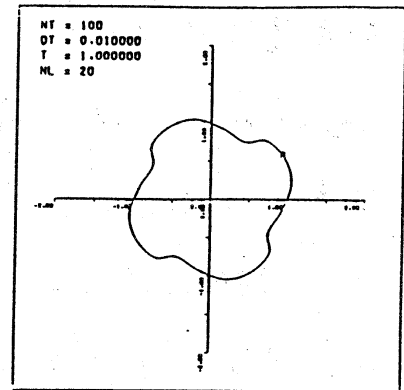
計算は、 $z = 1 + \epsilon \cos(m\theta)$  の中に、 $\epsilon$  と  $m$  によりいくつか行ないましたが、附録の図は  $\epsilon = 0.01$ ,  $m = 4$  の場合である。Fig. 1 は、上の 4 図はそれぞれ、初期、分割前、分割後そして計算の最後の結果である。そして図 (c) と図 (d) は図 (a) のまわりの部分の拡大図であり、線上のマークは、微小弧の個数を表わしている。そこから分かるように、この場合に、特異点が 4 つ表われ、それは、*spiral* となっている。さらに、渦度が

分布について、附録の Fig. 2 である。初期に一様分布の渦度が特異点に高度集中あることが分かる。図は、 $x$  軸が *Circulation density* を *logarithmic scale* で描いたもので、 $y$  軸が渦層に沿って測った長さである。

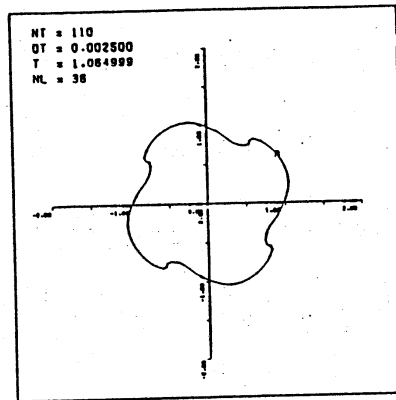
以上は、離散渦法を用いたの初歩的な計算で、結論としては、さらにスキームを改良し、そして特異点が発現するまでの *critical time* などを特定する必要があるが、ここでは、とりあえず、この方法で、かなり目に見える *spiral* が現れ、特異点が発現するまでのシミュレーションができたと思われる。特異点の *critical time* などの解析を含めて、特異点後、いかに、解析すればよいとの問題は残りの課題である。



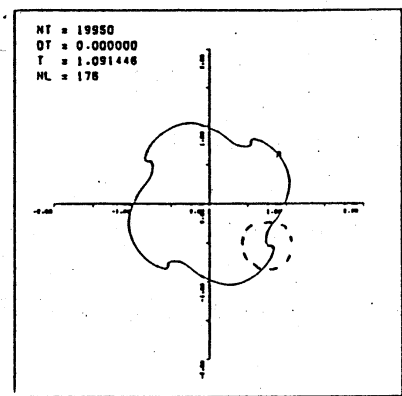
(a)



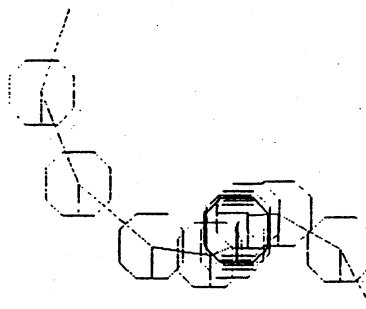
(b)



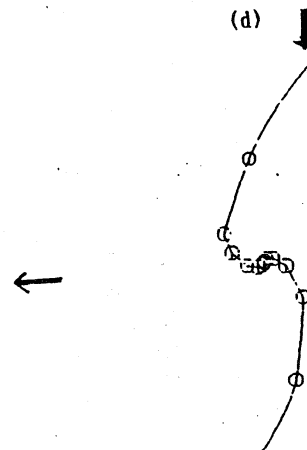
(c)



(d)

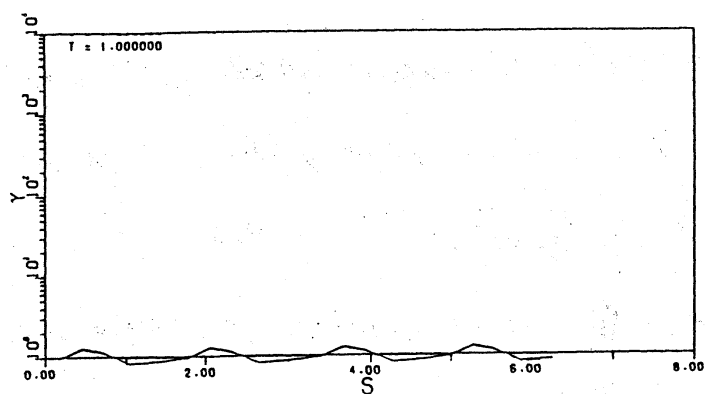


(f)

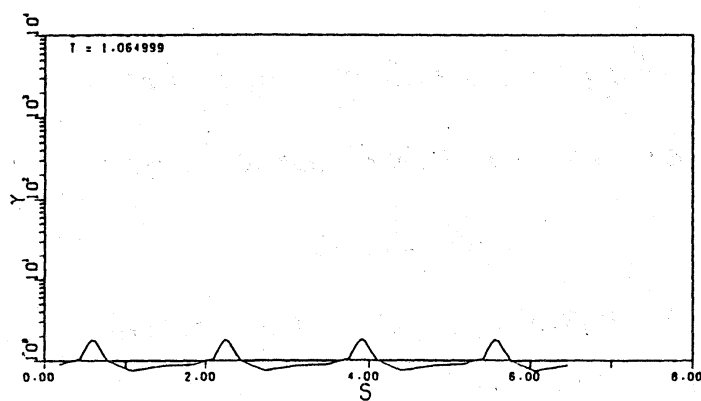


(e)

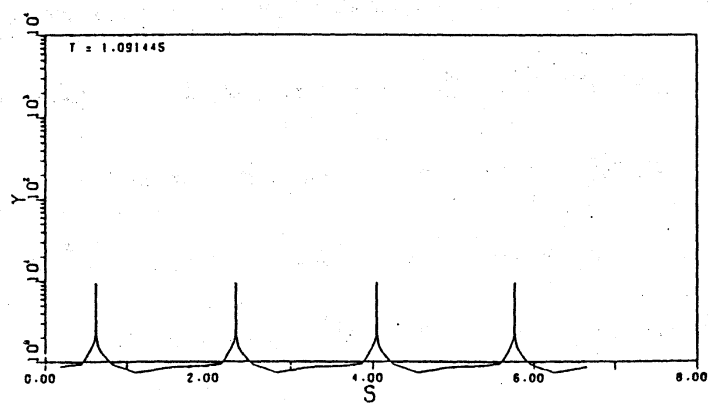
Fig. 1  $m=4$ ,  $\varepsilon=0.01$ . (a)初期の状態 (b)分割直前  
(c)分割直後 (d)最後の状態  
(e, f) singular point の拡大図



分割直前



分割直後



最後の状態

Fig.2  $m=4$ ,  $\varepsilon=0.01$ . について circulation density  $\gamma$  と curve length  $s$  についてのグラフ. ( $\gamma$  は logarithmic scale)

文献

1. Birkhoff, G. 1959. Do vortex sheets roll up?

Rend. Circ. Mat. Palermo ser. 2d, 77

2. Higten, J. J. L. & Pozrikidis, C. 1985

The self-induced motion of vortex sheets.

J. F. M. vol. 150, 203

3. Krasny, R. 1986.

A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation.

J. F. M. vol. 167, 65

4. Saffman, P. G. & Baker, G. R. 1979 Vortex interactions

Ann. Rev. F. M. vol. 11, 85

5. Takami, H. 1964 A numerical experiment with

discrete vortex approximation reference to the rolling up of a vortex sheet.

Stanford Univ. Dept. Aeronaut. Eng. Rep. 202

6. van de Vooren, A. I. 1980. A numerical investigation of the rolling up of vortex sheets.

Proc. R. Soc. Lond. A373, 67