

操作量を線型に含む非線型制御系の最適制御

(動最適と静最適との関係)

京大 エ 布 川 晃

1. 序

現場においては、多くのプロセスは定常状態で運転されている。そのため、実在のプロセスの動最適問題は、定常(静)最適点への最短時間制御問題という形で取扱われがちである。この最短時間問題への還元という考えの背後には、運転開始後の過渡状態が終熄すれば、プロセスは定常状態へ移行するのであるから、もし運転時間が十分長ければ、動最適軌道は静最適点へ移行する、したがって静最適操作は、近似的には、動最適操作になっている、という素朴な確信があるように思われる。本稿の目的は、この現場技術者の確信を数学的に検討することである。

2. 基本的な定義と問題

2.1 記号. 以下ベクトル x は常に列ベクトルを表わす。

$$x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

x の転置行列は ${}^t x$ で、したがって ${}^t x$ は行ベクトルを表わす。
 ${}^t x y$ は内積を意味する。行列 A は $\det A$ で、 A' は A の転置を、 A^{-1} は $\det A \neq 0$ のとき A の逆行列を表わすものとする。

ベクトル変数 x のスカラー関数に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{grad } f = \text{col}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

と書く、 $f(x)$ の 2 階微分は Hesse の行列

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

を、また、ベクトル関数 $g(x)$ の x による微分は Jacobi の行列

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

を表わすものとする。以上の準備のもとに基本的な定義と問題を述べる。

2.2 定義と問題：以下において動最適制御問題および静最適制御問題は定義 1 および定義 2 の意味であると解釈する。

[定義 1] プロセスの基本方程式を

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad u \in U \quad (2.1)$$

とする。ただし、 x は n -ベクトル、 u は r -ベクトル、 U

は R_r のコンパクトな部分集合で、操作 u の許容範囲を表わすものである。このとき、つぎの汎関数

$$J = \int_0^T f_0(x, u) dt \quad (2.2)$$

を最大ならしめる u を求める問題を動最適制御問題という。この解を $u_{op}(t)$ 、これに対応する応答を $x_{op}(t)$ と書くことにする。

[定義2] 定常状態 $\dot{x} = 0$ においては、上の動最適問題は、つぎの条件付最大値問題となる。すなわち、付帯条件

$$f(x, u) = 0, \quad u \in U \quad (2.3)$$

のもとに、

$$f_0(x, u) \quad (2.4)$$

を最大にせよ。この問題を静最適制御問題とよぶことにする。この解を u^* 、 x^* と書く。

以上の定義のもとにおいては、序に述べた現場技術者の確信はつぎのようにまとめられる。

[問題] T が十分大きければ、 $u_{op}(t)$ 、 $x_{op}(t)$ は u^* 、 x^* で代用できる。つまり

$$u_{op}(t) = u^*, \quad x_{op}(t) = x^*, \quad t \in [T_1, T_2] \quad (2.5)$$

ここで $[\tau_1, \tau_2]$ は $[0, T]$ の部分区間で、 T が大きければ、その主要部分を占める。あるいは

$$f_0(x^*, u^*) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_0(x_{op}(t), u_{op}(t)) dt \quad (2.6)$$

が成立する。(2.5) 式または (2.6) 式が成立するための条件を求めよ。

2.3. 問題解決の手掛り、解決の糸口を見出すために、動最適制御問題と静最適制御問題とに対する代表的な解法である、最大原理と未定乗数法との比較を行なう。最大原理によれば、 ψ を補助変数ベクトルとするとき、 $u_{op}(t)$ はつぎのハミルトニアン

$$H(x, \psi, u) = f_0(x, u) + \psi^T f(x, u) \quad (2.7)$$

を U において最大にする¹。また $x_{op}(t)$ とそれに対応する $\psi_{op}(t)$ は正準方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.8)$$

を満足する。もし $u_{op}(t) \in U^\circ$ (U° は U の開核) ならば $u_{op}(t)$ は

$$\frac{\partial H(x, \psi; u)}{\partial u} = 0 \quad (2.9)$$

を満たす。さて、一方、(2.7) 式において、 ψ を Lagrange の

未定乗数とみなせば、 $u^* \in U^0$ なるとき、 u^*, x^*, ψ^* は

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \quad (2.10)$$

を満足しなければならない。以上の簡単な考察から、つぎの命題が得られる。

[命題 1] 関数 H の最大値が U の内部に存在するならば、静最適値 x^* およびそれに対応する ψ の値 ψ^* は、正準方程式 (2.8) の危値となる。したがって、 (x, ψ) 空間において、 $x_{op}(t), \psi_{op}(t)$ は決して有限時間内では、 x^*, ψ^* に達することはない。もし $x_{op}(t), \psi_{op}(t)$ が有限時間で x^*, ψ^* に達するならば、その時の操作は U の境界上になければならない。つまり、 $u_{op} \in \partial U$, (∂U は U の境界)。

この命題は (x, ψ) 空間で成立するものであるから、 x 空間では $x_{op}(t)$ は x^* に有限時間で達するかもしれない。そのような結果は有用ではない。それ故、さらにすゝんだ結果を引き出すために、対象を表題の系に限定する。すなわち

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + G(x)u, \quad u \in U \quad (2.11)$$

$$J = \int_0^T \{ f_0(x) + {}^t g_0(x)u \} dt \quad (2.12)$$

ここで x, u はともに n -ベクトル、 $f_0(x)$ はスカラー関数、

$f(x)$, $g_0(x)$ はベクトル関数. $G(x)$ は正則な行列であるとし、これらの関数はすべて適当に滑らかであるとする.

3. 変分法からの接近

3.1 Euler の方程式と静最適. (2.11) 式と (2.12) 式とから, u を消去すれば,

$$J = \int_0^T \{ q(x) + {}^t p(x) \dot{x} \} dt, \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \quad (3.1)$$

ただし

$$q(x) \equiv f_0(x) - {}^t g(x) G(x) f(x), \quad p(x) \equiv {}^t G(x) g_0(x), \quad (3.2)$$

となる. ここで, 静最適 x^* は $q(x)$ 最大点であることを注意しておく. このとき, (3.1) 式の Euler の方程式は

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial x} - {}^t \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right\} \dot{x} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad (3.3)$$

で与えられる. あきらかに, $\partial q(x^*) / \partial x = 0$ であるから, つぎの命題を得る.

[命題2] 静最適 x^* は Euler の方程式 (3.3) の危点である. まって, x 空間においても, 命題1と同様の結果が得られる. とくに, $u_{op}(t) \in U^0$ ならば, $x_{op}(t)$ は無限時間経っても x^* に近づかない.

[証明] 最後に述べた事実は, $q(x) = \text{const.}$ が (3.3) 式のオ

積分であるという事実から導かれる。(QED):

3.2. 基本的な結果

(3.3) 式において、 $\partial p / \partial x$ が対称行列、つまり

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = {}^t \left(\frac{\partial p(x)}{\partial x} \right) \quad (3.4)$$

ならば、(3.3) 式はもはや微分方程式ではなくなる。この場合には、つぎの Pfaff 形式

$${}^t p(x) \dot{x} dt \quad (3.5)$$

が完全微分となる。そこで、(3.5) 式を $dW(x)$ 、ただし $W(x)$ はスカラー関数、とおけば、積分 (3.1) は、

$$J = \int_0^T q(x) dt + W[x(T)] - W[x(0)] \quad (3.6)$$

となる。(3.6) 式から分かるように、積分 (3.1) の第 1 項のみが、途中の積分路に関係し、第 2 項は $x(t)$ の端点のみに関係する。さて、 x^* は $q(x)$ の最大点であったから、積分 (3.1) または (3.6) を最大にする軌道 $x_{op}(t)$ は、 T が十分大きいときには、できるだけ早く x^* に達し、そこで静止しているようなものとなる筈である。よって、つぎの定理を得る

[定理 1] 2.2 節に述べた問題の十分条件は、(3.4) 式が

成立すること、つまり

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} \quad \text{ただし} \quad p(x) = {}^t G(x) {}^t g_0(x) \quad (3.7)$$

が R_n で対称行列となることである。

この条件は、つぎに示すように、ほとんど必要である。

[定理2] 問題の必要条件は、静最適点のある近傍において、(3.4) 式が成立することである。

[証明] いま区間 $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ において、 $x_{op}(t) = x^*$ が成立しているものとする。ここで $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$ である。いま定数 x^* の変分を $\xi(t)$ とすれば、(3.1) 式の第2変分は

$$\delta^2 J = \int_0^T \left\{ {}^t \xi \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} \right)^* \xi + {}^t \dot{\xi} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^* - {}^t \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^* \right] \xi \right\} dt \quad (3.8)$$

と書くことができる。ここで *印は、 $x=x^*$ における値であることを示すものとする。さて、 $\partial p / \partial x$ が対称行列でなければ、 $\xi(t)$ を適当に選んで、(3.8) 式が正負いずれの符号をもとり得ることを示そう。一般性を失うことなく、 $\partial p_1 / \partial x_2$ と $\partial p_2 / \partial x_1$ と仮定してよい。ここで $p_1(x)$, $p_2(x)$ はそれぞれベクトル $p(x)$ の第1, 第2成分である。このとき $\xi(t)$ として、区間 $[\tau_1, \tau_2]$ に含まれるある区間 $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ にお

いて、

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= \pm \sin \frac{\pi}{\alpha}(t-t_0), \quad \xi_2(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{\alpha}(t-t_0) \\ \xi_3(t) &= \xi_4(t) = \dots = \xi_n(t) = 0\end{aligned}\quad (3.8)$$

とし、その他では $\xi(t)=0$ となる関数を選ぶは、(3.8) 式は

$$\delta^2 J = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + 3 \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right)^* \alpha \pm 2\pi \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \right)^*$$

となることを示すことができる。ここで α を十分小さくとれば、 $\delta^2 J$ は正負いす^れともなり得る。 $u^* \in U^0$ と仮定しているから、変分 (3.8) は許容範囲内の操作量で構成できることは明らかである。よって、 $\partial p / \partial x$ が対称行列でなければ、 x^* に止まる軌道は最適ではない (QED)。

3.3 化学プロセスへの応用

$\partial p / \partial x$ が対称であるという条件の実際的意味を示すために、Fig. 1 に図示した、完全混合型流通反応槽の最適制御問題を取上げよう。反応は

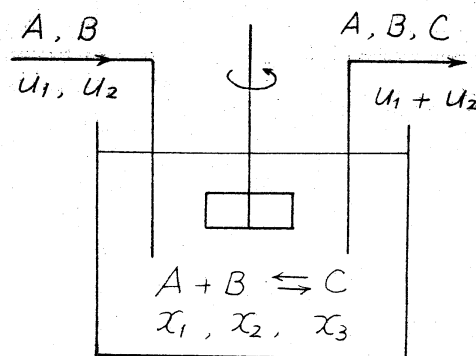


Fig. 1



なる型であるとする。以下 (i) 体積変化なし, (ii) 温度変化なし、と仮定する。したがって、プロセスの基礎方程式は、反応物値 A, B, C の濃度 x_1, x_2, x_3 だけによって記述できる。 A, B, C のモル比容を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば、

$$\frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} + \frac{x_3}{\alpha_3} = 1 \quad (3.11)$$

なる関係が成立するから、方程式は x_1, x_2 だけで表わすことができる。 A と B との物値収支の式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= r_1(x_1, x_2) + (\alpha_1 - x_1)u_1 - x_1u_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2(x_1, x_2) - x_2u_1 + (\alpha_2 - x_2)u_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここで、 $r_1(x_1, x_2), r_2(x_1, x_2)$ は反応速度、 u_1, u_2 は A, B の供給速度で、これが操作量である。また反応槽の容積は単位にとつてある。さて、目的関数として、このプロセスからの総収益を採ることにしよう。いま b_1, b_2, b_3 を A, B, C の混合状態における、単位モルあたりの価格； a_1, a_2, a_3 を分離された純粋状態の A, B, C の単価であるとする。分離のための費用が無視できない場合には $a_i > b_i, (i=1, 2, 3)$ であり、 $a_i(a_i - b_i) (i=1, 2, 3)$ は A, B, C の単位体積を分離するに要する費用である。さて総収益はつぎのように書ける。

$$J = \int_0^T \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 b_i x_i - a_1 \alpha_1 \right) u_1 + \left(\sum_{i=1}^3 b_i x_i - a_2 \alpha_2 \right) u_2 \right\} dt. \quad (3.13)$$

(3.12) 式より行列 $G(x)$ は

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - x_1 & -x_1 \\ -x_2 & \alpha_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

であり、その行列式は、(3.11) 式を用いれば、

$$\det G(x) = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} x_3$$

となる。よって $x_3 \neq 0$ 、つまり C が槽内に存在すれば、 $G^{-1}(x)$ が存在し

$${}^t G^{-1}(x) = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 x_3} \begin{pmatrix} \alpha_2 - x_2 & x_2 \\ x_1 & \alpha_1 - x_1 \end{pmatrix}$$

と書ける。一方 (3.13) より、ベクトル $g_0(x)$ は

$${}^t g_0(x) = \left(\sum_{i=1}^3 b_i x_i - a_1 \alpha_1, \sum_{i=1}^3 b_i x_i - a_2 \alpha_2 \right)$$

であるから、 $\forall p \in \mathbb{R}^2$, $p = {}^t G^{-1} g_0$ が対称行列であるための条件は、

$$\alpha_1 (a_1 - b_1) = \alpha_2 (a_2 - b_2) \quad (3.14)$$

となる。よって、つぎの結果が得られた。

[定理3] 化学プロセスの最適制御 (3.12), (3.13) において

は、AとBとの単位体積を分離するための費用が等しとき、
~~静最適制御~~ はまた~~動最適制御~~にもなっている。

4. 最大原理による検討

4.1 特異解 最適制御の具体的手順を決めるため、つまり、アルゴリズムを決めるためには、操作の許容範囲 U の境界 ∂U 上をも吟味しなければならない。そのためには最大原理が有用である。3節の結果は最大原理を用いてつぎのように述べることができる。(2.11)式, (2.12)式からハミルトニアンを作れば、

$$H = f_0(x) + {}^t g_0(x)u + {}^t \psi \{ f(x) + G(x)u \} \quad (4.1)$$

となる。(4.1)式は u に関して1次式である。よって u の係数を A とおく。すなわち、

$$H = {}^t A u + f_0(x) + {}^t \psi f(x), \quad A = {}^t G(x) \psi + g_0(x) \quad (4.2)$$

と書いておく。もし $A \neq 0$ ならば、関数 H の最大値は ∂U 上にある。一方 $A = 0$ ならば、 U の内点を吟味しなければならない。そのような場合は、特異であると呼ばれる³。この場合について、つぎの定理が得られる。

[定理 4] $A=0$ の状態が持続する場合には、つぎの関係式が成立する。

$$\begin{aligned} (i) \quad \psi &= -p(x) \quad , \quad (ii) \quad H = q(x) \\ (iii) \quad \frac{dA}{dt} &= {}^tG \left[\left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - {}^t \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right\} \dot{x} - \frac{\partial q}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

[証明] (i), (ii) は自明であるから、(iii) のみを証明する。
 A を t で微分すれば、

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A}{\partial \psi} \dot{\psi} \quad , \quad A = {}^tG(x)\psi + g_0(x) \quad (4.4)$$

である。 $\partial A / \partial \psi = {}^tG(x)$ であるから、(4.3) (iii) を示すためには、(4.4) において

$$(a) \quad \left[\frac{\partial A}{\partial x} \right]_{A=0} = {}^tG \frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad (b) \quad [\dot{\psi}]_{A=0} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \dot{x} - \frac{\partial q}{\partial x} \quad (4.5)$$

なることを示せばよい。まず (4.5), (a) を証明する。 $\partial A / \partial x$ の i 列ベクトルは $\partial A / \partial x_i$ であるから、(4.3), (i) によって

$$\left[\frac{\partial A}{\partial x_i} \right]_{A=0} = \left[\frac{\partial {}^tG\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial g_0}{\partial x_i} \right]_{\psi=-p} = \frac{\partial {}^tG}{\partial x_i} p + \frac{\partial g_0}{\partial x_i} \quad (4.6)$$

一方 $\partial p / \partial x$ の i 列ベクトルは

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial ({}^tG^{-1}g_0)}{\partial x_i} = {}^tG^{-1} \left[- \frac{\partial {}^tG}{\partial x_i} {}^tG^{-1}g_0 + \frac{\partial g_0}{\partial x_i} \right] \quad (4.7)$$

である。 $p = {}^tG^{-1}g_0$ であるから、(4.5), (a) が成立する。

(4.5), (b) の証明はつぎの通りである。

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -{}^t(\frac{\partial A}{\partial x})u - [\frac{\partial f_0}{\partial x} + {}^t(\frac{\partial f}{\partial x})\psi] \quad (4.8)$$

において、(4.5), (a), (4.3), (i) および

$${}^t(\frac{\partial f}{\partial x})p = \frac{\partial({}^tpf)}{\partial x} - {}^t(\frac{\partial p}{\partial x})f$$

に留意すれば、

$$[\dot{\psi}]_{A=0} = -{}^t(\frac{\partial p}{\partial x})(Gu+f) - \frac{\partial}{\partial x}(f_0 - {}^tpf) \quad (4.9)$$

を得る。 $\dot{x} = Gu+f$ であり、また (3.2) 式より $g(x) = f_0(x) - {}^tg(x)G^{-1}(x)f(x) = f_0(x) - {}^tp(x)f(x)$ であつたから、(4.9) は (4.5), (b) に等しいことが分かる (QED)。

定理 4 は、つぎの 1 次元問題を解くのに大変役に立つ。

4.2 1 次元の問題

1 次元の最適制御問題を取扱う。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad |u| \leq 1 \quad (4.10)$$

$$J = \int_0^T \{f_0(x) + g_0(x)u\} dt \quad (4.11)$$

ここで、変数および関数はスカラー量である。1 次元の場合は、 $\partial p / \partial x = {}^t(\partial p / \partial x)$ は自動的に満され、つぎの結果を証

明することができる。

[定理5] T が十分大きいとき、最適軌道は、 $u = \pm 1$ によって、静最適点へ最短時間で達し、それ以後そこに止まるような軌道である。さらに、この結果は、初期値が固定されている場合には、終端値が自由であっても、固定されていても、変らない。

[証明] 自律系においては、よく知られているように、

$$\max_{u \in U} H(x, \dot{x}, u) = \text{const.} \quad (4.12)$$

が成り立つ。したがって、1次元の問題に対しては、(4.12)式は最適軌道の候補となるところの停留軌道群を表わしているので、この軌道群の模様を図示することができれば、問題は解ける。以下においては、簡単化するため、 $g(x) > 0$ 、 $u(x) = -f(x)/g(x)$ は単調増加関数であるとする。さらに $u = \pm 1$ とこの関数との交点の x 座標を $x = x^\pm$ とする。このとき $-1 \leq u \leq +1$ の各点は $x^- \leq x \leq x^+$ の各点に 1:1 に対応し、 $u = u^0$ を 1 つ固定すれば、それに対応する $x = x^0$ は微分方程 (4.10) の安定な唯一の定常点となる。明らかに

$$[\dot{x}]_{u=1} = f(x) + g(x) > 0, \quad x < x^+ \quad (4.13)_1$$

$$[\dot{x}]_{u=-1} = f(x) - g(x) < 0, \quad x > x^- \quad (4.13)_2$$

が成り立つ。さらに x^* を

$$\bar{g}(x) = f_0(x) - g_0(x) f(x) / g(x) \quad (4.14)$$

の孤立最大点とし、 $x^- < x^* < x^+$ と仮定する。さて、この場合のハミルトニアンは

$$H = f_0(x) + g_0(x)u + \psi \{ f(x) + g(x)u \} \quad (4.15)$$

であり、 H における u の係数は

$$A(x, \psi) = g(x)\psi + g_0(x) \quad (4.16)$$

となる。ここで、

$$A^+ \equiv \{x, \psi \mid A(x, \psi) > 0\}$$

$$A^- \equiv \{x, \psi \mid A(x, \psi) < 0\}$$

$$A^0 \equiv \{x, \psi \mid A(x, \psi) = 0\}$$

と定義すれば、 $g(x) > 0$ であるから、(4.16) 式より、領域 A^+ は曲線 A^0 の上方 (ψ の正の方向) に位置し、領域 A^- は下方に位置する (Fig. 2 参照)。このとき停留軌道群 $\max H = \text{const.}$ は、 $A^\pm, A^0$ において、次式で記述される。

$$\begin{aligned}
H(x, \psi, +1) &= \text{const.} \quad \text{in } A^+ \\
H(x, \psi, -1) &= \text{const.} \quad \text{in } A^- \\
dq(x)/dx &= 0 \quad \text{in } A^0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

上式の最後の関係式はつぎの議論から導かれる。スイッチング曲線 A^0 上においては、特異解を調べなければならないが、定理 4, (iii) によれば、つぎの関係が成立している

$$[\dot{A}]_{A=0} = -g(x) \frac{dq(x)}{dx} \tag{4.18}$$

よって特異解は $dq(x)/dx = 0$ を保持するものである。以後 $q(x)$ の停留点を特異点と呼ぶことにしよう。停留軌道の模様を決定するために、(4.18) 式は重要な働きを演じる。曲線 A^0 上の軌道の挙動は (4.18) 式によって定まるからである。

その理由は、 $dq/dx > 0$ は $\dot{A} < 0$ を意味し、このとき軌道は曲線 A^0 を A^+ から A^- の方へと横切る、 $dq/dx < 0$ ならばその反対である、また特異点では A^0 に接する方向に走る、という事が分かるからである。さらに、(4.13) 式から知れる通り、特異点においては、軌道は領域 A^+ においては x^+ の向きつまり $\dot{x} > 0$ の向きに (Fig. 2 においては右方)、領域 A^- においては $\dot{x} < 0$ の向き (Fig. 2 で左方) に走る。そのため $q(x)$ の停留点が極大か極小かによって特異点近傍の軌道の様子が二通

りに分れる、それを課題として示せば、

[補題] $q(x)$ の極大点に対応する特異点の近傍の軌道は、鞍部点の近傍の軌道の模様に似、 $q(x)$ の極小点に対応する特異点の近傍の軌道は、渦心点の近傍の軌道の模様に似ている。

この A^0 近傍での軌道の局所的な模様は、定理4, (ii) によって全 (x, ψ) 平面に延長できる、その理由は

$$[H]_{A=0} = q(x) \quad (4.19)$$

により、曲線 $H(x, \psi, \pm 1) = \text{const.}$ は曲線 A^0 と同じ $q(x)$ の値を持つ点で交わるからである。したがって、もし

$H(x, \psi, \pm 1) = \text{const.} > q(x^*)$ ならば、これらの曲線は、曲線 A^0 と決して交わらない。このようにして、停留軌道群は、 $q(x)$ の形状によって定まってしまうのである (Fig. 2 参照)。

Fig. 2 は、 $q(x)$ が2つの極大点 (対応する特異点は S^* と S) と1つの極小点を持つ場合を示している。さて以上の準備のもとに、十分 T が大きいとき、最適軌道を決定することができる。 S^* を最大点に対応するものとする、つまり静最適点とする。また $A^\pm$ は S^* を通る $u = \pm 1$ に対応する2つの軌道とする。さて、与えられた終端条件 $x = x(T)$ または横断性の条件 $\psi(T) = 0$ を、 T 度 $t = T$ なる時刻に満足するためには、どこかで時間待ちをしなければならない。それは、特異操作によ

つて、 S^* または S にとどめておくか、あるいは S を通る閉軌道 γ に沿っての bang-bang 操作によつてのみ可能である。

これら三者のうち、最適軌道は S^* を通る軌道 $\Gamma^\pm$ であることが、つぎのようにして示せる。 S で止まるものが失格であることは自明である。 γ に沿うものが、 S で止まるものよりあることは次のようにして分る。そのためには

$$\int_0^\theta \{f_0(x_s) + g_0(x_s)u_s\} dt > \oint_\gamma \{f_0(x) + g_0(x)u\} dt \quad (4.20)$$

を示せばよい。ここで θ は閉軌道 γ を一周するに要する時間つまり周期である。また u_s は S に状態をとどめておくための特異制御の値である。さて

$$H = f_0(x) + g_0(x)u + \dot{x}\psi$$

であるから、(4.20)式の右辺は、次式で与えられる。

$$\oint_\gamma \{f_0(x) + g_0(x)u\} dt = \oint_\gamma H dt - \psi(x) dx \quad (4.21)$$

ここで $\psi(x)$ は次式から定まり、

$$H = f_0(x) \pm g_0(x) + \{f(x) \pm g(x)\}\psi, \text{ in } A^\pm$$

また(4.19)式より、 H は、

$$H = f(x_s) = f_0(x_s) + g_0(x_s)u_s$$

で定まるから、(4.20)式の差は：左辺－右辺は

$$\oint \psi(x) dx$$

となる。積分路 γ は時計廻りであるから、上の積分は γ で囲まれる図形の面積に等しく、したがって正值である。よって(4.20)式の不等号の向きが成立する。最後に Γ^+ または Γ^- は、どちらかは必ず x 軸と交る($\psi=0$)ことを確かめておこう。それは $x=x^*$ が正準方程式の分離枝であるから当然である。以上によつて、 S^* つまり静最適点を通る軌道が最適であることが知られた。とくに、 S^* が $\psi < 0$ の領域にあれば、弧 PS^*R と QS^*R が最適、反対に $\psi > 0$ の領域にあれば、弧 PS^*R' と QS^*R' が最適軌道となる。そのわけは、横断性の条件を満足するものが、 S^* の位置によつて、 Γ^+ か Γ^- のいずれかとなるからである。以上の考察から、最適制御のアルゴリズムは

- (i) $x > x^*$ ならば, $u = -1$
 - (ii) $x < x^*$ ならば, $u = +1$
 - (iii) $x = x^*$ ならば, $u = u^*$
- (4.22)

となり、これは静最適点への最短時間制御である。また、 T が長くなるにつれ、 x^* に止まる時間も長くなる(QED)。 1

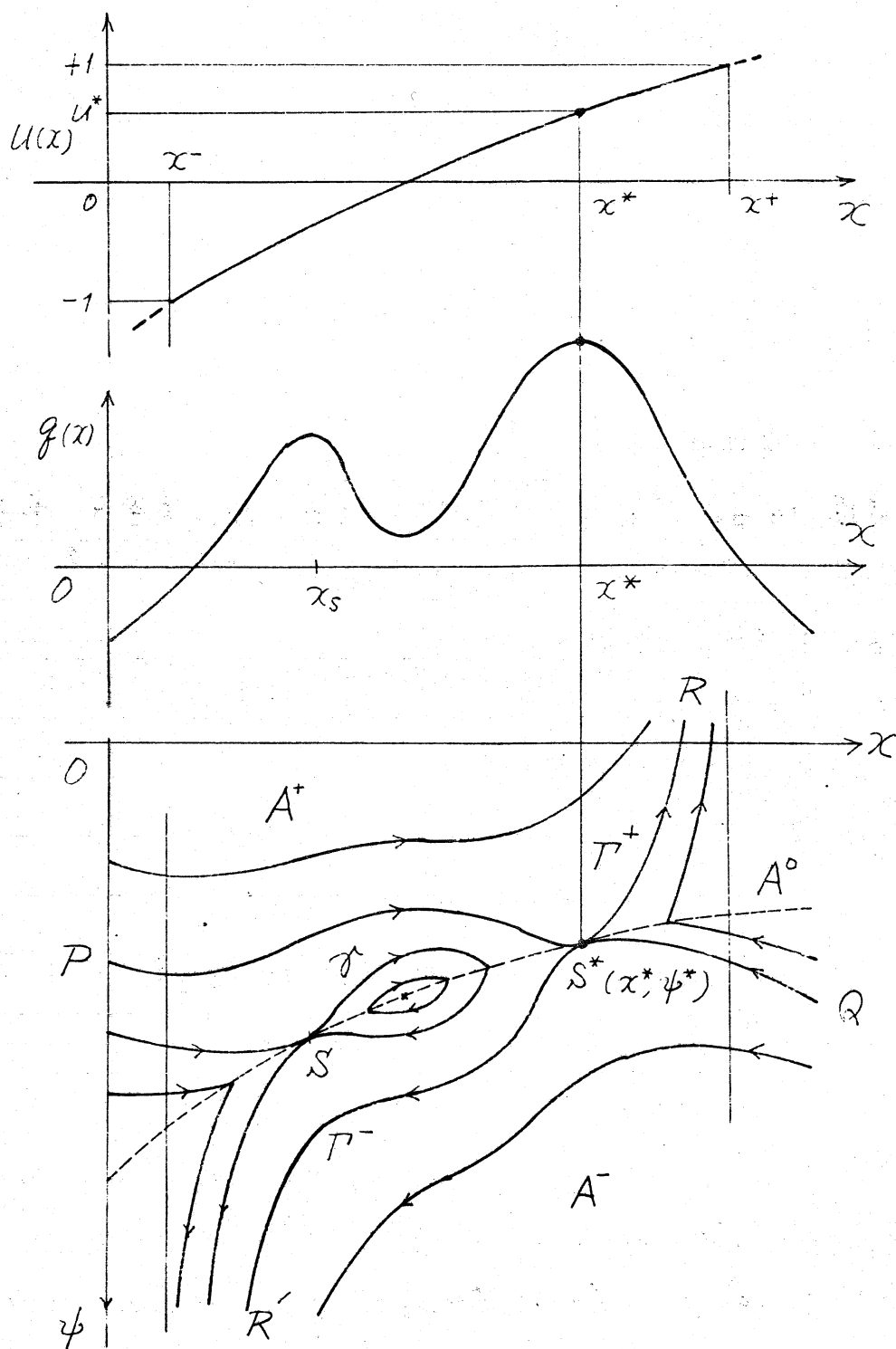


Fig. 2

5 結 言

操作量を線型に含む非線型制御系の最適制御問題を論じ、つぎの結果を得た。

- (i) 運転時間が十分長いときには、静最適操作を動最適操作と見做してもよい条件は (3.4) 式が成立することである。
- (ii) 特に1次元の問題では、動最適制御問題の解は、静最適点への最短時間制御である。

最近 Shima によって、(3.4) 式が成立しない場合は、動最適制御は、境界制御: $u_p(t) \in \partial U$ なることが示された⁴。

終りに臨み、本研究に色々御指示、御協力を戴いた、京大、工、榎木義一教授、京教大、勝向昭一郎助教授、阪大基礎工島助手に深甚なる謝意を表する。

参考文献

- (1) L. S. Pontryagin et al: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*; John Wiley, (1962).
- (2) G. D. Birkhoff: *Dynamical Systems*; Amer. Math. Soc. (1927)
- (3) C. D. Johnson: *Singular Solutions in Problems of Optimal Control*; *Advances in Control Systems*, 2, Academic Press (1965).
- (4) K. Shima: *On the Optimality of the Boundary Control*; (to be published).