

有限群の作用と Cartan subalgebra

都立大・理 関根義浩 (Yoshihiko Sekine)

§0. まえがき

[1] において, Jones-Popa は, II_1 -factor の MASA に関する興味深いいくつかの結果をえている。その中で, AFD type II_1 factors $R \supset R_0$ が "良" inclusion のとき (群作用からさまるとき), いつ共通の Cartan subalg. をもつか? という問題の必要十分条件を与えている。この結果が群作用から決まる一般の AFD factors の pair に対してどうなるか? というのを調べるのが目的である。

[1] におけるその他の結果やそれに関連する π と, また index theory との関連などについては, それぞれの文献を見ていただきたい。

§1. 準備

結果を述べるのに必要な作用の分類について復習する。ここでは結果のみで, 細かい定義やその意味については, 原論文を見ていただきたい。また, II_1 の時には, 作用の分類のさきかげりながら Connes, Jones の結果もあるが, ここでは, Ocneanu の結果のみを書いておく。

ii) type II case (A. Ocneanu)

M : AFD type II factor

G : discrete amenable group

$\alpha: G \rightarrow \text{Aut } M$ action

$\exists \tau$, α a cocycle conjugacy a complete invariant if

$$(N(\alpha), \chi = [\lambda, \mu], \text{mod})$$

$$\tau = \tau', \quad N(\alpha) = \alpha^{-1}(\text{Int } M)$$

$\chi = [\lambda, \mu]$: characteristic invariant

$\text{mod}: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ homomorphism

$$\tau \cdot d_g = (\text{mod } d_g) \tau, \quad \tau: \text{trace on } M$$

iii) type III case (河東・Sutherland・竹崎)

M : AFD type III factor

G : discrete amenable group (III_λ , $\lambda \neq 1$ finite or abelian)

$\alpha: G \rightarrow \text{Aut } M$ action

$\exists \tau$, complete invariant if

$$(N(\alpha), \chi = [\lambda, \mu], \nu, \text{mod})$$

$$\tau = \tau', \quad N(\alpha) = \alpha^{-1}(\text{Cent } M)$$

$\chi = [\lambda, \mu]$: characteristic invariant

ν : modular invariant

mod : Connes・竹崎 module

§2. 結果

まず最初に, III型との比較のために, AFD type II_1 factor に対する結果を述べておく.

定理 (Jones - Popa)

R : AFD type II_1 factor

G : 有限群

$\alpha : G \rightarrow \text{Aut } R$ outer action

に対して, 次のことが成り立つ

(1) $R \rtimes_\alpha G \supseteq R$ は (1) $\alpha \in \mathcal{E}$) common Cartan subalg. を持つ

(2) $R \supseteq R^\alpha$ が common Cartan subalg. を持つ必要十分条件は

G : abel

AFD type II_∞ factor $R_{\infty,1}$ に対しては, 上と同じ statement が成り立つ. 実際は,

$\alpha : G \rightarrow \text{Aut } R_{\infty,1}$ outer action of finite group

とすれば, Ocneanu の結果から

$$R_{\infty,1} \rtimes_\alpha G \quad (R \rtimes_\beta G) \otimes B(H)$$

$$\text{vii} \quad \cong \quad \text{vi}$$

$$R_{\infty,1} \quad R \otimes B(H)$$

$$R_{\infty,1} \quad R \otimes B(H)$$

$$\text{vii} \quad \cong \quad \text{vii}$$

$$(R_{\infty,1})^\alpha \quad R^\beta \otimes B(H)$$

となることを示すのである。 $\alpha = \beta$ 。 β は unique outer action of G on R 。

Ⅲ型に対しては、次のことが成り立つ。

定理

M : AFD type III factor

G : finite group

$\alpha : G \rightarrow \text{Aut } M$ outer action

に対して、次のことが成り立つ。

(1) $M \rtimes_{\alpha} G \cong M$ が common Cartan subalg. である必要十分条件は

$$N(\alpha) = \{e\} \quad (e \text{ は } G \text{ の unit})$$

(2) $M \cong M^{\alpha}$ が common Cartan subalg. である必要十分条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} G : \text{abel} \\ \text{mod } \alpha_g = 1, \quad g \in G \\ \lambda(g, h) = 1, \quad g \in G, h \in N(\alpha) \end{array} \right.$$

Ⅱ型とⅢ型の本質的な差は、outer action の“種類”が異なることである。 Jones の結果から、有限群 G の R への作用は一意的であるが、Ⅲ型 factor M への作用は、上の invariant を与えるだけ（あるいは一意ではなく、“Ⅲ型的”な作用が存在する（ただし、Ⅱ型以外の場合））。

一般に、Ⅲ型 factors の pair $M \cong N$ が common Cartan

subalg. をもつとき, その flow spaces X_M, X_N の間には $X_M \cong X_N$ なる関係 (quotient をとるのと同じ) があり, この性質に対応するのが定理の条件である.

証明の idea は, 与えられた pair に conjugate である common Cartan subalg. をもつ model を作ることにあり, 作用の分類結果に深く依存している. また, 接合積と不動点, お互いに "dual" な関係になり, 結局 $\cong$ である, index theoretic な duality を意味する次の事実が証明の key となる.

M : AFD factor

G : finite abelian group

$\alpha: G \rightarrow \text{Aut } M$ outer action

に対して,

$$\begin{array}{ccc} M & & (M \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \\ \cong & & \cong \\ M^{\alpha} & & M \rtimes_{\alpha} G \end{array}$$

注意.

群 G が無限群であるときは, 接合積と不動点の間には本質的な "差" が生じ, 同時に扱うことはできない. 上の証明の idea から, 接合積に関しては discrete amenable group に関して (IV₁ のときは abel を仮定して) 必要十分条件がわかる.

§ 3. example

次の example は、典型的な “III 型の” 作用の例である。

M : AFD type III $_{\lambda}$ factor, $0 < \lambda < 1$

$\varphi \in M_+^*$: faithful state such that

$$\sigma_T^{\varphi} = 1, \quad T = -2\pi / \log \lambda$$

$n \in \mathbb{N}$: fix

$$G = \mathbb{Z}_n$$

$\alpha: G \rightarrow \text{Aut } M$ outer action

$$\alpha^i = \sigma_{\frac{i}{n}T}^{\varphi}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

とすると、 $\alpha \neq \text{id}$ 。

$$N(\alpha) = G \cdot \mathbb{Z}_n$$

$$\lambda = \mu = 1$$

$$\nu(i) = \frac{i}{n} T$$

$$\text{mod } \alpha^i = 1$$

であるから、 $M \cong M^{\alpha}$ は common Cartan subalg. である。

$M \rtimes_{\alpha} G \cong M$ は ほとんど常に、 $\cong \{n, X_{M \rtimes_{\alpha} G}, X_M, X_{M^{\alpha}}\}$

それそれ $M \rtimes_{\alpha} G, M, M^{\alpha}$ の flow spaces とする。次の

“大小関係” がある。

$$X_{M \rtimes_{\alpha} G} = X_M \times \{1, 2, \dots, n\}$$

$$X_{M^{\alpha}} = X_M \times \{1, 2, \dots, n\}$$

これは 接合積 と 不動点 が "dual" な関係にあることの意味である。

References

- [1] V. Jones and S. Popa : Some properties of MASA's in factors , Operator Theory : Adv. Appl. 6 , Birkhäuser Verlag , Basel-Boston , 1982 , 89 - 102 .
- [2] A. Ocneanu : Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras , Springer Lecture Notes in Math. No. 1138 .
- [3] C. Sutherland - M. Takesaki : Actions of discrete amenable groups on injective factors of type III_λ , $\lambda < 1$. Pacific J. Math. 137 (1989) . 404 - 444 .
- Y. Kawahigashi - C. Sutherland - M. Takesaki : The structure of the automorphism group of an injective factor and the cocycle conjugacy of discrete abelian group actions , preprint .
- [4] J. Feldman - C. Sutherland - R. Zimmer : Subrelations of ergodic equivalence relations , Ergod. Th. & Dynam. Sys. 9 (1989) 239 - 269
- [5] T. Hamachi - H. Kosaki : Orbital factor map . preprint .