

音場弾性場連成問題におけるトポロジー最適化について

名古屋大学大学院・工学研究科 飯盛浩司

Hiroshi Isakari

Graduate School of Engineering, Nagoya University

1 緒言

与えられた体積の上限の下で最も高い剛性を持つ弾性材料の最適配置問題の解法として提案されたトポロジー最適化法 [1] は、近年ではその適用範囲を種々の物理現象に支配される領域における最適設計問題へと拡大している。音響材料の最適設計に限っても、吸音材やフォノンニック結晶などのトポロジー最適化法が提案されている (例えば [2, 3] など)。これまでに開発された音響材料のトポロジー最適化においては、最適化アルゴリズムにおいて必要となる偏微分方程式の境界値問題の求解に有限要素法 (FEM) を用いるものがほとんどである。音響問題などの波動問題はしばしば無限遠を含む領域において定義されることから、その解法として FEM ではなく境界要素法 (BEM) を用いることが適当である場合も多い。さらに、(トポロジー) 最適化問題においては領域の形状を逐次変更しながら偏微分方程式を多数回解く必要があることから、メッシュの生成コストの面からも境界要素法は魅力的である。そこで、著者らはこれまでに種々の波動問題に支配される場における最適設計問題に対して、境界要素法を用いたトポロジー最適化法を提案してきた。これまでの研究で、トポロジー最適化においては、高速直接解法により加速した境界要素法が有効であることが分かってきた。本稿では、吸音材のトポロジー最適化を念頭におき、音場弾性場連成問題を例に挙げ、著者らの開発した手法について解説する。

2 音場・弾性場連成問題の基礎方程式とその数値解法について

2.1 問題の定義

$\mathbb{R}^2 = \overline{\Omega_F \cup \Omega_S}$ を考える。ここに、 Ω_S は弾性体が満たされた有限の大きさの領域、 Ω_F は圧縮性非粘性流体が満たされた領域で無限遠を含む。以降、本論文では平面ひずみ状態を仮定して数式を記述する。入射音波 p^{in} が弾性体により散乱される問題を考える。このとき、 Ω_F における全音圧 p 及び Ω_S における変位 $\mathbf{u}$ は以下の連成境界値問題に支配される。

$$p_{,jj}(\mathbf{x}) + k_F^2 p(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_F \quad (1)$$

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho_S \omega^2 u_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_S \quad (2)$$

$$t_i(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in S := \partial\Omega_F \cap \partial\Omega_S \quad (3)$$

$$q(\mathbf{x}) := \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \rho_F \omega^2 u_i(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in S \quad (4)$$

$$\text{Radiation condition for } p(\mathbf{x}) - p^{\text{in}}(\mathbf{x}) \text{ as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (5)$$

ここに、 $\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}u_{k,\ell}(\mathbf{x})$ は応力、 C_{ijkl} は弾性テンソルであり、等方性材料に対しては以下の表現を持つ。

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \quad (6)$$

ここに、 λ 、 μ は Lamé 定数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。Lamé 定数と Young 率 E 、Poisson 比 ν との間には次の関係がある。

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7)$$

$t_i(\mathbf{x}) = \sigma_{ji}(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x})$ は表面力、 $n_i(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} \in S$ における Ω_S の外向き単位法線である。また、 ρ_F 、 ρ_S は各々 Ω_F に満たされた圧縮性非粘性流体、 Ω_S に満たされた弾性体の密度である。さらに、流体領域における波数は $k_F = \omega\sqrt{\rho_F/\Lambda_F}$ と表される。ここに、 Λ_F は流体の体積弾性率である。なお、本論文では Ω_F 、 Ω_S ともに均質な材料を仮定する。すなわち、すべての材料乗数は定数である。また、 ω は角周波数であり、種々の物理量の時間依存は $e^{-i\omega t}$ であると仮定する。

また、粘弾性体を取り扱う際には、その材料定数のうち Young 率 E 、Lamé 定数 λ 、 μ を複素数とすればよい。このことは以下のようにして理解することができる：簡単のため一次元問題を考える。ここで取り扱う時間調和な系に対し、応力 σ 、ひずみ ε の間には Hooke の法則が成り立つが、材料の粘性により、ひずみは応力に対して時間遅れを伴って変化する。すなわち Hooke の法則は $\sigma e^{-i\omega t} = E\varepsilon e^{-i(\omega t + \delta)}$ と書ける（ここに、 $\delta > 0$ は位相遅れ）。したがって、見かけの弾性率を $Ee^{-i\delta}$ （その虚部は負である）とすることで粘弾性体を模擬することができる。なお、Young 率の実部、虚部を各々、貯蔵弾性率、損失弾性率と呼ぶことがある。一方で Poisson 比は通常実数であるから、(7) より、Lamé 定数の虚部も負とすればよい。さらには、 E 、 λ 、 μ の偏角はすべて等しいことも分かる [4]。粘弾性体における縦波、横波の波数（本論文では各々、 k_L 、 k_T と書く）の計算には複素数 $\lambda + 2\mu$ 、 μ の（逆数の）平方根を計算する必要があるため注意を要するが、極限吸収原理 [5] より、以下を選ぶのが正しい。

$$k_L = \omega \sqrt{\frac{\rho_S}{|\lambda + 2\mu|}} e^{\frac{i\theta}{2}}, \quad k_T = \omega \sqrt{\frac{\rho_S}{|\mu|}} e^{\frac{i\theta}{2}} \quad (8)$$

ここに、 $\theta = -\arg(E) > 0$ である。損失弾性率は材料試験により求める必要があるが、音響問題においては貯蔵弾性率の 0.1 倍から 2 倍程度 [6]、地盤工学では 0.01 倍から 0.03 倍程度 [7] であることが一般的なようである。

2.2 境界要素法

未知量として変位 p と音圧 $\mathbf{u}$ を選ぶと、境界値問題 (1)–(5) と等価な境界積分方程式 ($\mathbf{x} \in S$) は以下のようである（法線 $\mathbf{n}$ の向きに注意する）。

$$\frac{p(\mathbf{x})}{2} - \int_S \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} p(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \rho_F \omega^2 \int_S G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_\ell(\mathbf{y}) n_\ell(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = p^{\text{in}}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

$$\int_S \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \frac{u_i(\mathbf{x})}{2} + \int_S \Gamma_{Iij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = 0 \quad (10)$$

ここに、 $G(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_F |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ は二次元 Helmholtz 方程式の外向き放射条件を満たす基本解、 Γ_{ij} 、 Γ_{Iij} は各々二次元動弾性学の基本解、二重層核であり、次式の表現を持つ。

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{i}{4\mu} \left[H_0^{(1)}(k_T |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(H_0^{(1)}(k_T |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - H_0^{(1)}(k_L |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right) \right] \quad (11)$$

$$\Gamma_{Iij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = C_{k\ell m j} \frac{\partial \Gamma_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial y_\ell} n_m(\mathbf{y}) \quad (12)$$

ここに、 $H_n^{(1)}$ は n 次の第 1 種 Hankel 関数である。

本研究では、(9)、(10) を選点法・一定要素を用いて離散化し、次の代数方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - D & \rho_F \omega^2 S_1 & \rho_F \omega^2 S_2 \\ U_1 & \frac{1}{2} + T_{11} & T_{12} \\ U_2 & T_{21} & \frac{1}{2} + T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{\text{in}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

ここに、 $I \in \mathbb{C}^{N \times N}$ は単位行列、 $S_1 \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 等は ij 成分 $[S_1]_{ij}$ が次で定義される行列である (N は境界要素数)。

$$[S_k]_{ij} = \int_{S_j} G(\mathbf{x}^i - \mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (k = 1, 2) \quad (14)$$

$$[D]_{ij} = \int_{S_j} \frac{\partial G(\mathbf{x}^i - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) \quad (15)$$

$$[U_k]_{ij} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{S_j} \Gamma_{k\ell}(\mathbf{x}^i - \mathbf{y}) n_\ell(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (k = 1, 2) \quad (16)$$

$$[T_{k\ell}]_{ij} = \int_{S_j} \Gamma_{Ik\ell}(\mathbf{x}^i - \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (k = 1, 2 \text{ and } \ell = 1, 2) \quad (17)$$

ここに、 $\mathbf{x}^j$ は j 番選点、 S_j は j 番境界要素である ($j = 1, \dots, N$)。また、 $\mathbf{p}$ 、 $\mathbf{u}_k$ ($k = 1, 2$)、 $\mathbf{p}^{\text{in}} \in \mathbb{C}^N$ は各々、 j 番選点における音圧、変位の第 k 成分、入射音圧を第 j 成分に持つベクトルである。なお、境界積分方程式 (9) は実部が零であるような ω に対してさえも非自明解を持つことがある (見かけの固有値問題)。そこで、本研究では Burton-Miller 法 [8] を用いてこれを回避する。以降、(13) に現れる係数行列、解ベクトル、右辺ベクトルを各々 $\mathbf{A}(\omega)$ 、 $\mathbf{z}$ 、 $\mathbf{b}$ と書く。

(13) を解いて得られた音圧と変位の境界値を解の積分表現

$$p(\mathbf{x}) = p^{\text{in}} - \rho_F \omega^2 \int_S G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_\ell(\mathbf{y}) n_\ell(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_S \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} p(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in \Omega_F \quad (18)$$

$$u_i(\mathbf{x}) = - \int_S \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \int_S \Gamma_{Iij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in \Omega_S \quad (19)$$

に代入することで $\forall \mathbf{x} \in \Omega_F$ における音圧、 $\forall \mathbf{x} \in \Omega_S$ における変位を求めることができる。さらに、 $\forall \mathbf{x} \in \Omega_F$ における音圧勾配や $\forall \mathbf{x} \in \Omega_S$ における応力等が必要な場合には (18)、(19) を $\mathbf{x}$ で偏微分した積分表現を用いればよい。

2.3 境界要素法の高速化

後述のトポロジー最適化の実行においては、複雑な形状に対して境界値問題 (1)–(5) に対応する代数方程式 (13) を解くことになるため、そのサイズ N は大規模になると考えられる。しかしながら、その係数行列 $\mathbf{A}(\omega)$

は非対称の密行列であるため、係数行列の生成には $\mathcal{O}(N^2)$ 、代数方程式の求解には $\mathcal{O}(N^2)$ (反復解法を用いた場合)、 $\mathcal{O}(N^3)$ (直接解法を用いた場合) の計算量が必要となり、何らかの方法でこれを加速することは必須である。また、後に見るようにトポロジー導関数の計算においては順解析・随伴解析に対応して、係数行列が共通である 2 つの代数方程式を解くことになる。したがって、通常なされるように多重極法 [9, 10] によって行列ベクトル積を加速した反復解法を用いるのではなく、代数方程式の求解に直接解法を用いることが望ましい。

この目的のため、本研究では $\mathcal{H}$ 行列法 [11] を用いる。 $\mathcal{H}$ 行列法では、対象とする境界形状 Γ の持つ幾何的な情報のみを用いて係数行列を階層的に小さい部分行列に分割し、遠方からの影響を表す部分行列 (admissible block と呼ばれる) を低ランク近似することで係数行列の記憶容量を $\mathcal{O}(N)$ 程度とできる。また、一旦行列の成分をすべて計算した後にこれを低ランク近似するのではなく、adaptive cross approximation (ACA) を用いることにより、行列のすべての成分を計算することなくその低ランク近似を構成することができる。行列の生成にかかる計算量も典型的には $\mathcal{O}(N)$ 程度である。さらに、このようにして構成した行列 ($\mathcal{H}$ -matrix) に対して、LU 分解を含む各種線形代数演算が高速に (すなわち $\mathcal{O}(N)$ 程度の計算量で) 実行可能である。

3 トポロジー最適化

3.1 トポロジー最適化問題の定義

ここでは、境界値問題 (1)–(5) を制約条件とし、予め設定した有限の大きさの設計領域 D において、次の目的汎関数 J を最適化する弾性体領域 $\Omega_S \subset D$ を求める問題を考える。

$$J = \sum_{m=1}^M f(\mathbf{x}_m^{\text{obs}}) + \int_{\Gamma} g(p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})) dS(\mathbf{x}) \quad (20)$$

ここに、 $\mathbf{x}_m^{\text{obs}}$ は観測点、 f, g は適当な汎関数である。

3.2 トポロジー導関数

本節では本稿で提案するトポロジー最適化法においてもっとも重要な役割を果たすトポロジー導関数 [12, 13, 14, 15, 16] の導出を行う。トポロジー導関数とは、点 $\mathbf{x}$ においてトポロジー変化が生じた際の目的汎関数 J の変動の指標となる関数である。本稿では、生じるトポロジー変化を半径 ε の微小円形領域 Ω_ε の発生によるものと仮定する。点 $\mathbf{x}$ においてトポロジーが変化した時の目的汎関数の変分 $\delta J(\mathbf{x})$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ における漸近展開

$$\delta J(\mathbf{x}) = \mathcal{T}(\mathbf{x})a(\varepsilon) + o(a(\varepsilon)) \quad (21)$$

に現れる $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ をトポロジー導関数という。ここに、 $a(\varepsilon)$ は $\varepsilon > 0$ における単調増加関数である。なお、 $a(\varepsilon)$ は微小円形領域の境界 $S_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon$ に課される境界条件毎に異なることに注意する。

本稿で取り扱う音場弾性場連成問題においては、流体領域 Ω_F に微小な弾性体領域が発生する場合及び弾性体領域 Ω_S に微小な流体領域が発生する場合の二種類のトポロジー導関数を求める必要がある。ここでは、前者の導出について述べ、後者は結果のみを示す。

微小流体領域 Ω_ε が Ω_S に発生することによって、

$$\begin{aligned} p &\rightarrow p + \delta p, \quad q \rightarrow q + \delta q \quad \text{in } \Omega_F \setminus \overline{\Omega_\varepsilon} \\ u_i &\rightarrow u_i + \delta u_i, \quad t_i \rightarrow t_i + \delta t_i, \quad \sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij} \quad \text{in } \Omega_S \\ u_i &\rightarrow \hat{u}_i, \quad t_i \rightarrow \hat{t}_i, \quad \sigma_{ij} \rightarrow \hat{\sigma}_{ij} \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \end{aligned}$$

のように状態変数が変化したとする。このとき、微小円 Ω_ε 発生によるの目的汎関数の変分 δJ は、

$$\delta J = \delta J_S + \delta J_{S_\varepsilon} \quad (22)$$

と書ける。ここに、 δJ_S 、 δJ_{S_ε} の定義は以下のものである。

$$\delta J_S = \Re \left[\sum_{m=1}^M \frac{\partial f(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})}{\partial p} \delta p(\mathbf{x}_m^{\text{obs}}) + \int_S \left(\frac{\partial g}{\partial p} \delta p + \frac{\partial g}{\partial q} \delta q \right) dS \right] \quad (23)$$

$$\delta J_{S_\varepsilon} = \int_{S_\varepsilon} g(p, q) dS + \Re \left[\int_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial g}{\partial p} \delta p + \frac{\partial g}{\partial q} \delta q \right) dS \right] \quad (24)$$

以降、 δJ_S 及び δJ_{S_ε} の $\varepsilon \rightarrow 0$ における挙動を調べる。なお、前者の評価には随伴変数法を用い、後者は漸近展開を直接計算する。

δJ_S の評価に随伴変数法を用いるため、随伴問題を次式 (25)–(29) で定義する。

$$\tilde{p}_{,jj}(\mathbf{x}) + k_F^2 \tilde{p}(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^M \frac{\partial f(p(\mathbf{x}_m^{\text{obs}}))}{\partial p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m^{\text{obs}}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_F \quad (25)$$

$$\tilde{\sigma}_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho_S \omega^2 \tilde{u}_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_S \quad (26)$$

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) = -\tilde{t}_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial q} n_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in S \quad (27)$$

$$\tilde{q}(\mathbf{x}) := \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \rho_F \omega^2 \tilde{u}_i(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial p} \quad \mathbf{x} \in S \quad (28)$$

$$\text{Radiation condition for } \tilde{p}(\mathbf{x}) \text{ as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (29)$$

Ω_S における δu と $\tilde{u}$ 、 Ω_F における p と δp 、 Ω_ε における p と $\tilde{p}$ 及び $\nabla \tilde{p}$ と $\hat{u}$ の間に各々なりたつ恒等式 (相反定理) を用い (23) を変形すると次式を得る。

$$\delta J_S = \Re \left[- \int_{S_\varepsilon} (\rho_F \omega^2 \hat{u}_i n_i \tilde{p} + \tilde{p}_{,i} \hat{t}_i) dS \right] \quad (30)$$

さらに、 $\hat{u}_i$ 、 $\hat{t}_i$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ における漸近展開を (30) に代入し、線積分を実行すると次を得る。

$$\delta J_S = \Re \left[\frac{2(\rho_S - \rho_F)}{\rho_S + \rho_F} p_{,i}(\mathbf{x}^0) \tilde{p}_{,i}(\mathbf{x}^0) + \left(\frac{\rho_F \omega^2}{\lambda + \mu} - k_F^2 \right) p(\mathbf{x}^0) \tilde{p}(\mathbf{x}^0) \right] \pi \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (31)$$

ここに、 $\mathbf{x}^0$ は Ω_ε の中心である。

次に、 δJ_{S_ε} の $\varepsilon \rightarrow 0$ における漸近展開を計算する。 $g(p, q)$ として S を横切る音エネルギーフラックスの法線方向成分の時間一周平均を考える。

$$g(p, q) = \frac{1}{2\rho_F \omega} \Im [\bar{p}q] \quad (32)$$

p, q の $\varepsilon \rightarrow 0$ における漸近展開を (24) に代入し、 k_F は実数であることに注意すると次のようになる。

$$\delta J_{S_\varepsilon} = \frac{\omega |p(\mathbf{x}^0)|^2}{2} \Im \left[\frac{1}{\lambda + \mu} \right] \pi \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (33)$$

以上より、定義 (21) において、単調増加関数 $a(\varepsilon)$ として微小円の面積 $\pi \varepsilon^2$ を選択すると、境界上における音エネルギーフラックスを目的関数とした場合のトポロジー導関数 $\mathcal{T}_F$ は (30)、(33) より以下となる。

$$\mathcal{T}_F(\mathbf{x}) = \Re \left[\left(\frac{\rho_F \omega^2}{\lambda + \mu} - k_F^2 \right) p(\mathbf{x}) \bar{p}(\mathbf{x}) + \frac{2(\rho_S - \rho_F)}{\rho_S + \rho_F} p_{,i}(\mathbf{x}) \bar{p}_{,i}(\mathbf{x}) \right] + \frac{\omega |p(\mathbf{x})|^2}{2} \Im \left[\frac{1}{\lambda + \mu} \right] \quad (34)$$

(34) の右辺第一項は微小円 Ω_ε の湧き出しに伴って変化する S 上におけるエネルギー吸収を表し、第二項は Ω_ε におけるエネルギー吸収を表す。前述のとおり、 $e^{-i\omega t}$ の時間挙動を仮定する場合には粘弾性体の Lamé 定数 λ, μ の虚部は負である。したがって、(34) より Ω_ε によるエネルギー吸収は常に正であることが分かる。また、 Ω_ε に粘性がないときに $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ であるから、材料が完全弾性体の場合エネルギー吸収が生じないことを意味する。

なお、式 (34) において $\lambda \rightarrow \infty, \mu \rightarrow \infty, \rho_F/\rho_S \rightarrow 0$ の極限を取ると、 Ω_S を剛体として導出した場合のトポロジー導関数 $\mathcal{T}_{\text{rigid}}$ が得られる。

$$\mathcal{T}_{\text{rigid}}(\mathbf{x}) = \Re \left[-k_F^2 p(\mathbf{x}) \bar{p}(\mathbf{x}) + 2p_{,i}(\mathbf{x}) \bar{p}_{,i}(\mathbf{x}) \right] \quad (35)$$

この結果は [15] による結果と一致する。

弾性体領域 Ω_S に微小半径 ε の円形流体 Ω_ε が発生した場合のトポロジー導関数 $\mathcal{T}_S$ も同様の手順で求めることができ、以下ようになる。

$$\mathcal{T}_S(\mathbf{x}) = \Re \left[\rho_F \omega^2 \left((\rho_F - \rho_S) \omega^2 u_i(\mathbf{x}) \bar{u}_i(\mathbf{x}) + (A - B) \sigma_{ii}(\mathbf{x}) \bar{\sigma}_{jj}(\mathbf{x}) + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) \right) \right] \quad (36)$$

ここに A, B は以下で定義される係数である。

$$A = -\frac{(\lambda + 2\mu)(\mu + 2\Lambda_F)}{4\mu(\mu + \Lambda_F)(\lambda + \mu)}, \quad B = \frac{\Lambda_F(\lambda + 2\mu)}{4(\mu + \Lambda_F)(\lambda + \mu)^2} \quad (37)$$

3.3 レベルセット法に基づくトポロジー最適化

本研究では、式 (38) で定義されるレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ を用いて領域および境界を表現するレベルセット法を用いる。これにより、目的汎関数 J を最小化する Ω_F, Ω_S の分布を求める問題はレベルセット関数の分布を求める問題に帰着する。

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{in } \Omega_F \cap D \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{on } S \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{in } \Omega_S \end{cases} \quad (38)$$

最適化の過程におけるレベルセット関数の更新には、仮想時刻 t を導入し、以下の反応拡散方程式 (39) を用いる。

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial t} = k\mathcal{T}(\mathbf{x}) + \tau \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) \quad \text{in } D \quad (39)$$

式 (39) 中の $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ は前述のトポロジー導関数から計算され、次式で与えられる。

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathcal{T}_F(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega_F \\ -\mathcal{T}_S(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega_S \end{cases} \quad (40)$$

また、 τ は形状の複雑さを規定する係数であり、 τ の値が大きいほど $\mathbf{x}$ におけるレベルセット関数の曲率に対するペナルティが大きくなり、よりなめらかな境界を持つ連続的な構造が得られるようになる [17]。本研究では無限領域で定義される問題を扱うため、固定設計領域の境界 ∂D に以下の Dirichlet 境界条件を課す。

$$\phi = 1 \quad \text{on } \partial D \quad (41)$$

これにより、設計領域境界は常に流体領域 Ω_F となる。また、初期条件としては、初期形状に対応したレベルセット関数を適当に与える。初期値境界値問題 (39)、(41) は有限の大きさの領域 D において定義されるため、有限要素法を用いて解く。一方で、(39) の右辺に現れるトポロジー導関数の計算は前述のとおり境界要素法を用いて計算する。順問題 (1)–(5)・随伴問題 (25)–(29) の形から明らかなように各々に対応する代数方程式の計数行列は等しいため、前節に示した $\mathcal{H}$ 行列法に基づく高速直接境界要素法が有効である。

4 数値計算例

本節では吸音材のトポロジー最適化を行った例を示す。母材 (水) 中を伝播する音波を、設計領域 $D = [0, 60] \times [0, 60]$ 内に吸音材 (シリコンゴム) により吸収することを考える。シリコンゴムの材料定数は水のそれで正規化し、 $\rho_S = 0.97$ 、 $E = 0.018 - 0.0018i$ 、 $\nu = 0.49$ とした。入射波は角周波数 $\omega = 0.2$ の点源波とし、点源は $(-10.5, 30.0)$ に配置した。初期形状として $\Omega_S = \emptyset$ を選び、トポロジー最適化を実行した際の目的関数 (シリコンゴム Ω_S が吸収する音エネルギーフラックスの時間一周期平均) の履歴を図 1 に、特徴的なステップにおける Ω_S の形状を図 2 に示す。初期のステップにおいては点源の近くに吸音材が配置されるが、以降のステップにおいては点源から離れた箇所にも吸音材が配置されることが分かる。シリコンゴムの表面において音波の吸収と散乱のいずれも起こることから、散乱波と入射波が干渉するような箇所に吸音材が配置されたと考えられる。実際、このことはエネルギーフラックスの時間平均の分布をプロットした図 3 から確認できる。

最後に、得られた最適解と同程度の面積を持つ吸音材を適当に配置した場合との音エネルギー吸収量の比較を行った例を図 4 に示す。いずれの配置と比較しても、提案手法により得られた吸音材の配置は多くの音エネルギーを吸収できていることが確認でき、提案手法の有効性が確認できる。

5 結言

本研究では、 $\mathcal{H}$ 行列法により加速された境界要素法を用いた 2 次元音場・粘弾性場における弾性材のトポロジー最適化手法の開発を行った。提案手法を用いて吸音材の最適設計を実行し、提案手法が妥当な解を与えることを確認した。

参考文献

- [1] M.P. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2, pp. 197–224, 1988.

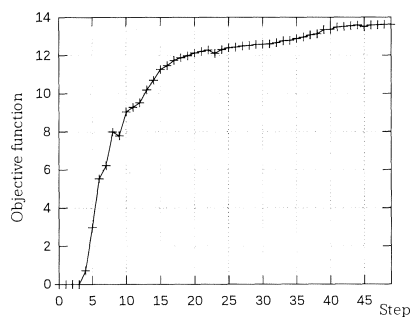


図1 目的関数の履歴

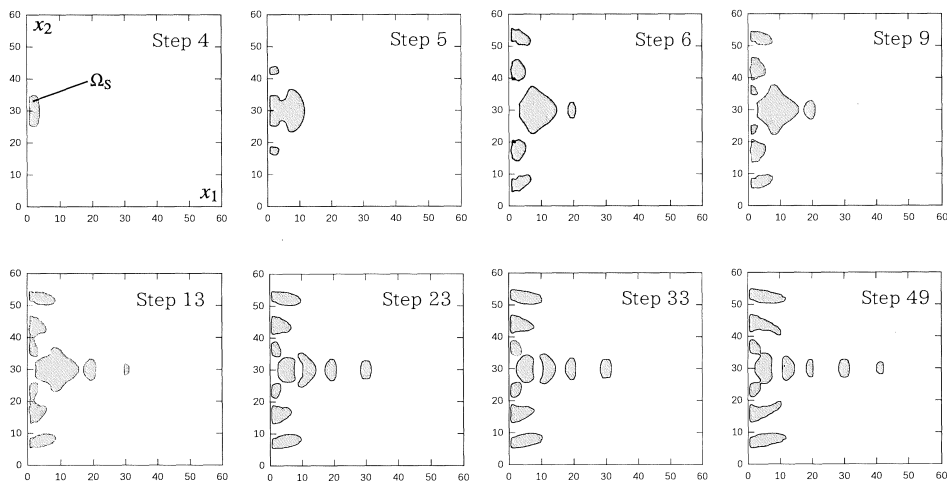


図2 いくつかの最適化ステップにおける吸音材の配置

- [2] O. Sigmund and J.S. Jensen. Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 361, No. 1806, pp. 1001–1019, 2003.
- [3] T. Yamamoto, S. Maruyama, S. Nishiwaki, and M. Yoshimura. Topology design of multi-material soundproof structures including poroelastic media to minimize sound pressure levels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 17, pp. 1439–1455, 2009.
- [4] C. J. Luke and P. A. Martin. Fluid-solid interaction: acoustic scattering by a smooth elastic obstacle. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 55, No. 4, pp. 904–922, 1995.
- [5] 小林昭一. 波動解析と境界要素法. 京都大学出版会, 京都市左京区吉田近衛町 69 京都大学吉田南構内, 2000.
- [6] Yosuke Yasuda and Tetsuya Sakuma. Analysis of sound fields in porous materials using the fast

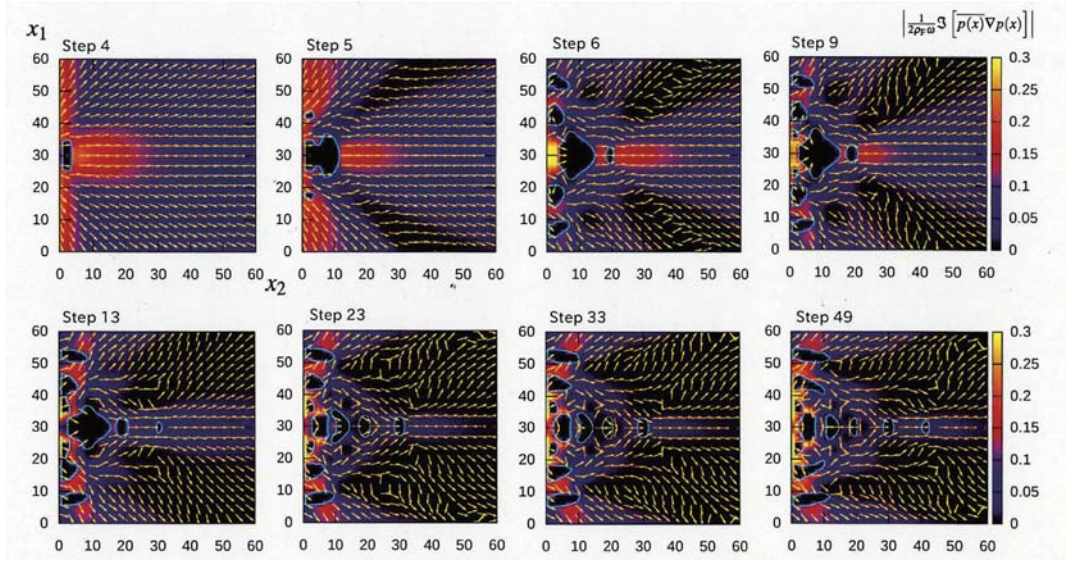


図3 いくつかの最適化ステップにおけるエネルギーフラックスの時間平均

multipole beam. In *37th international congress and exposition on noise control engineering, Shanghai, China*, Vol. 2008, 2008.

- [7] Eva Grasso, Stéphanie Chaillat, Marc Bonnet, and Jean-François Semblat. Application of the multi-level time-harmonic fast multipole beam to 3-d visco-elastodynamics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 36, No. 5, pp. 744–758, 2012.
- [8] AJ Burton and GF Miller. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 323, No. 1553, pp. 201–210, 1971.
- [9] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *Journal of Computational Physics*, Vol. 60, pp. 187–207, 1985.
- [10] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 73, No. 2, pp. 325–348, 1987.
- [11] M. Bebendorf. *Hierarchical matrices*. Springer, 2008.
- [12] A.A. Novotny, R.A. Feijóo, E. Taroco, and C. Padra. Topological sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 7, pp. 803–829, 2003.
- [13] Bojan B Guzina and Ivan Chikichev. From imaging to material identification: a generalized concept of topological sensitivity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 55, No. 2, pp. 245–279, 2007.
- [14] M. Bonnet and N. Nemitz. FM-BEM and topological derivative applied to acoustic inverse scattering. In *Boundary Element Analysis*, pp. 187–212. Springer, 2007.
- [15] A. Carpio and M.L. Rapin. Solving inhomogeneous inverse problems by topological derivative meth-

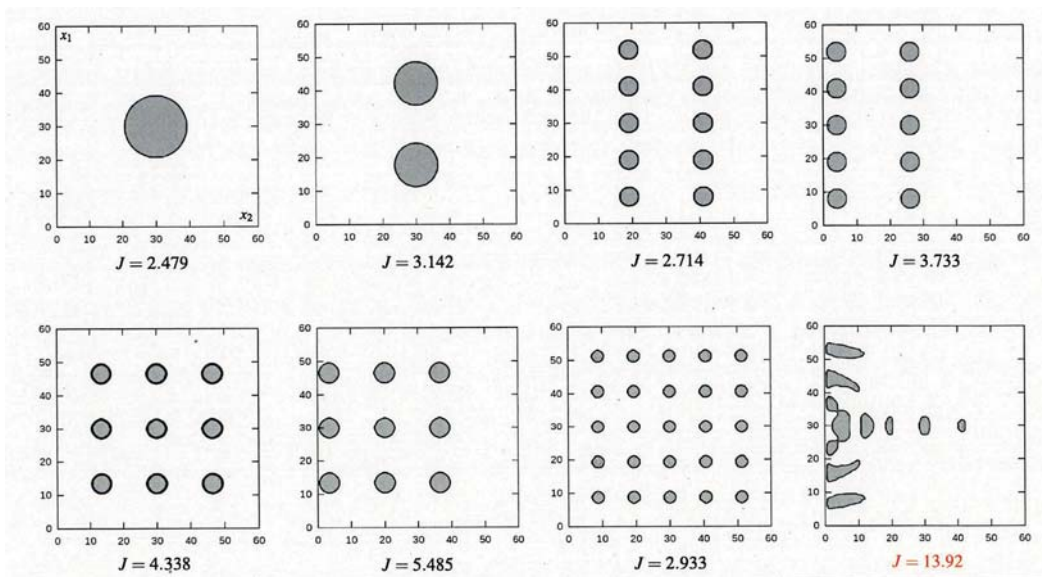


図4 最適性の確認

ods. *Inverse Problems*, Vol. 24, No. 4, p. 045014, 2008.

- [16] H. Isakari, K. Kuriyama, S. Harada, T. Yamada, T. Takahashi, and T. Matsumoto. A topology optimisation for three-dimensional acoustics with the level set method and the fast multipole boundary element method. *Mechanical Engineering Journal*, Vol. 1, No. 4, pp. CM0039–CM0039, 2014.
- [17] T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, and A. Takezawa. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45, pp. 2876–2891, 2010.