

被覆面からの数値等角写像

京都工芸繊維大学工芸科学研究科 米谷 文男 (Fumio Maitani)
Graduate School of Science and Technology, Kyoto Institute of Technology

リーマン面上の函数論的諸量の動きを調べているうちに、与えられた領域のそれらの量がどのような数値をとるのか全く掴んでいないことに身を竦めていた。リーマン面上での数値計算については水本氏 ([6]) の先駆的仕事があるが、近年天野氏等 ([1],[2]) による代用電荷法での数値等角写像が比較的簡単に扱えることを教わった。覚束無いながらもその手習いを紹介しよう。

1 Koebe の写像定理

等角写像の基本的定理として知られる Koebe の写像定理 ([7]) から始めよう。 $G \subset \mathbb{C}$ を多重連結領域とし、 $z_0 \in G$ とする。 G 上の単葉有理型函数の族 $F(G, z_0)$ に属する函数 g は z_0 近傍で

$$g(z) = \begin{cases} z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) z^{-n} & (z_0 = \infty) \\ \frac{1}{z-z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)(z-z_0)^n & (z_0 \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

のように表されているものとする。このとき極値水平 (垂直) 截線写像 $\exists_1 f_h \in F(G, z_0)$ ($\exists_1 f_v \in F(G, z_0)$) があって次の性質を持っている。

$$\sup_{g \in F(G, z_0)} \Re a_1(g) = a_1(f_h), \quad \left(\inf_{g \in F(G, z_0)} \Re a_1(g) = a_1(f_v) \right).$$

与えられた領域 G に対して、極値水平截線領域 $f_h(G)$ 、極値水平截線領域 $f_v(G)$ はどのようなになっており、極値 $a_1(f_h)$ 、 $a_1(f_v)$ はどのような値を取るのか数値的に求めてみたい。次の写像定理もある。

$F(G, R) = \{g; G \text{ から } C_0, C_1 \text{ を内外の境界に写す円環領域 } V_g \text{ への正則写像} \}$
このとき、極値円弧 (放射) 截線円環写像 $\exists_1 f_c \in F(G)$ ($\exists_1 f_r \in F(G)$) があって次の性質を持っている。

$$\inf_{\text{Mod}(V_g); g \in F(G)} = \text{Mod}(V_{f_c}), \quad \left(\sup_{\text{Mod}(V_g); g \in F(G)} = \text{Mod}(V_{f_r}) \right),$$

$\text{Mod}(V_g)$ は V_g のモジュラスである。

2 代用電荷法による数値等角写像

$\{M_\ell\}_{\ell=1}^n$ を互いに素な Jordan 領域として $M = \bigcup_{\ell=1}^n M_\ell$ とする。 $G = \hat{C} - M$ は n -重連結領域となり $F_h (F_v)$ を $f_h (f_v)$ の近似函数とする。 α で h または v を表すものとして

$$F_\alpha(z) = z + \sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell} Q_{\ell,i}^\alpha \log(z - \zeta_{\ell,i}),$$

ここで、 $\zeta_{\ell,i}$ は M_ℓ 内の電荷点であり、 $Q_{\ell,i}^\alpha$ は $\zeta_{\ell,i}$ における電荷量と考えている。 F_α の一価性から

$$0 = \int_{\partial M_\ell} dF_\alpha = \sum_{i=1}^{N_\ell} Q_{\ell,i}^\alpha = 0$$

となり、 $Q_\ell^i(\alpha) = \sum_{k=1}^i Q_{\ell,k}^\alpha$ と置けば

$$\begin{aligned} F_\alpha(z) - z &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell-1} Q_\ell^i(\alpha) \log \frac{z - \zeta_{\ell,i}}{z - \zeta_{\ell,i+1}} \\ &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell-1} Q_\ell^i(\alpha) \left(\log \left| \frac{z - \zeta_{\ell,i}}{z - \zeta_{\ell,i+1}} \right| + i \arg \frac{z - \zeta_{\ell,i}}{z - \zeta_{\ell,i+1}} \right). \end{aligned}$$

境界条件によって、

$$\operatorname{Im} F_h(z_{m,j}) = V_m, \quad \operatorname{Re} F_v(z_{m,j}) = U_m, \quad \{z_{m,j} = x_{m,j} + iy_{m,j}\}_{j=1,2,\dots,N_m} \subset \partial M_m$$

を要請すれば、 $\sum_{\ell=1}^n N_\ell$ 個の未知数

$$\{Q_\ell^i(\alpha)\}_{\ell=1,2,\dots,n, i=1,2,\dots,N_\ell-1}, \{V_m\}_{m=1,2,\dots,n} (\{U_m\}_{m=1,2,\dots,n})$$

を持つ連立方程式

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell-1} Q_\ell^i(h) \arg \frac{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i}}{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i+1}} - V_m &= -y_{m,j} \quad (m = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, N_m), \\ \left(\sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell-1} Q_\ell^i(v) \log \left| \frac{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i}}{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i+1}} \right| - U_m \right. &= \left. -x_{m,j} \quad (m = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, N_m) \right) \end{aligned}$$

が得られる。これを解いて $Q_\ell^i(\alpha)$ を得て F_α が求まる。

3 例

領域の境界が,

$$r_m(t) = a_m + b_m \cos(t) + c_m \cos(2t) + d_m \cos(3t) + b'_m \sin(t) + c'_m \sin(2t) + d'_m \sin(3t)$$

として,

$$\partial M_m = \{x + iy; x = r_m \cos(t) + x_m, y = r_m \sin(t) + y_m\}, m = 1, 2, \dots, n$$

で与えられており, 電荷点を, $0 < \rho_m < 1, t_j = \frac{2\pi j}{N_m}$, として

$$\{\rho_m r_m \cos(t_j) + x_m + i(\rho_m r_m \sin(t_j) + y_m)\}_{j=0,1,\dots,N_m-1},$$

境界束縛点を

$$\{r_m \cos(t_j) + x_m + i(r_m \sin(t_j) + y_m)\}_{j=0,1,\dots,N_m-1}$$

のように配置するものとする。

例 1. $G = \{z; |z| > 2\} \cup \{\infty\}$ に対して,

$$f_h(z) = z + \frac{4}{z}, f_v(z) = z - \frac{4}{z}, \text{ そして } a_1(f_h) = 4, a_1(f_v) = -4$$

が理論値である。 $r_1 = 2, \rho_1 = 0.6$ として数値例は次のようになった。

N_1	$a_1(F_h)$	$a_1(F_v)$	$a_1(F_h) - a_1(F_v)$
3	4.0801702521770426	-3.8709989168130141	7.9511691689900567
10	3.9999866712311313	-4.0000005587595524	7.9999872299906833
20	3.999999997985189	-3.999999999406501	7.999999997391686
30	3.999999999999977	-3.999999999999995	7.999999999999973
31	3.999999999999995	-4.0000000000000035	8.0000000000000035
32	3.999999999999995	-3.999999999999924	7.999999999999920
33	3.999999999999982	-4.0000000000000035	8.0000000000000017
34	4.0000000000000017	-4.0000000000000079	8.0000000000000106
35	4.0000000000000017	-4.0000000000000017	8.0000000000000035
40	4.0000000000000115	-4.0000000000000133	8.0000000000000248
50	3.999999999999928	-3.9999999999996660	7.9999999999996589
60	3.999999999999809	-4.0000000000024620	8.0000000000024424
80	3.999999999343924	-3.999999998757065	7.999999998100985
100	3.999999862123849	-3.999999836610617	7.999999698734463

最も単純な場合であるが、比較的精度よく求まっている。

例 2.

領域の連結度を少し大きくして、 $n = 7, N_m = 20$, として次のように与えたデータ

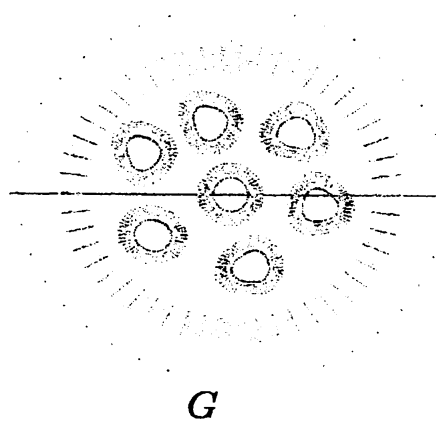
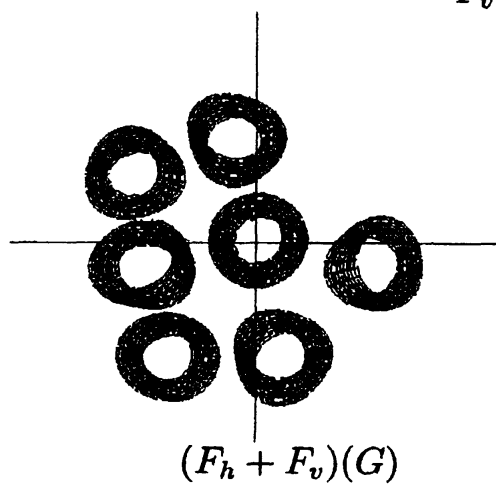
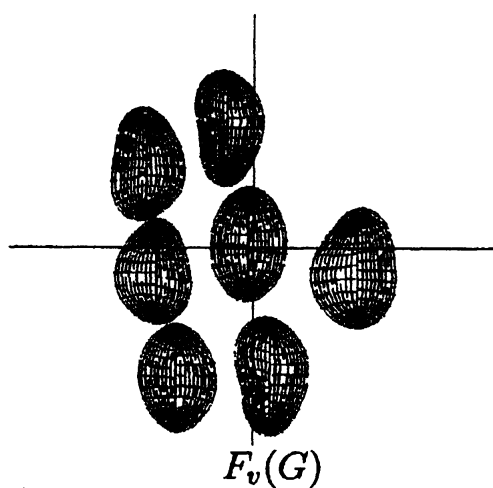
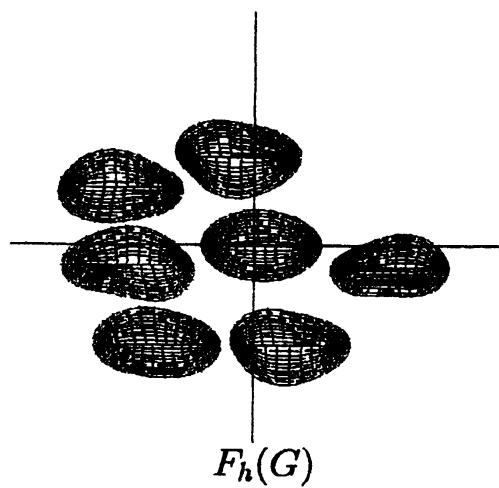
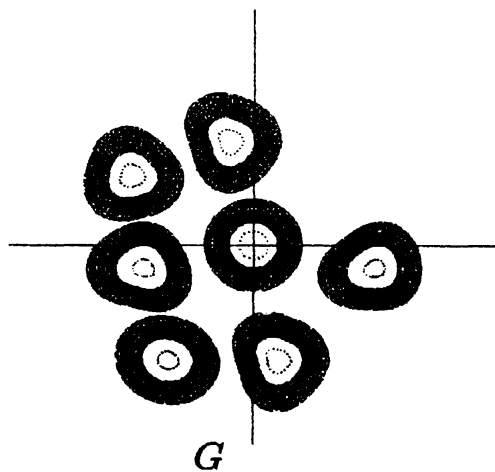
$\backslash m$	1	2	3	4	5	6	7
x_m	0	-7	-10	2	10	-9	-2
y_m	0	-10	6	-10	-2	-2	9
a_m	2	2	2	2	2	2	2
b_m	0	0	0	0.1	-0.1	-0.1	0.1
c_m	0	0.1	0	-0.1	0.1	0.1	-0.1
d_m	0	0	0.1	0.1	-0.1	-0.1	0.1
b'_m	0	0	0	0	0	0	0
c'_m	0	-0.1	0	-0.1	0.1	-0.1	-0.1
d'_m	0	0	-0.1	0.1	-0.1	-0.1	0.1
ρ_m	0.6	0.4	0.5	0.5	0.4	0.4	0.5

による結果は次のようになった。截線位置は

$V_1 = -0.1271785729$	$U_1 = -0.4395905987$
$V_2 = -8.7250929885$	$U_2 = -6.3244275738$
$V_3 = 4.9936400236$	$U_3 = -8.8404996986$
$V_4 = -8.7776892726$	$U_4 = 1.4094530922$
$V_5 = -1.9696910082$	$U_5 = 8.4893133217$
$V_6 = -1.8096235983$	$U_6 = -7.9712762687$
$V_7 = 7.6064915766$	$U_7 = -2.1892279424$

極値とスパンは

$a_1(F_h)$	$a_1(F_v)$	$a_1(F_h) - a_1(F_v)$
28.4520876968	-28.4362468406	56.8883345375



4 電荷点の変更

代用電荷法の要素は電荷点の位置，束縛点の位置でありこれらが近似精度に反映するものと考えられる。そこでその良い配置を得る一つの試み ([4]) を行った。 F_α のローラン展開の一次項の係数 $a_1(F_\alpha)$ は

$$a_1(F_\alpha) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell-1} Q_\ell^i(\alpha) (\zeta_{\ell,i+1} - \zeta_{\ell,i}).$$

そこで，

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{k,s}} \Re a_1(F_\alpha) = Q_k^{s-1}(\alpha) - Q_k^s(\alpha) + \sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell-1} \frac{\partial Q_\ell^i(\alpha)}{\partial \xi_{k,s}} (\xi_{\ell,i+1} - \xi_{\ell,i}),$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_{k,s}} \Re a_1(F_\alpha) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell-1} \frac{\partial Q_\ell^i(\alpha)}{\partial \eta_{k,s}} (\xi_{\ell,i+1} - \xi_{\ell,i}).$$

一方 $m = 1, 2, \dots, n$ and $j = 1, 2, \dots, N_m$ に対して，

$$\sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell-1} \frac{\partial Q_\ell^i(h)}{\partial \xi_{k,s}} \arg \frac{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i}}{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i+1}} - \frac{\partial V_m}{\partial \xi_{k,s}} + \frac{Q_k^s(h)(y_{m,j} - \eta_{k,s}) - Q_k^{s-1}(h)(y_{m,j} - \eta_{k,s})}{(x_{m,j} - \xi_{k,s})^2 + (y_{m,j} - \eta_{k,s})^2} = 0,$$

$$\sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell-1} \frac{\partial Q_\ell^i(h)}{\partial \eta_{k,s}} \arg \frac{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i}}{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i+1}} - \frac{\partial V_m}{\partial \eta_{k,s}} - \frac{Q_k^s(h)(x_{m,j} - \xi_{k,s}) - Q_k^{s-1}(h)(x_{m,j} - \xi_{k,s})}{(x_{m,j} - \xi_{k,s})^2 + (y_{m,j} - \eta_{k,s})^2} = 0,$$

$$\sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell-1} \frac{\partial Q_\ell^i(v)}{\partial \xi_{k,s}} \log \left| \frac{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i}}{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i+1}} \right| - \frac{\partial U_m}{\partial \xi_{k,s}} - \frac{Q_k^s(v)(x_{m,j} - \xi_{k,s}) - Q_k^{s-1}(v)(x_{m,j} - \xi_{k,s})}{(x_{m,j} - \xi_{k,s})^2 + (y_{m,j} - \eta_{k,s})^2} = 0,$$

$$\sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^{N_\ell-1} \frac{\partial Q_\ell^i(v)}{\partial \eta_{k,s}} \log \left| \frac{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i}}{z_{m,j} - \zeta_{\ell,i+1}} \right| - \frac{\partial U_m}{\partial \eta_{k,s}} - \frac{Q_k^s(v)(y_{m,j} - \eta_{k,s}) - Q_k^{s-1}(v)(y_{m,j} - \eta_{k,s})}{(x_{m,j} - \xi_{k,s})^2 + (y_{m,j} - \eta_{k,s})^2} = 0$$

が成り立ち， $\{\frac{\partial Q_\ell^i(h)}{\partial \xi_{k,s}}, \frac{\partial Q_\ell^i(v)}{\partial \xi_{k,s}}, \frac{\partial V_m}{\partial \xi_{k,s}}, \frac{\partial U_m}{\partial \xi_{k,s}}\}$ と $\{\frac{\partial Q_\ell^i(h)}{\partial \eta_{k,s}}, \frac{\partial Q_\ell^i(v)}{\partial \eta_{k,s}}, \frac{\partial V_m}{\partial \eta_{k,s}}, \frac{\partial U_m}{\partial \eta_{k,s}}\}$ が求まる。これを代入して， $\frac{\partial}{\partial \xi_{k,s}} \Re a_1(F_\alpha) > 0$ となる時， $\zeta_{k,s}$ を実正方向に少し動かせば， $\Re a_1(F_\alpha)$ は大きくなるだろう。 f_h は極値問題の極大値 $\Re a_1(f_h)$ を与えているから， $\Re a_1(F_h)$ が大きい方が f_h の良い近似を与えていると期待できる。極値問題は単葉函数の中で考えられており， F_h は必ずしも単葉で無い点が問題である。実際，数値実験の結果でも良い効果が得られていない。

例 3. 7 重連結の場合 $M=21$ で左が電荷点変更前, 右が変更後の截線位置

$V_1 = -0.1271841524$	$V_1 = -0.1271851298$
$V_2 = -8.7250837252$	$V_2 = -8.7250816582$
$V_3 = 4.9936501974$	$V_3 = 4.9936520259$
$V_4 = -8.7777052876$	$V_4 = -8.7777082706$
$V_5 = -1.9696964214$	$V_5 = -1.9696984733$
$V_6 = -1.8096135273$	$V_6 = -1.8096135897$
$V_7 = 7.6064735204$	$V_7 = 7.6064701420$
$U_1 = -0.4395958439$	$U_1 = -0.4395961652$
$U_2 = -6.3243937220$	$U_2 = -6.3243930762$
$U_3 = -8.8404928877$	$U_3 = -8.8404912087$
$U_4 = 1.4094515582$	$U_4 = 1.4094508292$
$U_5 = 8.4892877760$	$U_5 = 8.4892871101$
$U_6 = -7.9713035791$	$U_6 = -7.9713035942$
$U_7 = -2.1892498628$	$U_7 = -2.1892532157$

左が電荷点変更前, 右が変更後の極値, スパン

$a1 = 28.452106164546783872993$	$a1 = 28.452111016419923572585$
$b1 = -28.436455860839156883912$	$b1 = -28.436466689077693814625$
$a1 - b1 = 56.888562025385937204192$	$a1 - b1 = 56.888577705497617387209$

5 被覆面

複素平面内の領域でなく, 複素平面を多重に覆う領域からの等角写像を試みよう。 G は分岐点 a, b 分岐線 C_2, C_3 とする 2 重連結な被覆面で $\partial G = C_0 \cup C_1$ とする。即ち, C_2, C_3 は共に a, b とする線分で C_0, C_2 を境界とする 2 重連結領域と C_1, C_3 を境界とする 2 重連結領域が C_2, C_3 で接着されていると考える。

線形変換

$$S(z) = \frac{2}{a-b}z + \frac{b+a}{b-a}, \quad S(a) = 1, \quad S(b) = -1$$

によって $C_2 = C_3$ は線分 $[-1, 1]$ に写る。これらは Joukowski 変換

$$J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

の逆写像によって、単位円周に写る。 G から単位円周を外境界とする円環への等角写像 f を考える。 $J^{-1} \circ S(C_0)$ と単位円周を境界とする 2 重連結領域を G_1 , $T \circ J^{-1} \circ S(C_1)$ と単位円周を境界とする 2 重連結領域を G_2 とする。ここで、

$$f_1 = f \circ J \circ S^{-1}, f_2 = f \circ J \circ S^{-1} \circ T, T(z) = \frac{1}{z}$$

と置けば、単位円周上の接着点では、

$$f_1(e^{i\theta}) = f_2(e^{i\theta})$$

となっている。そこで、柴氏の教示に従って、

Painlevé の定理 ([3])

領域 $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ で $\partial G_1 \cap \partial G_2 = C$ は滑らかな Jordan 曲線になっており、 $f_1 \in A(G_1) \cap C(G_1 \cup C)$, $f_2 \in A(G_2) \cap C(G_2 \cup C)$ が $z \in C$ に対して、 $f_1(z) = f_2(z)$ を満たしているとする。その時、 f_2 は f_1 の C を超えての解析接続である。

に依拠しつつ、この f_1, f_2 の近似函数を代用電荷法によって求めてみよう。

f_i の近似函数 F_i が次のように表されているとしよう。

$$f_1(z) \doteq F_1(z) = z \exp(G_1(z) + iH_1(z)),$$

$$f_2(z) \doteq F_2(z) = z \exp(G_2(z) + iH_2(z)),$$

$$G_1(z) + iH_1(z) = {}_1Q_0 + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n,k} \log(z - \zeta_{2n,k}),$$

$$G_2(z) + iH_2(z) = {}_2Q_0 + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n+1,k} \log(z - \zeta_{2n+1,k}).$$

ここで、 $\zeta_{n,k}$ を電荷点 $Q_{2n,k}$ をその電荷量と考えている。正規化条件

$$z_0 \in J \circ S(C_0), 1 = f_1(z_0) = F_1(z_0) = z_0 \exp(G_1(z_0) + iH_1(z_0))$$

によって、

$$-\log z_0 = G_1(z_0) + iH_1(z_0) = {}_1Q_0 + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n,k} \log(z_0 - \zeta_{2n,k})$$

を用いて、

$$G_1(z) + iH_1(z) = \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n,k} \log \frac{(z - \zeta_{2n,k})}{(z_0 - \zeta_{2n,k})} - \log z_0$$

と表すことができる。

$1 \in J^{-1} \circ S(C_2) = T \circ J^{-1} \circ S(C_3)$ に対して,

$$F_1(1) = F_2(1), \quad G_1(1) + iH_1(1) = G_2(1) + iH_2(1)$$

より,

$$\begin{aligned} {}_2Q_0 + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n+1,k} \log(1 - \zeta_{2n+1,k}) \\ = \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n,k} (\log(1 - \zeta_{2n,k}) - \log(z_0 - \zeta_{2n,k})) - \log z_0. \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned} {}_2Q_0 = \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n,k} (\log(1 - \zeta_{2n,k}) - \log(z_0 - \zeta_{2n,k})) - \log z_0 \\ - \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n+1,k} \log(1 - \zeta_{2n+1,k}). \end{aligned}$$

そこで,

$$\begin{aligned} G_2(z) + iH_2(z) \\ = \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} (Q_{2n+1,k} \log \frac{(z - \zeta_{2n+1,k})}{(1 - \zeta_{2n+1,k})} + Q_{2n,k} \log \frac{(1 - \zeta_{2n,k})}{(z_0 - \zeta_{2n,k})}) - \log z_0. \end{aligned}$$

$Q'_n = \sum_{k=0}^{\ell} Q_{n,k}$ と置いて, f は円環への写像だから,

$$2\pi i = \int_{C_0} d \log f = \int_{J \circ S(C_0)} d \log F_1 = \int_{J \circ S(C_0)} d(\log z + G_1(z) + iH_1(z)).$$

よって,

$$0 = \int_{J \circ S(C_0)} d(G_1(z) + iH_1(z)) = 2\pi i \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2,k}, \quad \therefore Q_2^{N-1} = 0.$$

F_1 の scale 不変性を仮定すれば,

$$\begin{aligned}
 F_1(\alpha z, \{\alpha \zeta_{n,k}\}) &= \alpha z \exp({}_1Q_0 + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n,k} \log(\alpha z - \alpha \zeta_{2n,k})) \\
 &= \alpha \exp(\log \alpha \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n,k}) z \exp({}_1Q_0 + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n,k} \log(z - \zeta_{2n,k})) \\
 &= \alpha \exp(\log \alpha \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} Q_{2n,k}) F_1(z, \{\zeta_{n,k}\}) = F_1(z, \{\zeta_{n,k}\}), \therefore Q_0^{N-1} = -1.
 \end{aligned}$$

同様にして,

$$0 = \int_{T \circ J \circ S(C_1)} d(G_2(z) + iH_2(z)) = 2\pi i \sum_{k=0}^{N-1} Q_{3,k}, \therefore Q_1^{N-1} = 0.$$

F_2 の scale 不変性によって $Q_3^{N-1} = -1$ となる。

$Q_{n,k} = Q_n^k - Q_n^{k-1}$ ($Q_{2n}^{-1} = 0$) によって,

$$\begin{aligned}
 G_1(z) + iH_1(z) &= \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} (Q_{2n}^k - Q_{2n}^{k-1}) \log \frac{(z - \zeta_{2n,k})}{(z_0 - \zeta_{2n,k})} - \log z_0 \\
 &= \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \log \frac{(z - \zeta_{2n,k})(z_0 - \zeta_{2n,k+1})}{(z_0 - \zeta_{2n,k})(z - \zeta_{2n,k+1})} - \log \frac{(z - \zeta_{0,N-1})}{(z_0 - \zeta_{0,N-1})} - \log z_0
 \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned}
 G_2(z) + iH_2(z) &= \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} ((Q_{2n+1}^k - Q_{2n+1}^{k-1}) \log \frac{(z - \zeta_{2n+1,k})}{(1 - \zeta_{2n+1,k})} \\
 &\quad + (Q_{2n}^k - Q_{2n}^{k-1}) \log \frac{(1 - \zeta_{2n,k})}{(z_0 - \zeta_{2n,k})}) - \log z_0 \\
 &= \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} (Q_{2n+1}^k \log \frac{(z - \zeta_{2n+1,k})(1 - \zeta_{2n+1,k+1})}{(1 - \zeta_{2n+1,k})(z - \zeta_{2n+1,k+1})} \\
 &\quad + Q_{2n}^k \log \frac{(1 - \zeta_{2n,k})(z_0 - \zeta_{2n,k+1})}{(z_0 - \zeta_{2n,k})(1 - \zeta_{2n,k+1})}) \\
 &\quad - \log \frac{(z - \zeta_{3,N-1})}{(1 - \zeta_{3,N-1})} - \log \frac{(1 - \zeta_{0,N-1})}{(z_0 - \zeta_{0,N-1})} - \log z_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} (Q_{2n+1}^k \log \frac{(z - \zeta_{2n+1,k})(1 - \zeta_{2n+1,k+1})}{(1 - \zeta_{2n+1,k})(z - \zeta_{2n+1,k+1})} \\
&\quad + Q_{2n}^k \log \frac{(1 - \zeta_{2n,k})(z_0 - \zeta_{2n,k+1})}{(z_0 - \zeta_{2n,k})(1 - \zeta_{2n,k+1})}) \\
&\quad - \log \frac{(z - \zeta_{3,N-1})(1 - \zeta_{0,N-1})}{(1 - \zeta_{3,N-1})(z_0 - \zeta_{0,N-1})} - \log z_0
\end{aligned}$$

となる。

境界束縛点 $z_{0,j} \in J \circ S(C_0), j = 0, \dots, N-1$ に於いて,

$$1 = |f_1(z_{0,j})| = |F_1(z_{0,j})| = |z_{0,j}| \exp G_1(z_{0,j})$$

だから,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \log \frac{|z_{0,j} - \zeta_{2n,k}| |z_0 - \zeta_{2n,k+1}|}{|z_{0,j} - \zeta_{2n,k+1}| |z_0 - \zeta_{2n,k}|} - \log \frac{|z_{0,j} - \zeta_{0,N-1}|}{|z_0 - \zeta_{0,N-1}|} \\
&= \log |z_0| - \log |z_{0,j}|.
\end{aligned}$$

従って,

$$\sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \log \frac{|z_{0,j} - \zeta_{2n,k}| |z_0 - \zeta_{2n,k+1}|}{|z_{0,j} - \zeta_{2n,k+1}| |z_0 - \zeta_{2n,k}|} = \log \frac{|z_{0,j} - \zeta_{0,N-1}| |z_0|}{|z_0 - \zeta_{0,N-1}| |z_{0,j}|}.$$

境界束縛点 $z_{1,j} \in T \circ J \circ S(C_1), j = 0, \dots, N-1$ に於いて,

$$R = |f_2(z_{1,j})| = |F_2(z_{1,j})| = |z_{1,j}| \exp G_2(z_{1,j})$$

によって,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} (Q_{2n+1}^k \log \frac{|z_{1,j} - \zeta_{2n+1,k}| |1 - \zeta_{2n+1,k+1}|}{|z_{1,j} - \zeta_{2n+1,k+1}| |1 - \zeta_{2n+1,k}|} \\
&\quad + Q_{2n}^k \log \frac{|z_0 - \zeta_{2n,k+1}| |1 - \zeta_{2n,k}|}{|z_0 - \zeta_{2n,k}| |1 - \zeta_{2n,k+1}|}) \\
&\quad - \log \frac{|z_{1,j} - \zeta_{3,N-1}| |1 - \zeta_{0,N-1}|}{|z_0 - \zeta_{0,N-1}| |1 - \zeta_{3,N-1}|} - \log |z_0| + \log |z_{1,j}| = \log R.
\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n+1}^k \log \frac{|z_{1,j} - \zeta_{2n+1,k}| |1 - \zeta_{2n+1,k+1}|}{|z_{1,j} - \zeta_{2n+1,k+1}| |1 - \zeta_{2n+1,k}|} \\
& + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \log \frac{|z_0 - \zeta_{2n,k+1}| |1 - \zeta_{2n,k}|}{|z_0 - \zeta_{2n,k}| |1 - \zeta_{2n,k+1}|} - \log R \\
& = \log \frac{|z_{1,j} - \zeta_{3,N-1}| |1 - \zeta_{0,N-1}| |z_0|}{|z_0 - \zeta_{0,N-1}| |1 - \zeta_{3,N-1}| |z_{1,j}|}.
\end{aligned}$$

次に、接着点 $e^{i\theta_j} \in J \circ S(C_2) = T \circ J \circ S(C_3)$, $j = 0, \dots, N-1$ に於いては、

$$f_1(e^{i\theta_j}) = f_2(e^{i\theta_j}) = F_2(e^{i\theta_j}) = F_1(e^{i\theta_j})$$

を要請する。

$$G_1(e^{i\theta_j}) + iH_1(e^{i\theta_j}) = G_2(e^{i\theta_j}) + iH_2(e^{i\theta_j})$$

によって、

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \log \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k})(z_0 - \zeta_{2n,k+1})}{(z_0 - \zeta_{2n,k})(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k+1})} - \log \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{0,N-1})}{(z_0 - \zeta_{0,N-1})} - \log z_0 \\
& = \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} (Q_{2n+1}^k \log \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k})(1 - \zeta_{2n+1,k+1})}{(1 - \zeta_{2n+1,k})(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k+1})} \\
& \quad + Q_{2n}^k \log \frac{(1 - \zeta_{2n,k})(z_0 - \zeta_{2n,k+1})}{(z_0 - \zeta_{2n,k})(1 - \zeta_{2n,k+1})}) \\
& \quad - \log \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{3,N-1})(1 - \zeta_{0,N-1})}{(1 - \zeta_{3,N-1})(z_0 - \zeta_{0,N-1})} - \log z_0
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n+1}^k \log \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k})(1 - \zeta_{2n+1,k+1})}{(1 - \zeta_{2n+1,k})(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k+1})} \\
& + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \log \frac{(1 - \zeta_{2n,k})(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k+1})}{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k})(1 - \zeta_{2n,k+1})}
\end{aligned}$$

$$= \log \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{3,N-1})(1 - \zeta_{0,N-1})}{(1 - \zeta_{3,N-1})(e^{i\theta_j} - \zeta_{0,N-1})}.$$

この実部は

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n+1}^k \log \frac{|e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k}| |1 - \zeta_{2n+1,k+1}|}{|e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k+1}| |1 - \zeta_{2n+1,k}|} \\ & \quad + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \log \frac{|e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k+1}| |1 - \zeta_{2n,k}|}{|e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k}| |1 - \zeta_{2n,k+1}|} \\ & = \log \frac{|e^{i\theta_j} - \zeta_{3,N-1}| |1 - \zeta_{0,N-1}|}{|e^{i\theta_j} - \zeta_{0,N-1}| |1 - \zeta_{3,N-1}|}. \end{aligned}$$

そして虚部は

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n+1}^k \operatorname{Arg} \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k})(1 - \zeta_{2n+1,k+1})}{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k+1})(1 - \zeta_{2n+1,k})} \\ & \quad + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \operatorname{Arg} \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k+1})(1 - \zeta_{2n,k})}{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k})(1 - \zeta_{2n,k+1})} \\ & = \operatorname{Arg} \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{3,N-1})(1 - \zeta_{0,N-1})}{(e^{i\theta_j} - \zeta_{0,N-1})(1 - \zeta_{3,N-1})}. \end{aligned}$$

以上まとめて次の連立方程式が得られる。

$z_{0,j} \in J \circ S(C_0), j = 0, \dots, N-1$ に対して,

$$\sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \log \frac{|z_{0,j} - \zeta_{2n,k}| |z_0 - \zeta_{2n,k+1}|}{|z_{0,j} - \zeta_{2n,k+1}| |z_0 - \zeta_{2n,k}|} = \log \frac{|z_{0,j} - \zeta_{0,N-1}| |z_0|}{|z_0 - \zeta_{0,N-1}| |z_{0,j}|}.$$

$z_{1,j} \in T \circ J \circ S(C_1), j = 0, \dots, N-1$ に対して,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n+1}^k \log \frac{|z_{1,j} - \zeta_{2n+1,k}| |1 - \zeta_{2n+1,k+1}|}{|z_{1,j} - \zeta_{2n+1,k+1}| |1 - \zeta_{2n+1,k}|} \\ & \quad + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \log \frac{|z_0 - \zeta_{2n,k+1}| |1 - \zeta_{2n,k}|}{|z_0 - \zeta_{2n,k}| |1 - \zeta_{2n,k+1}|} - \log R \\ & = \log \frac{|z_{1,j} - \zeta_{3,N-1}| |1 - \zeta_{0,N-1}| |z_0|}{|z_0 - \zeta_{0,N-1}| |1 - \zeta_{3,N-1}| |z_{1,j}|}. \end{aligned}$$

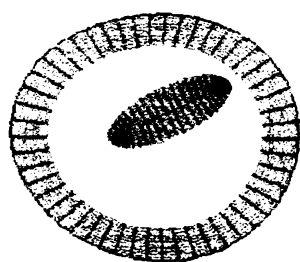
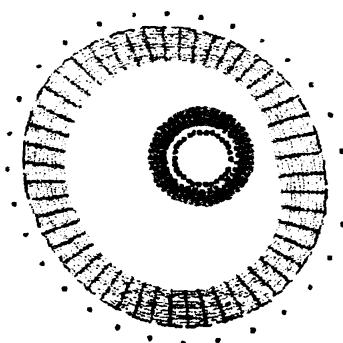
$e^{i\theta_j} \in J \circ S(C_2) = T \circ J \circ S(C_3), j = 0, \dots, N-1$ に対して,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n+1}^k \log \frac{|e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k}| |1 - \zeta_{2n+1,k+1}|}{|e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k+1}| |1 - \zeta_{2n+1,k}|} \\
& \quad + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \log \frac{|e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k+1}| |1 - \zeta_{2n,k}|}{|e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k}| |1 - \zeta_{2n,k+1}|} \\
& = \log \frac{|e^{i\theta_j} - \zeta_{3,N-1}| |1 - \zeta_{0,N-1}|}{|e^{i\theta_j} - \zeta_{0,N-1}| |1 - \zeta_{3,N-1}|}, \\
& \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n+1}^k \text{Arg} \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k})(1 - \zeta_{2n+1,k+1})}{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n+1,k+1})(1 - \zeta_{2n+1,k})} \\
& \quad + \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \text{Arg} \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k+1})(1 - \zeta_{2n,k})}{(e^{i\theta_j} - \zeta_{2n,k})(1 - \zeta_{2n,k+1})} \\
& = \text{Arg} \frac{(e^{i\theta_j} - \zeta_{3,N-1})(1 - \zeta_{0,N-1})}{(e^{i\theta_j} - \zeta_{0,N-1})(1 - \zeta_{3,N-1})}.
\end{aligned}$$

この連立方程式から Q_n^k を求めて

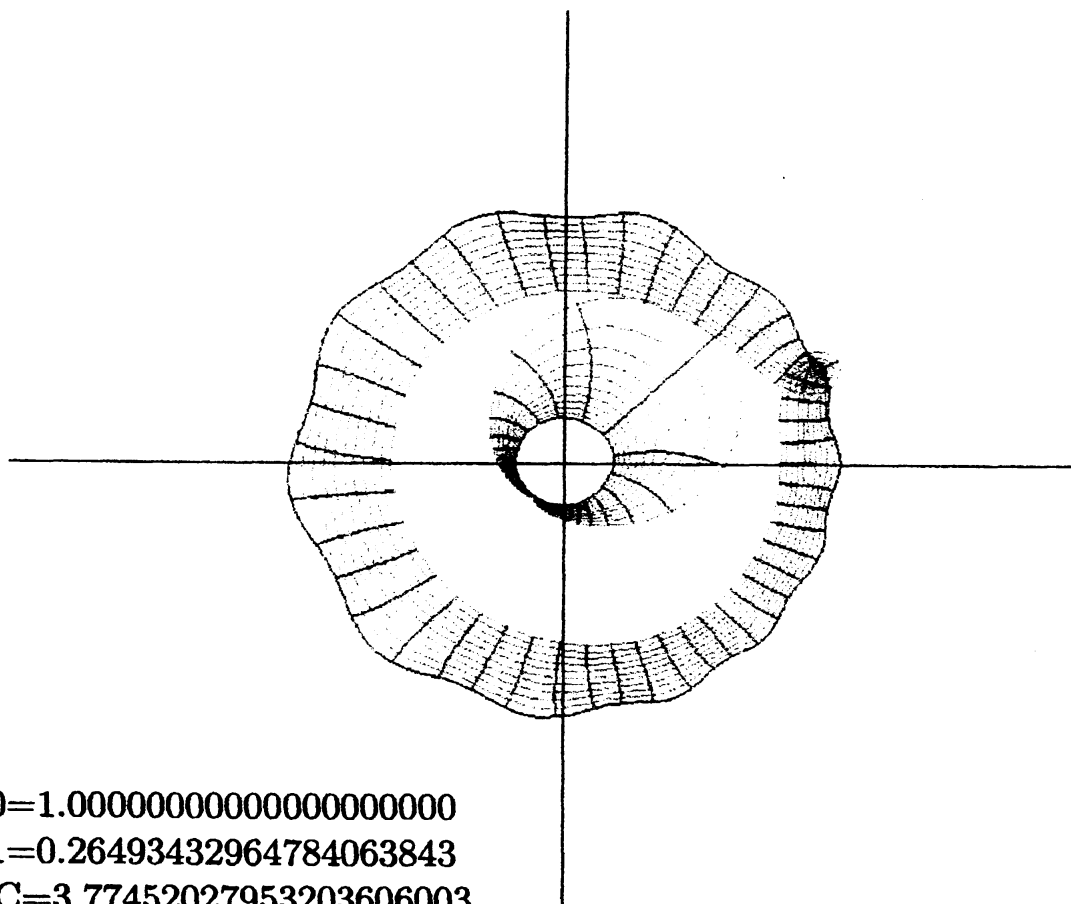
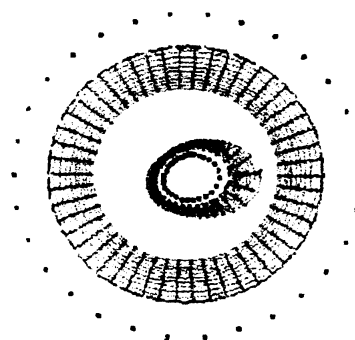
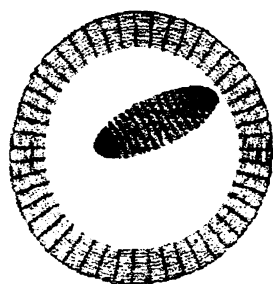
$$\begin{aligned}
F_1(z) &= z \exp(G_1(z) + iH_1(z)) \\
&= \frac{z(z_0 - \zeta_{0,N-1})}{(z - \zeta_{0,N-1})z_0} \exp \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} Q_{2n}^k \log \frac{(z - \zeta_{2n,k})(z_0 - \zeta_{2n,k+1})}{(z_0 - \zeta_{2n,k})(z - \zeta_{2n,k+1})} \\
F_2(z) &= z \exp(G_2(z) + iH_2(z)) \\
&= \frac{z(z_0 - \zeta_{0,N-1})(1 - \zeta_{3,N-1})}{(z - \zeta_{3,N-1})z_0(1 - \zeta_{0,N-1})} \times \\
& \quad \exp \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^{N-2} (Q_{2n+1}^k \log \frac{(z - \zeta_{2n+1,k})(1 - \zeta_{2n+1,k+1})}{(1 - \zeta_{2n+1,k})(z - \zeta_{2n+1,k+1})} \\
& \quad + Q_{2n}^k \log \frac{(1 - \zeta_{2n,k})(z_0 - \zeta_{2n,k+1})}{(z_0 - \zeta_{2n,k})(1 - \zeta_{2n,k+1})})
\end{aligned}$$

の表現を得る。


 $J^{-1} \circ S$


第一シート

第二シート



$R0=1.00000000000000000000$
 $R1=0.26493432964784063843$
 $MC=3.77452027953203606003$

References

- [1] K. Amano, Y. Shibuya, M. Tsuchie and M. Sugihara, Numerical conformal mapping onto the parallel slit domains by the charge simulation method (in Japanese), *Trans. Japan. SIAM*, 6, No.4 , 1996, pp.353-371.
- [2] H. Ogata, D. Okano and K. Amano, Numerical conformal mapping of periodic structure domains, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 19, 2002, pp.257-275.
- [3] Y. Kusunoki, Function theory (in Japanese), *Asakura*, 1973, p.408.
- [4] F. Maitani, Conformal slit mapping from periodic domain, *Kodai. Math. Jour*, 28, 2005, pp.265-274.
- [5] F. Maitani and Y. Kusunoki, Canonical functions on open Riemann surfaces, *Complex Variables*, 18, 1992, pp.267-281.
- [6] H. Mizumoto Difference calculus on manifolds(in Japanese), *Kyouiku*, 1973, p.253.
- [7] N. Suita, Modern function theory II(in Japanese), *Morikita*, 1977, p.196.
- [8] L. Sario and K. Oikawa, Capacity functions, *Springer-Verlag*, 1969, p.361.