

Anosov Diffeomorphisms

名大 敬養 白 岩 謙 一

§ 0 はじめに

M を境界を持たない, C^r 級微分可能多様体とする。(以下特にことわらな限り, このような多様体だけを考える。)

いま $f: M \rightarrow M$ を C^r 級微分同相写像 ($r \geq 1$) とする。このとき, (M, f) または単に f を, 微分可能な力学系, または単に力学系という。 M の点 x に対して, その軌道 $\text{orb}(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, ($\mathbb{Z}$ は整数全体の作る加群) を考えられるが, この軌道の大域的な状態を, 位相的に研究するのが主な目的である。

軌道の状態としては, 例えば $\text{orb}(x)$ が有限集合のとき, 即ち $f^n(x) = x$ となる自然数 n が存在するとき, x を周期点といい, n をその周期という。特に, $n=1$ となるとき, x を不動点という。不動点全体の集合を $\text{Fix}(f)$, 周期点全体の集合を $\text{Per}(f)$ とおく。すると $\text{Per}(f) = \bigcup_{n \geq 1} \text{Fix}(f^n)$ となる。

次に矢 $\alpha \in M$ が非遊走的とは, α の任意の近傍 U に対して, 適当な零でない整数 n があって, $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ となることをいう。非遊走的な矢全体の集合を $\Omega(f)$ で表すが, これは M の閉集合である。

2つの力学系 $f: M \rightarrow M$, $g: N \rightarrow N$ が位相的に共役とは, 適当な同相写像 $h: M \rightarrow N$ が存在して, $h \circ f = g \circ h$ が成立するときをいう。位相的に共役なら, f と g の軌道の状態は, 位相的には同じである。とくに $\text{Fix}(f^n)$ と $\text{Fix}(g^n)$, $\text{Per}(f)$ と $\text{Per}(g)$, $\Omega(f)$ と $\Omega(g)$ 等は, h によって同相となる。

微分可能な力学系の中で, 特に重要なものとして Anosov の力学系, Morse-Smale の力学系, Axiom A (Smale による) を満たすもの等がある。
(= Axiom A を含むものとして)

Anosov の力学系は, 1960 年代に Anosov による負曲率空間上の測地流の研究に端を発し, その後エルゴート理論の専門家たち, Arnold, Avez, Sinai によって U-力学系 C-力学系の名前で研究された。そして, Smale, Franko, Newhouse によって, その力学系としての構造が位相的に研究された。

(むしろ, 一般的には, Anosov の力学系について, 余り良くわかっていない。例えば, どのような多様体の上に,

Anosov のカ字系が存在するものと、あるカ字系が Anosov のカ字系となるための条件を位相的に判定するにはどうしたか、等の問題に関して、Franks と Hirsch 等の仕事がある位である。

ここでは、今まで Anosov のカ字系に関して得られた主要な結果と、いろいろの予想とを問題と解説し、さらに著者の得た三つの結果を報告することにする。

§1 Anosov のカ字系の定義と例

M をリーマン多様体、 $f: M \rightarrow M$ を C^1 級微分同相写像とする。 f の微分 Tf は、 M の接ベクトル束 $T(M)$ の自己同型を引き起す。 $T(M)$ が Tf 不変な部分ベクトル束 E^u と E^s の Whitney 和に分かれ、すなわち

$$T(M) = E^u \oplus E^s, \quad Tf(E^u) = E^u, \quad Tf(E^s) = E^s,$$

さらに、定数 $C > 0$, $\lambda > 1$ が存在して、全ての自然数 n に対して

$$|Tf^n(v)| \geq C\lambda^n |v|, \quad v \in E^u,$$

$$|Tf^n(v)| \leq C^{-1}\lambda^{-n} |v|, \quad v \in E^s,$$

(ここで $|v|$ は接ベクトルの長さ) が成立するとき、 f を Anosov 微分同相写像、または Anosov のカ字系という。

定義から直ちに、次の二つの命題がわかる。

命題1 $f: M \rightarrow M$ が Anosov のカ字系ならば、零でない任意の整数 n に対して $f^n: M \rightarrow M$ も Anosov のカ字系である。

る。

命題2 $\tilde{M}$ を M の被覆空間, $p: \tilde{M} \rightarrow M$ をその被覆写像とする。今 $f: M \rightarrow M$, $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ をそれぞれ C^1 級の微分同相写像で $p\tilde{f} = fp$ を満たすものとする。このとき, f が Anosov の力学系なら, $\tilde{f}$ も Anosov の力学系となる。

さらに M がコンパクトなとき, 次の命題も容易にわかる。

命題3 M がコンパクトなとき $f: M \rightarrow M$ が Anosov の力学系であるという条件は, M のリーマン計量のとり方に無関係である。

また Mather [8] により, 次の命題も知られている。

命題4 M のリーマン計量を適当に取りかえることにより, Anosov の力学系の定義の中の定数 C を 1 に出きる。

さて, ここまで今まで知られている Anosov の力学系の例を全てあげることにする。3つの例をあげるが, これらは次々に拡張となっている。

例1 $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間, $\mathbb{Z}^n$ をその成分が全て整数からなるベクトル全体の作る部分加群とする。 n 次元トーラス T^n は $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ と定義されるが, これは, 1 次元球面 S^1 (円周) の n 個の直積空間 $\overbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}^n$ と同一視出来る。

いま f を n 次正交行列で, その成分は全て整数からなり,

さらに, その行列式の値 $\det f$ が ± 1 とする。すると, f は $\mathbb{R}^n$ の自己同型で $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$ を満たすものと考えられる。従って, 自然に $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ の自己同型 $\bar{f}: T^n \rightarrow T^n$ を引き起こす。

一般に $\mathbb{R}^n$ の自己同型 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の固有値の絶対値が全て 1 と異なるとき, g を双曲型という。

命題5 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が上の条件を満たし, さらに双曲型なら, $\bar{f}: T^n \rightarrow T^n$ は Anosov の力学系である。

このような $\bar{f}$ を *hyperbolic toral automorphism* という。

例2 N を単連結で中零なリ一群とする。今 Γ を N の uniform discrete 部分群, すなわち N/Γ がコンパクトとなるような discrete 部分群とする。今 $h: N \rightarrow N$ を N の自己同型で, $h(\Gamma) = \Gamma$ を満たすものとする。すると, これは $\bar{h}: N/\Gamma \rightarrow N/\Gamma$ なる微分同相写像を引き起こすので, N/Γ を nilmanifold という。すると例1の拡張として, 次の命題が成立する。

命題6 上の仮定のほかに, N の単位元 e における h の微分 $T_{he}: T_e(N) \rightarrow T_e(N)$ が双曲型なら, $\bar{h}: N/\Gamma \rightarrow N/\Gamma$ は Anosov の力学系である。

このような $\bar{h}$ を *hyperbolic nilmanifold automorphism* という。

例3 N を単連結で中零なリ一群, K を N の自己同型の作

る有限群とする。"は $N \cdot K$ をその半直積とする。すなわち、
 $(x, a), x \in N, a \in K$ の形のエレメントの集合に $(x, a)(y, b) = (xa(y), ab)$ によって積を定義する。これによって得られる群とする。 $\Gamma \subset N \cdot K$ を Torsion を持たない uniform discrete 部分群とする。すると Auslander によれば、([2])
 (1) $\Gamma \cap N$ は N の uniform discrete 部分群,
 (2) $\Gamma / \Gamma \cap N$ は有限。

かわかって"る。

$N \cdot K$ の中で K の右剰余類全体の作る空間 $N \cdot K / K \cong NK$ は自然に N と微分同相となる。これに Γ は left translation として作用するが、その作用による商空間を N/Γ と書く。(又は $\Gamma \backslash N \cdot K / K$) するとこれはコンパクトで

(3) $N/\Gamma \cap N$ は N/Γ の有限被覆空間
 が成立する、この N/Γ を infranilmanifold と"う。

"ま $h: N \cdot K \rightarrow N \cdot K$ を自己同型写像で $h(\Gamma) = \Gamma$, $h(N) = N$ を満たすものとする、これは $\bar{h}: N/\Gamma \rightarrow N/\Gamma$ を引き起"す。このとき次の命題が成立する。

命題 7 $h|N$ の単位元における微分が双曲型なら、 $\bar{h}: N/\Gamma \rightarrow N/\Gamma$ は Anosov のカオスとなる。

このようにして出た $\bar{h}$ を hyperbolic infranilmanifold automorphism と"う。

§3 今までの結果 (Anosov の仕事を中心として)

M の C^r 級微分同相写像全体の集合に, C^r 位相を入れておまる位相空間を $\text{Diff}^r(M)$ とする。Anosov による主定理は次のとおりである。

Anosov の定理 M をコンパクトとすると

- (1) $f: M \rightarrow M$ が Anosov の力学系なら, f は structurally stable. 即ち f の $\text{Diff}^r(M)$ における適当な近傍 U があって, U に属する任意の $g: M \rightarrow M$ は f と位相的に共役である。
- (2) さらに f が, M のリーマン計量によるルベグ測度と同値な f 不変な測度を持てば, $\text{Per}(f)$ は M で稠密である。
- (3) さらに f が C^2 級なら, f はエルゴード的. 即ち M は f 不変な測度が正となる2つの部分集合の直和となることはない。
- (4) C^r 級の Anosov 力学系全体の集合は $\text{Diff}^r(M)$ の開集合である。 ($r \geq 1$)。

この定理を関数解析的な手法を用いて証明するとき, §2 で述べたのと別の Anosov 力学系の特長づけが用いられる。これは次のように述べることも出来る。

M 上の連続なベクトル場全体の作るベクトル空間に sup norm を入れて Banach 空間にする。これを $\Gamma(T(M))$ で表す。いま $f^*: \Gamma(T(M)) \rightarrow \Gamma(T(M))$ を,

$$f^*(\xi) = T f \circ \xi \circ f^{-1}$$

で定義すると, これは連続な線型写像である。これを複素化したそのも同じ記号を用いて表わすことにすると,

命題8 f^* の spectrum を $\sigma(f^*)$ とする。即ち $\sigma(f^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid f^* - \lambda I \text{ は } \Gamma(T(M)) \otimes \mathbb{C} \text{ の自己同型でない}\}$, 但し $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合, すると, 次の3つの命題は同値,

- (a) $1 \notin \sigma(f^*)$
- (b) $|\lambda| \neq 1$ なら $\lambda \notin \sigma(f^*)$
- (c) f は Anosov の力学系

証明は Mather [8] を参照のこと。

さてこの Anosov の定理に関連して, Small は [2] の中で, 次の3つの問題を提出した。

問題1 M がコンパクト, $f: M \rightarrow M$ を Anosov 力学系とするとき, $\Omega(f) = M$ となるか?

これは $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$ かかっているか ([4]), これは $\text{Per}(f)$ が M で稠密か? という問題と同値である。

問題2 Anosov 力学系は不動点をもつか?

問題3 M がコンパクトとし $\Omega(f) = M$ となる Anosov 力学系全体の位相的共役類を決定せよ。特に, Anosov 力学系をもつようなコンパクト多様体 M はどんなものか? 又この M の普遍被覆空間はユークリッド空間か?

これに因りて Avez は [3] で f に対し M の連続な f -不

変な測度 $\mu > 0$ が存在すれば, M の普遍被覆空間は, ユークリッド空間となることを証明した。

さらに大胆な予想として, 次のものがある。

「予想」 コンパクト多様体上の Anosov カ変写像は, *hyperbolic infranilmanifold automorphism* と位相的に共役。

§4 今までの結果 (Franks を中心として)

$f: M \rightarrow M$ をコンパクト多様体 M 上の C^0 微分同相写像とする。いま有限 CW 複体 K の同相写像 $g: K \rightarrow K$ と写像 (連続) $h: K \rightarrow M$ が, 次の条件を満たすよう, 任意に与えられている。即ち $\pi_1(M)$ 等を M の基本群, $g_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(K)$ 等を g の基本群への引き起す標準同型写像とすると

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(K) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(M) \\ g_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \pi_1(K) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(M) \end{array} \quad \text{可換, 即ち } f_* h_* = h_* g_*$$

このとき, h によるトピックで基点を保つ写像 $h': K \rightarrow M$ で $f \circ h' = h' \circ g$ を満たすものが唯一つ存在するような f を, π_1 -微分同相写像という。

さらに, 2つの微分同相写像 $f: M \rightarrow M, g: N \rightarrow N$ が π_1 共役とは, 適当な同型写像 $\phi: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ があって,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(N) \\ f_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ \pi_1(M) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(N) \end{array} \quad \text{可換となるときをいう。}$$

Franks [4] の主定理は次のようになる。

Franks の定理 (1) *hyperbolic infranilmanifold automorphism* は π -微分同相写像である。

(2) $f: M \rightarrow M$ が $\dim E^u = 1$ 又は $\dim E^s = 1$ をみたし, $\Omega(f) = M$ となるような Anosov カ字系とすると, f は *hyperbolic toral automorphism* と位相的に共役。

(3) $f, g: M \rightarrow M$ が上の (2) の条件を満たす 2 つの Anosov カ字系とすると, f, g が位相的に共役となるための必要十分条件は, それらが π -共役となることである。

その後 Newhouse が [9] で $\dim E^u = 1$ 又は $\dim E^s = 1$ をみたす Anosov カ字系 (余次元 1 の Anosov カ字系という。) に関してこの定理を証明した。

Newhouse の定理 余次元 1 の Anosov カ字系 f に対して

$$\Omega(f) = M$$

従って Franks の定理の (2), (3) において, $\Omega(f) = M$ の条件は不要となった。

さらに Anosov の定理と Sinai の結果 [11] を合わせて次の結果がある。

定理 (Anosov と Sinai) Anosov カ字系 f に対して, f 不変なルベーグ測度が存在するための必要十分条件は,

$\overline{\text{Per}(f)} = M$ となることである。

これらと $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$ が Anosov カルギで成立すること
を組合せると、次の結果が得られる。

(a) 余次元 1 の Anosov カルギ f に対して $\text{Per}(f)$ は M で
稠密、さらに f は不変なルベーグ測度を持ち、エルゴード的
である。

(b) $\dim M \leq 3$ ならば、 M 上の Anosov カルギは余次元 1 と
なる。 (a) が成立する。すなわち hyperbolic toral auto-
morphism と位相的に同値である。

§5 Anosov カルギをもたない多様体

Franko は [5] で次の定理を得た。

定理 $f: T^n \rightarrow T^n$ を Anosov カルギとする。このとき、
 $H_1(T^n, \mathbb{R})$ を T^n の実数係数の 1 次元ホモロジーとし、 $f_*: H_1(T^n, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^n, \mathbb{R})$ を f の引きおこす同型写像とする。
すると f_* は 1 の中根を固有値として含まない。

この定理を Hirsch [6] は次のように拡張した。

Hirsch の定理 M がコンパクトな多様体、 $f: M \rightarrow M$
が Anosov カルギとする。今 $\pi_1(M)$ が index 有限の poly-
cyclic 部分群を持ち、その普遍被覆空間 $\tilde{M}$ のホモロジー
 $H_*(\tilde{M}; \mathbb{R}) = \bigoplus_{i \geq 0} H_i(\tilde{M}, \mathbb{R})$ が有限次元ならば、 $f_*: H_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{R})$ は 1 の中根を固有値として含まない。

これらを利用して Hirsch は Klein の管とトーラスの直積

とわ, その他多くの Anosov カルギ系を含まない多様体の例を作った。

我々は, 次の定理を示す。

定理 1. M を連結でコンパクトとする。 $f: M \rightarrow M$ が Anosov カルギ系とすると, $f_*: H_*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{R})$ は恒等写像でない。

この証明は, もし f_* が恒等写像なら, f の Lefschetz 数を考えることによって $\Omega(f) = \text{Per}(f)$ が有限集合となることを示す。すると, これは Morse-Smale のカルギ系となるが, Anosov $\Rightarrow$ Morse-Smale とはならないので, 矛盾となる。

この定理は直ちに系として

系 1. M, f を定理 1 のものとすると, 零でない任意の整数 n に対して $f_*^n: H_*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{R})$ は恒等写像にならない。

これは, Franks, Hirsch より弱い結果である。しかし, M はもっと一般的である。

系 2. 有理数係数のホモロジー-球面, 特にホモトピー-球面は Anosov カルギ系を持たない。

系 3. $\mathbb{R}^2$ -空間, 実射影空間は Anosov カルギ系を持たない。

$M \times SM$ へのホモトピー-同値のホモトピー-類全体のなす群

を $\mathcal{E}(M)$ とする。 $H_*(M; \mathbb{Z})$ に恒等写像を引き起すような M のホモトピー同値のホモトピー類全体 $\mathcal{E}_0(M)$ は $\mathcal{E}(M)$ の正規部分群で、 $\mathcal{E}(M)/\mathcal{E}_0(M)$ は $\text{Aut}(H_*(M; \mathbb{Z}))$ の部分群と同一視出来る。

系4 M はコンパクトで連結とし $\mathcal{E}(M)/\mathcal{E}_0(M)$ が有限とする。すると M は Anosov カ字系を持たない。

系5 $\text{Aut}(H_*(M; \mathbb{Z}))$ が有限な S , M は Anosov カ字系を持たない。

系6 実数体, 複素数体, n -次元体上の射影空間, Cayley 射影平面は Anosov カ字系を持たない。

系7 偶数次元球面 S^{2n} の2個の直積 $S^{2n} \times S^{2n}$ は Anosov カ字系を持たない。

これは Kahn [7] により $\mathcal{E}(S^{2n} \times S^{2n})$ が有限だから。

最後に, M の $\mathbb{R}$ 係数のコホモロジー環か, 奇数次元の球面の積 $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}$, (n_i は奇数) のそれと同型とする。例えば, コンパクトリー群はこの性質をみたす。

今正の次元のコホモロジー類の積で生成される $H^*(M; \mathbb{R})$ の元を decomposable とし、このような元全体の作る部分群を D と ($P = \bigoplus_{i \geq 0} H^i(M; \mathbb{R}) / D$) とおく。 f を M から $S^1 M$ への写像とすると D は f^* で保たれるから, f は P の間の導同型 $f_P: P \rightarrow P$ を引き起す。

定理2 M を上の性質をみたすコンパクト多様体, $f: M \rightarrow M$ を Anosov カ字系とする. このとき f_p は 1 の中根を固有値として含まない。

これは, f_p の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ とするとき, f の Lefschetz 数 $L(f)$ が $\prod_{i=1}^k (1 - \lambda_i)$ となることを用いて証明出来る。

系1 コンパクトなリ-群 G に対して, $f: G \rightarrow G$ を Anosov カ字系とする. すると $f_*: H_1(G, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(G, \mathbb{R})$ は 1 の中根を固有値に持たない。

これは Franks の定理の拡張である。

系2 $H^*(M; \mathbb{R}) \cong H^*(S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}, \mathbb{R})$ (n_i 奇数) であつて, 適当な n_{i_0} に対し $n_i \neq n_{i_0}$ ($i \neq i_0$ のとき) が成立すれば, M は Anosov カ字系を持たない。

系3 $Spin(n), SU(n), Sp(n)$, 例外リ-群 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 は Anosov カ字系を持たない。

系4 定理2の仮定の下で Anosov カ字系 $f: M \rightarrow M$ は不動点をもつ。

これは Sondow の結果の拡張である。 (□□)

参考文献

1. D.V. Anosov: Geodesic flows on compact Riemann manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Math. Inst. 90 (1967)
2. L. Auslander: Bieberbach's theorem on space groups and discrete

- uniform subgroups of Lie groups, *Ann. of Math.* 71 (1960), 577-590
- 3 A. Avez: Anosov diffeomorphisms, Auslander, Gottschalk: *Topological Dynamics*, Benjamin (1968), 17-51
 - 4 J. Franks: Anosov diffeomorphisms, *Proc. Symp. Pure Math.* 18 AMS (1970), 61-94
 - 5 " : Anosov diffeomorphisms on tori, *Trans. AMS* 145 (1969), 117-124
 - 6 M.W. Hirsch: Anosov maps, polycyclic groups and homology, *Topology* 10 (1971), 177-183
 - 7 P.J. Kahn: Self-equivalences of $(n-1)$ -connected $2n$ -manifolds, *Bull. AMS* 72 (1966), 562-566
 - 8 J.N. Mather: Characterization of Anosov diffeomorphism, *Indagationes Math.* 30 (1968), 477-483
 - 9 S.E. Newhouse: On codimension one Anosov diffeomorphisms, *Amer. J. Math.* 92 (1970) 761-770
 - 10 Z. Nitecki: *Differentiable Dynamics*, M.I.T. Press. (1971)
 11. Ja. G. Sinai: Markov Partitions and C -diffeomorphisms, *Funct. Anal. and its Appl.* 2 (1968), 61-82.
 - 12 S. Smale: *Differentiable Dynamical Systems*, *Bull. AMS* 73 (1967) 747-817
 13. J. Sondow: Fixed points of Anosov diffeomorphisms of certain manifolds, *Notices AMS* 17 (1970), 414.