

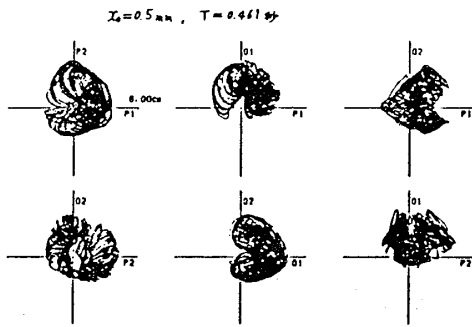


図 3

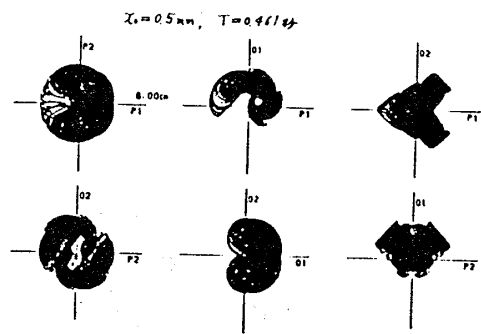


図 4

しては実験と同様なカオスの挙動が現れた(図4参照)。しかし実験の場合と異なり, x_0 を固定して T を少しずつ変えていくとカオスの挙動と規則的挙動が交互に何回かずつ現れる。この差異の原因としては (i) 実験における T の一定性が不充分, (ii) 理論において高次の非線形項を無視している, (iii) 理論において減衰率 α を一定としている, 等が考えられるが, いまのところ未解決である。

Onset of Chaotic Convection in Low Prandtl Number Fluids

広島大・理 八 幡 英 雄

2枚の平行平板間に閉じこめられた流体を下から加熱した時発生する熱対流運動を, 常微分方程式系の模型を用いて考察した¹⁾。流体は直方体容器に容れられているとし, 水平方向に x , y 軸, 垂直方向に z 軸をとり, さらに容器の縦横比を Γ_x , Γ_y とする。流体の高さを d , 温度伝導率を κ としたとき, 長さ・時間の尺度因子として d , d^2/κ を用いると, 無次元化された運動方程式は速度 $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$, 温度 θ に対して Boussinesq 近似の範囲で,

$$\partial_t u_i - \sigma \Delta u_i - \sigma \lambda_i \theta + \partial_i \left(\frac{\partial p}{\rho_0} \right) = -u_j \partial_j u_i, \quad (i = x, y, z) \quad (1)$$

$$\partial_t \theta - \Delta \theta - R \lambda_j u_j = -u_j \partial_j \theta, \quad \lambda = (0, 0, 1) \quad (2)$$

$$\partial_j u_j = 0 \quad (3)$$

となる。ここで体系は方程式に含まれる Rayleigh 数 R と Prandtl 数 σ , および境界条件に含まれる縦横比 Γ_x, Γ_y の合計 4 個のパラメタによって特徴づけられている。今容器の形状は条件 $\Gamma_x < \Gamma_y$ を満たすものとし、発生する対流の空間パターンは x 軸方向を軸とするロールとする。これを表現するため速度場を 2 個の渦変数 ζ_1, ζ_2 の重ね合せの形にかく：

$$u_x = \partial_y \zeta_2, u_y = -\partial_z \zeta_1 - \partial_x \zeta_2, u_z = \partial_y \zeta_1. \quad (4)$$

さらに ζ_1, ζ_2, θ を容器の壁で所要の境界条件をみたす適当な直交函数系で展開して、そのモード振幅 $c_k(t)$ の時間発展を記述する Galyorkin 方程式系

$$\partial_t c_k = \sum_l L_{kl} c_l + \sum_{l,m} N_{k;l,m} c_l c_m \quad (5)$$

をみちびく。取り入れたモード変数は、ロールの空間構造を基本モードとして、 x 方向（ロールの軸方向）に 3 倍まで、 y 方向に 2 倍まで、 z 方向に 2 倍までのそれぞれ空間的高調波成分を含めると、全体で 48 変数（これを X^+ とかく）の常微分方程式系を得る。さらに x 方向に上記 48 変数とは反対の空間的対称性をもつモード変数（これを X^- とかく）を含めると、全体で 96 変数の常微分方程式系を得る。(5)はこれらの変数 X^+, X^- に対してはその空間的対称性により次の形をとる：

$$\begin{aligned} \partial_t X^+ &= L(X^+) + N(X^+, X^+) + N(X^-, X^-), \\ \partial_t X^- &= L(X^-) + N(X^+, X^-). \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $L(\cdot), N(\cdot, \cdot)$ はそれぞれ線型項・非線型項を示す。この方程式系の解の性格を、Prandtl 数が比較的小の場合すなわち $\sigma < 1$ に対して、数値的時間積分および線型安定性解析によってしらべ次のような結果を得た²⁾。

(1) $\Gamma_x = 2, \Gamma_y = 4$ で基本流が 4 個のロールからなる場合に、 $\sigma = 0.5$ で熱伝導状態から分岐する定常ロール流は変数 X^+ からなる。次に R を一定にして σ を下げたとき、不安定化する複素数振動モードは X^- に属するが、 $\sigma = 0.5$ を一定にして R を上げたとき不安定化する複素数振動モードは X^+ に属する。同様な結果は、 $\Gamma_x = 1.2, \Gamma_y = 2.4$ で基本流が 2 個のロールからなる場合にも得られる。これらの場合振動対流は Hopf 分岐により生ずると考えられる。まずモード変数 X^- が不安定化する場合、基本振動数を f_1 とすると X^-, X^+ はそれぞれ振動数成分 $(2n-1)f_1, 2nf_1$ ($n = 1, 2, \dots$) を含むが、どのような機構によって全体系のモード変数 X^+, X^- が同期運動を行うようになるか、この模型によって説明することはできない。他方 X^+ が不安定化する場合は、部分変数 X^+ だけで実効的に閉じた力学系を構成し、一

つの計算例では、周期的運動は R の増加に伴って準周期的運動に分岐し、これが周期倍分岐を起して非周期的運動を発生するという典型的なカオスへの径路を示す。

(2) $\Gamma_x = 1.2$, $\Gamma_y = 2.4$, 基本流が2個のロールの場合, R を増加させたとき定常対流状態から実数モードが不安定化して周期的運動を発生するという計算例を得た。この場合周期的運動の振動数は, R を定常状態に向けて下げるにつれ次第に0に近づいている。したがって, 定常状態と周期的運動状態の間は, 何らかの形のカオス状態となっているが, その詳細はまだ明らかではない。同じような周期的運動発生現象は, Behringer らによってヘリウムを用いた実験において観測されている。

- 1) H. Yahata, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 79 (1984), 26.
- 2) H. Yahata, "Evolution of the Convection Rolls in Low Prandtl Number Fluids" (preprint).
- 3) R. P. Behringer, Rev. Mod. Phys. 57 (1985), 657.

ベナール対流系のモード競合による対称スパイラル・カオス

東北大・通研 佐野雅己, 沢田康次

Bénard 対流系の容器のアスペクト比(縦横比)とレーリー数を変化させることにより, 2つのモード(Oscillatory mode と Stationary mode)の不安定性が競合するパラメーター領域を見い出した。そのような領域では, 分岐理論で Codimension 2 の分岐と呼ばれる, より高次元の分岐現象の存在が理論的に予測されており, Codimension 1 の分岐に比べ非常に豊かな構造を持つとされている。一般に解の local な分岐に加えて, 系の非線形性の global な性質が組み合わされ様々のカオスが生ずることは, よく知られている。Codimension 2 の分岐は local な現象であるが, 非線形性と大域的性質を考慮したとき, どのようなストレンジ・アトラクターが生ずるかは興味ある点である。その意味でこれは, より複雑なカオス現象, より高次元のアトラクターに対するアプローチの第1歩である。

Bénard 対流系でレーリー数を上昇させてゆくと, 系は最適な波長を選択するため, 有限系ではロールの個数が増加する。この転移には, ヒステリシスの伴う場合と伴わない場合がある