

26. 重力場でのパターン形成

志田 晃一郎(電通大) 川合 敏雄(慶應大) 池野信一(電通大)

【概要】

一般には、粒子同士の衝突は系の秩序を失わせる方向に働く。けれども、重力場での非弾性衝突は、むしろ系の形を簡単にすることがある。土星環の形成の問題をヒントにしたモデルによりこのことを計算実験した。既にBrahic(1976)らによって、中心星の周りに3次元のトーラス状に分布した粒子が、互いに非弾性衝突することで2次元の円盤になることが示されている。私たちは、ある衝突モデルにおいて2次元円盤がさらに1次元の細い環(ringlet)になることを示す。(つぶれる環の図)

【計算モデル】

粒子はすべて同一の直径 D と質量 m をもつ球形で、自転は考えない。また粒子は十分軽くて、粒子間重力は省略できるとし、中心力場と衝突時の撃力だけを考える。さらに割れたり、合体したりしない。粒子の満たす運動方程式と運動量保存則は次の通り。

1. 運動方程式

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -M m_i \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} + (\text{impulsive force})$$

2. 運動量保存則

$$\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad (\text{ここで } m_1 = m_2)$$

ここで、重力定数を1とした。また、以下中心星の質量 M も1とする。

衝突のモデルとして、異なる2つのモデルを考えた。粘性モデルは、粒子の相対速度が3成分とも反発係数 e 倍になるようなモデルである。すなわち、

$$\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1 = \frac{1+e}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

$$\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2' = -e (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

なる速度変化を起こすとする。

なめらかな球モデルは相対速度の法線成分だけが e 倍になり、接線成分は影響を受けない。すなわち、

$$\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1 = \frac{1+e}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} ((\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

$$(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2') \cdot \mathbf{n} = -e (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}$$

となる。

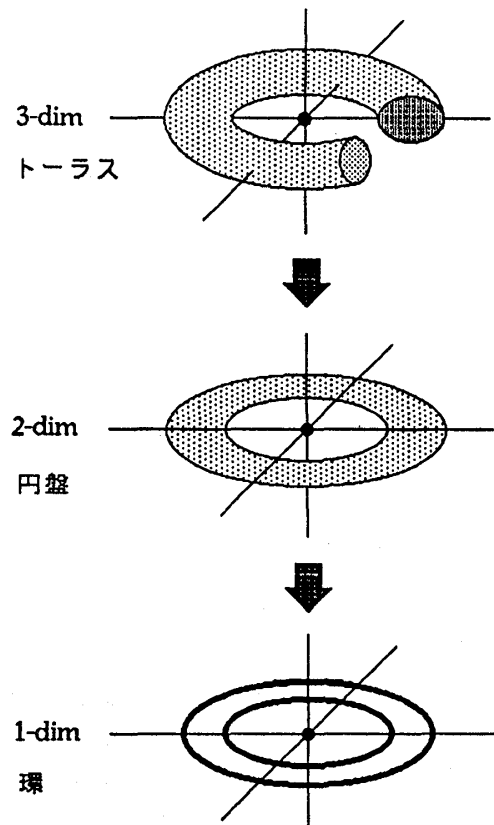


図1 潰れる環

研究会報告

【初期条件】

半径1, 初速度1, 周期 2π の円軌道を基準にし, それを少しずらして各粒子の軌道を作る. δ を標準偏差 σ の正規乱数, θ を $[0..2\pi]$ の一様乱数とする. これより各粒子の初期条件を,

$$x = \begin{bmatrix} \cos \theta + \delta_1 \\ \sin \theta + \delta_2 \\ 0 \end{bmatrix}, v = k \begin{bmatrix} -\sin \theta + \delta_3 \\ \cos \theta + \delta_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする. こうすると, 正規乱数的な広がりを持つ2次元円盤ができる. k は粒子の角運動量を1に規格化するためのものである. 規格化により, 全ての粒子の軌道が変わる(衝突の可能性がある)ことが保証される. そうでない場合については, 後で述べる.

実験のパラメータは4つある. 粒子の数 N , 直径 D , 反発係数 e そして軌道の広がりパラメータ σ である. 今回の実験では N は40ないし100個と少ないが, 現象を見るには十分である. e を0.1と低めに取ったのは, 衝突の効果を高めるためである.

軌道の広がり尺度としてポアンカレマップと呼ぶものを用いる. (ポアンカレ平面の図) これは, $x-z$ 平面を粒子が横切るときの x 座標を記録したものである. 粒子の分布は均等なので, ポアンカレマップで環の幅を代表させられる. その時間経過を調べる.

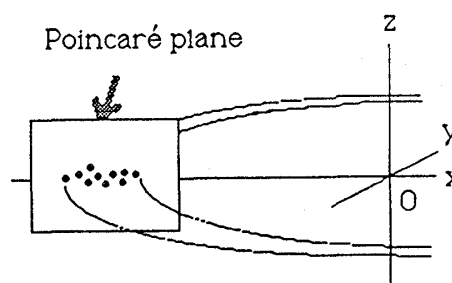


図2 ポアンカレ平面

【実験結果】

粘性衝突モデルを使って計算した結果を図3に示す. 左上の図は z 軸方向からみたリングの進化の様子を時間を追って示したものである. 1~8は環の幅を見やすくするために時間をずらした約40枚の画像を重ねてある. 9つめは1000周後の粒子の位置を表わす. 軌道の上に均等に分布して依然として環をなしていることが分かる. 非弾性衝突により環の幅が縮まり, 一定の幅に落ち着くことが分かる. 衝突により粒子同士の相対速度が小さくなりお互いの軌道が似てくるのである. パラメータを変えた実験により, 残る幅は D に比例し, σ には関係しないことが分かった. $D \rightarrow 0$ の極限では, 最後は一線になると予想される. また進化の速度も D に比例するが, これは2次元の全衝突断面積が D に比例するためであろう. 進化の速さには e , σ も関係している. e を1にしたとき, すなわち弾性衝突では環の幅は縮まらない.

なお, 角運動量を規格化しなかった場合の例を図4に示す. この時, 粒子は衝突するもの同士グループ化されて複数の環に分裂する. 各々の環は, 分かれた後は独立に進化する.

なめらかな球モデルでは, 現在幅が縮まるような結果は得られていない.

【理論的考察】

次のような仮定の下で考察する.

1. 質量 m , 直径 D の共通な N 個の粒子を考える.
2. 粒子間引力は無視できる.
3. 衝突は粘性モデルで, 分裂や合体は考えない.
4. $D \rightarrow 0$ の極限でも十分待てば衝突は起こる.

1から3までは計算実験と同じで4だけ異なる. 4の意味は, 有限の衝突断面積を持つにもかかわらず, 点同士の衝突のように振舞うということである.

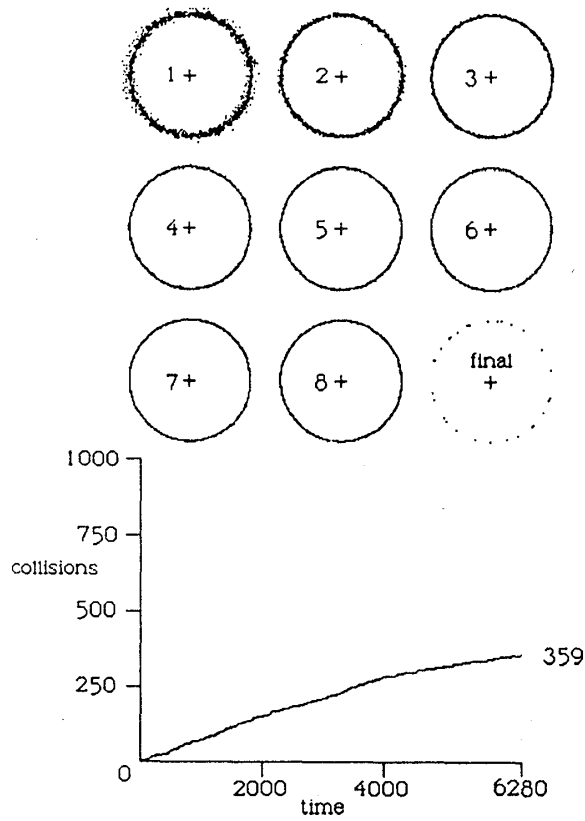


図3 縮まる環: 角運動量規格化
total 1000 rounds
40 particles; $D=1.0e-3$,
 $\sigma=0.04$; $e=0.1$

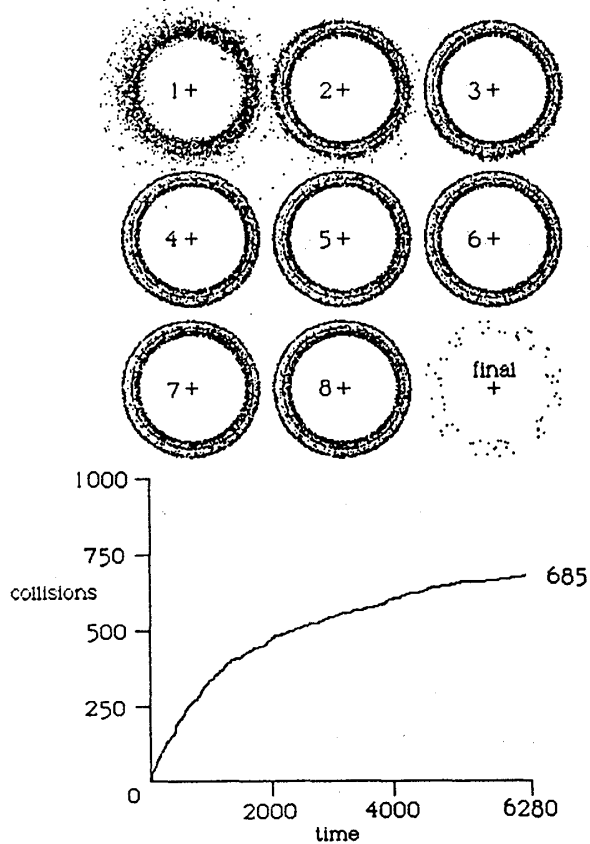
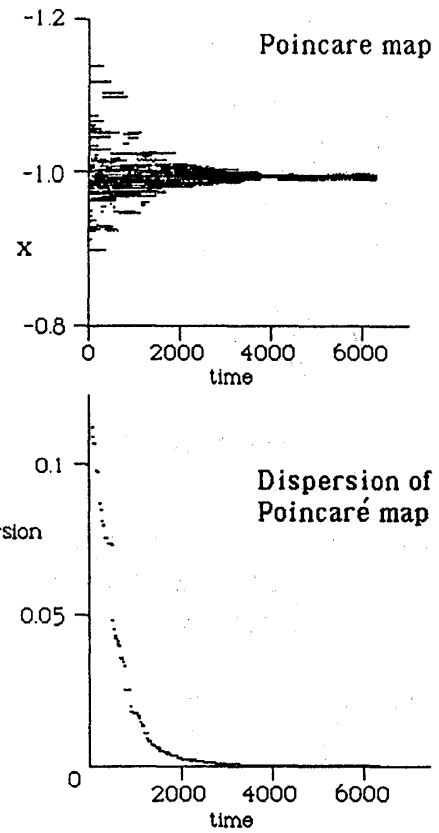
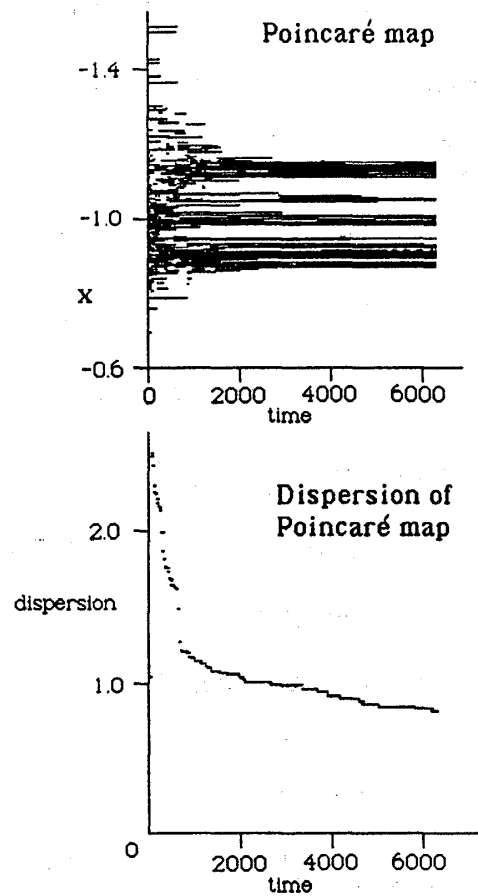


図4 分裂する環: 非規格化
total 1000 rounds
100 particles; $D=2.0e-3$
 $\sigma=0.08$; $e=0.1$



- 1) まず, 3次元トーラスが, 2次元円盤につぶれることを説明する.

粘性モデルの衝突の式

$$\begin{cases} v_1' + v_2' = v_1 + v_2 \\ v_1' - v_2' = -e(v_1 - v_2) \end{cases}$$

の, 両辺に $r (=r_1=r_2)$ を掛ければ, $r \times v = L$ より

$$\begin{cases} L_1' + L_2' = L_1 + L_2 \\ L_1' - L_2' = -e(L_1 - L_2) \end{cases}$$

両辺から平均の角運動量 L をひけば,

$$\begin{cases} \delta L_1' + \delta L_2' = \delta L_1 + \delta L_2 \\ \delta L_1' - \delta L_2' = -e(\delta L_1 - \delta L_2) \end{cases}$$

これより,

$$\begin{cases} \delta L_1' = \alpha \delta L_1 + \beta \delta L_2 \\ \delta L_2' = \beta \delta L_1 + \alpha \delta L_2 \end{cases} \quad (\alpha = \frac{1-e}{2}, \beta = \frac{1+e}{2})$$

$$\begin{aligned} \therefore \delta L_1'^2 + \delta L_2'^2 &= \alpha^2 \delta L_1^2 + 2\alpha\beta \delta L_1 \delta L_2 + \beta^2 \delta L_2^2 \\ &\quad + \beta^2 \delta L_1^2 + 2\alpha\beta \delta L_1 \delta L_2 + \alpha^2 \delta L_2^2 \\ &= \frac{1+e^2}{2} (\delta L_1^2 + \delta L_2^2) + (1-e^2) \delta L_1 \delta L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\delta L_1'^2 + \delta L_2'^2) - (\delta L_1^2 + \delta L_2^2) &= -\frac{1-e^2}{2} (\delta L_1^2 + \delta L_2^2 - 2\delta L_1 \delta L_2) \\ &= -\frac{1-e^2}{2} (\delta L_1 - \delta L_2)^2 < 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ 衝突すると粒子の角運動量ベクトル L_1, L_2 は L に近づく.
いずれ衝突が止むので, 完全に平面にはならない.

- 2) 次に, 2次元円盤がつぶれて1次元の細い環になることを説明する.

①の過程により粒子の角運動量がすでに揃っているとすれば, 次の4段階の手順で証明できる.

1) L が共通の楕円軌道は交わる

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1 + \varepsilon_i \cos(\theta + \varphi_i)}{l_i} \quad (l_i = \frac{L_i^2}{GMm_i^2})$$

より, $r_1=r_2$ を $L_1=L_2$ のもとでとけば,

$$\tan \theta = \frac{\varepsilon_1 \cos \varphi_1 - \varepsilon_2 \cos \varphi_2}{\varepsilon_1 \sin \varphi_1 - \varepsilon_2 \sin \varphi_2}$$

(ただし, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ または $\varphi_1 \neq \varphi_2$; 同一の軌道でない)

となり, θ は一般に2解ある.

2) ε だけが異なる2つの軌道は周期が異なる

$$T = \frac{2\pi L^{\frac{3}{2}}}{(\varepsilon^2 - 1)^{\frac{3}{2}} m^3 G^2 M^2}$$

1,2より, L が共通で ε が異なる軌道をまわる2つの粒子はいつかかならず衝突する.

3) 衝突により L は不変

$$\begin{cases} v_1' + v_2' = v_1 + v_2 \\ v_1' - v_2' = -e(v_1 - v_2) \end{cases}$$

より、

$$\begin{cases} v_1' = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ v_2' = \beta v_1 + \alpha v_2 \end{cases} \quad (\alpha = \frac{1-e}{2}, \beta = \frac{1+e}{2})$$

よって、

$$\begin{aligned} L_1' &= r_1 \times v_1' \\ &= r_1 \times (\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= \alpha L + \beta L \\ &= L \end{aligned}$$

L_2' も同様である。

4) 衝突すれば、 ε^2 の和は減少する

$$\varepsilon^2 = 1 + 2 \frac{L^2}{G^2 M^3 m^3} E$$

より、非弾性衝突して ΣE が減少すれば $\Sigma \varepsilon^2$ も減少する。

【考察】

ここで論じた $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 次元のストーリーをそのまま土星の環に適用できると考えるのは危険である。モデルは単純で、天文学的なさまざまな効果をまったく無視しているし、粘性の衝突モデルが現実的であるともいえない。しかし、数百本の細い ringlet が集まって幅広い環をなしている土星の環の姿は、このストーリーと矛盾していない。 $3 \rightarrow 2$ 次元のつぶれの時にグループ化が起こり、円盤全体でみれば角運動量の大きさは揃わないと考えられる。このため、 $2 \rightarrow 1$ 次元のつぶれにおいて多数の細い環に分裂するだろう。

今回の結果から、さらに次のような発展が考えられる。第一に、衝突モデルによる差である。衝突モデルは、接線方向と法線方向の2つの反発係数で特徴付けられる。(モデルの位置づけの図) エネルギー保存と反発の対称性から、反発係数の組合せは、 ± 1 の線に囲まれた正方形の範囲に納まる。粘性モデルは、グラフ上で $e_n = e_t$ ($e_n \geq 0$) の線になる。なめらかな球モデルは、 $e_t = -1$ ($e_n \geq 0$) の線になる。正方形内のこれ以外の部分のモデルでは、環はどうなるだろうか。

第二に、 $1 \rightarrow 0$ 次元のつぶれである。現在のモデルでは、粒子の合体は起こらず、どんなにゆっくり衝突しても必ずまた離れていくからそういう事は起こらない。なんらかの形で、粒子間の引力を導入すれば合体による粒子の成長が起こるのではないかと思われる。そうすると、土星の環よりむしろ太陽系の形成がイメージ的には近い。

【参考】

1. Brahic, Andre; Systems of Colliding Bodies in a Gravitational Field: I-Numerical Simulation of the Standard Model. Astron. Astrophys. 54, 895-907(1977)
2. Greenberg, Richard & Brahic, Andre; Planetary Rings. The Univ. of Arizona Press(1984)

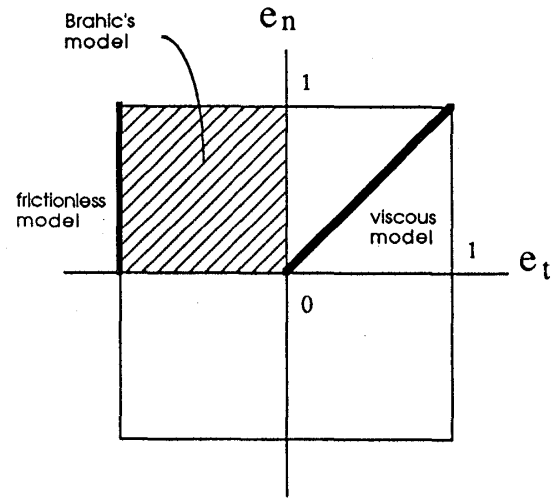


図5 モデルの位置付け