

Frobenius map によるベクトルバンドルの コホモロジークラスの挙動について

京大 理 丹 後 弘 司

§1 序

ここでは, 考える Variety (又は Curve) X はすべて $\text{non-singular, irreducible, projective}$ であって, 代数的閉体 k 上定義されているとする。又定義体 k の標数 p は正とする。この時, X 上の ample line bundle L に対して, Frobenius map $F^*(i, L); H^i(X, L) \longrightarrow H^i(X, L^{(p)})$ の挙動を調べる事は, 次の意味で興味のある事です。

(I) すべての ample line bundle L とすべての $j \leq \dim X - 1$ に対して Frobenius map $F^*(j, L)$ が injective であれば, X において小平の Vanishing Theorem が成立する。すなわち任意の ample line bundle L と, 任意 $j \leq \dim X - 1$ に対して, $H^j(X, L) = 0$ 。

(II) "Curve X と, γ の上の ample line bundle L が存在して Frobenius map $F^*(1, L^\vee)$ が injective でない。" とすれば, これは X 上の vector bundle E で γ のすべての quotient bundle の degree が正であるにもかかわらず, ample でないものの存在する事を示している。

ここでは, X に対して小平の Vanishing Theorem が成立する為の必要十分条件と十分条件を証明し, III の " " 内をみたす X と L の存在を示します。

§2 Cartier Operator

$F: X \longrightarrow X$ を Frobenius map とする。 Ω_X^i を X 上の regular differential 1-forms の germs のなす sheaf とする。
map $d: \Omega_X^i \longrightarrow \Omega_X^{i+1}$ により induce される $\mathcal{O}_X$ -Module の morphism

$$F_* d: F_* \Omega_X^i \longrightarrow F_* \Omega_X^{i+1}$$

の Kernel & Image を各々 $\mathcal{Z}_X^i, \mathcal{B}_X^{i+1}$ で表わす。

(注意, よく知られた exact sequence $0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{F} \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1$ よりすぐ分かる様に, $\mathcal{Z}_X^0 = \mathcal{O}_X$ である。) $\mathcal{Z}_X^i$ に関して次の Proposition が成立する。

Proposition 1. 任意の X の点 x に対して, $u_1, u_2, \dots, u_n$ を

X の x における local parameter とする時,

$$\mathcal{Z}_{X,x}^i = \mathcal{B}_{X,x}^i \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^p \mathcal{O}_{X,x}^p (u_{j_1} u_{j_2} \cdots u_{j_i})^{p-1} du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge \cdots \wedge du_{j_i} \right)$$

となる。ここで $\mathcal{O}_{X,x}^p = \{ f^p; f \in \mathcal{O}_{X,x} \}$ であり, $\mathcal{O}_{X,x}$ の元 f の $\mathcal{Z}_{X,x}^i$ への作用は f^p を掛けて作用する。

(Cartier operator $C; \mathcal{Z}_X^i \quad \Omega_X^i$ が次の Proposition を満足する様に定義される。

Proposition 2. 任意の $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{Z}_{X,x}^i$ と, 任意の $f, f_1, f_2, \dots, f_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ に対して, 次の (i) ~ (iv) が成立する。

$$(i) \quad C(\omega_1 + \omega_2) = C(\omega_1) + C(\omega_2)$$

$$(ii) \quad C(f^p \omega) = f C(\omega)$$

$$(iii) \quad C(\omega) = 0 \quad \text{if } \omega \in \mathcal{B}_{X,x}^i$$

$$(iv) \quad C((f_1 f_2 \cdots f_i)^{p-1} df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_i) = df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_i$$

証明。 C を (i), (ii), (iii) 及び各 $\omega = (j_1, \dots, j_i)^F$ に対する組 $(u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_i})$ に対して, (iv) が成立する様に定義する。これで C が定義できる事は Proposition 1 より明らかである。

(iv) を証明するには, 組 $(f_{1,1}, f_2, \dots, f_i)$ と $(f_{1,2}, f_2, \dots, f_i)$ に対して (iv) が成立する時, 組 $(f^p f_{1,1}, f_2, \dots, f_i)$, $(f_{1,1} f_{1,2}, f_2, \dots, f_i)$ 及び $(f_{1,1} + f_{1,2}, f_2, f_3, \dots, f_i)$ に対して (iv) が成立している事

を証明すればよい。これは簡単な計算である。

Cartier operator についての詳細は [2], [3] 又は [4] を参照されたい。

Proposition 3. 次の sequence は $\mathcal{O}_X$ -Module の exact sequence である。

$$(i) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow F_* \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{B}_X^1 \longrightarrow 0$$

$$(ii) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{Z}_X^1 \longrightarrow F_* \Omega_X^1 \longrightarrow \mathcal{B}_X^{1,1} \longrightarrow 0$$

$$(iii) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{B}_X^1 \longrightarrow \mathcal{Z}_X^1 \xrightarrow{c} \Omega_X^1 \longrightarrow 0$$

証明。 (i) & (ii) は定義より、又 (iii) は Proposition 2 より直に出てくる。

§3. Vanishing Theorem.

$i \leq \dim X - 1$ とする。任意の $j \leq i$ と、任意の ample line bundle L に対して $H^j(X, L^\vee) = 0$ が成立する時、 X に $K(i)$ が成立していると言う事にする。

定理 4. $i \leq \dim X - 1$ とする時、次の 2 つは同値である。

(i) 任意の $j \leq i-1$ と任意の ample line bundle L に対して

$$H^j(X, \mathcal{B}_X^1 \otimes L^\vee) = 0$$

(ii) X に $K(i)$ が成立する。

証明. Proposition 3 の sequence (i) に $L^\vee$ を tensor して次の exact sequence を得る。

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} H^{j-1}(X, F_* \otimes_X \check{L}) & \longrightarrow & H^{j-1}(X, B_X^1 \otimes \check{L}) & \longrightarrow & H^j(X, \check{L}) & \longrightarrow & H^j(X, F_* \otimes_X \check{L}) \\ & \searrow & & & \searrow F^*(j, \check{L}) & & \searrow \\ & H^{j-1}(X, \check{L}^{(p)}) & & & & & H^j(X, \check{L}^{(p)}) \end{array}$$

(v) $\Rightarrow$ (ii) 。 (b) より $F^*(j, \mathcal{L})$ は injective , 従ってすべての m に対して $F^*(j, \mathcal{L}^{(p^{m-1})}) \cdot F^*(j, \mathcal{L}^{(p^{m-2})}) \cdot \dots \cdot F^*(j, \mathcal{L})$;

$H^j(X, \mathcal{L}^\vee) \longrightarrow H^j(X, \mathcal{L}^{\vee(p^m)})$ は injective. $j \leq i \leq \dim X - 1$
 であり L は ample line bundle であるから, m を十分大きく
 とすれば $H^j(X, \mathcal{L}^{\vee(p^m)}) = 0$. よって $H^j(X, \mathcal{L}^\vee) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) は (i) より明らか。($L^{(p)}$ は ample line bundle になるから)

$i \leq \dim X - 1$ とする。 $i+j \leq i$, $j > 0$ なるすべての j, i とすべての ample line bundle L に対して $H^i(X, \Omega_X^j \otimes L^{\vee}) = 0$ である時, X に $N(i)$ が成立すると言う事にして, 又同じ条件をみたす, すべての j, i, L に対して $H^i(X, \Omega_X^j \otimes L^{\vee}) = 0$ $H^i(X, \mathcal{O}_X^j \otimes L^{\vee}) = 0$ が成立する時, X に $n(i)$ が成立すると言う事にする。

定理5. $i \leq \dim X - 1$ とする。 X において $N(i)$ が成立するならば, $n(i)$ も成立する。従ってその時 $K(i)$ も成立する。

証明. Proposition 3 より次の exact sequence が得られる。

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{Z}_X^i \otimes \mathcal{L}^\vee \rightarrow F_* \Omega_X^i \otimes \mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{B}_X^{i+1} \otimes \mathcal{L}^\vee \rightarrow 0$$

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{B}_X^i \otimes \mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{Z}_X^i \otimes \mathcal{L}^\vee \rightarrow \Omega_X^i \otimes \mathcal{L}^\vee \rightarrow 0$$

i についての induction で証明する。

$i = 1$ の時. (2) より $0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{Z}_X^1 \otimes \mathcal{L}^\vee) \rightarrow H^0(X, F_* \Omega_X^1 \otimes \mathcal{L}^\vee) = H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{L}^{\vee(p)}) = 0$ よって $H^0(X, \mathcal{Z}_X^1 \otimes \mathcal{L}^\vee) = 0$ 。同様に (4) より $H^0(X, \mathcal{B}_X^1 \otimes \mathcal{L}^\vee) = 0$ 。よって $N(1) \Rightarrow n(1)$ は言えた。

$i-1$ まで正しいとする。 $N(i)$ が成立すれば $N(i-1)$ も成立するから, induction の仮定より, $n(i-1)$ が成立する。従って $H^l(X, \mathcal{Z}_X^{i-l} \otimes \mathcal{L}^\vee) = H^l(X, \mathcal{B}_X^{i-l} \otimes \mathcal{L}^\vee) = 0$ ($0 \leq l \leq i-1$) を証明すればよい。これはより induction で (2), (4) を使えば証明できる。

又 $n(i)$ が成立すれば特に定理4の①が成立するから, $K(i)$ が成立する。

Corollary 6. Y を Variety, E を Y 上の rank $r \geq 2$ の vector bundle とする。 $X = \mathbb{P}(E)$ とすると, X には $K(1)$ が成立する。

証明. $N(1)$ が成立する事をいう。 $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{L}^\vee) \neq 0$ なる

$X = \mathbb{P}(E)$ ample line bundle が存在したと仮定する。この
 $\downarrow \pi \quad \cup \quad \pi^{-1}(y)$ 時 general な fibre $\pi^{-1}(y) = Z \hookrightarrow X$ に対して
 $Y \ni y$ $H^0(Z, \pi^*(\Omega_X' \otimes L^\vee)) \neq 0$ となる。ところで $Z = \mathbb{P}^{r-1}$,
 $N_{Z/X} \approx \bigoplus^m \mathcal{O}_Z$ (normal bundle) であるから, 次の
 exact sequence を得る。

$$0 \longrightarrow \bigoplus^m \pi^* L^\vee \longrightarrow \pi^*(\Omega_X' \otimes L^\vee) \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^{r-1}}' \otimes \pi^* L^\vee \longrightarrow 0$$

明らかに $H^0(Z, \bigoplus^m \pi^* L^\vee) = H^0(Z, \Omega_{\mathbb{P}^{r-1}}' \otimes \pi^* L^\vee) = 0$, 従って
 $H^0(Z, \pi^*(\Omega_X' \otimes L^\vee)) = 0$ には矛盾。よって $N(1)$ が成立し
 $K(1)$ も成立する。

Corollary 7. $X = Y_1 \times Y_2$, $\dim Y_1 \cdot \dim Y_2 \geq 1$ の時, X に
 $N(1)$ が成立する。従って $K(1)$ も成立する。

証明。 $N(1)$ が成立しなると仮定する。この時 ample line
 bundle L で $H^0(X, \Omega_X' \otimes L^\vee) \neq 0$ となるものが存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 X = Y_1 \times Y_2 & \pi_i : X \longrightarrow Y_i & \text{を自然な projection とする} \\
 \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\
 Y_1 & & Y_2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 H^0(X, \Omega_X' \otimes L^\vee) = H^0(X, \pi_1^* \Omega_{Y_1}' \otimes L^\vee) \oplus H^0(X, \pi_2^* \Omega_{Y_2}' \otimes L^\vee) \\
 \text{よって } H^0(X, \pi_1^* \Omega_{Y_1}' \otimes L^\vee) \neq 0 \text{ としてよい。}
 \end{array}$$

+ 分 general な点 $y_1 \in Y_1$ をとって $Z = \pi_1^{-1}(y_1) \hookrightarrow X$

とすれば $H^0(Z, \pi_1^* \Omega_{Y_1}' \otimes \pi_2^* L^\vee) = H^0(Z, \pi_2^* L^\vee) = 0$. これは
 矛盾。よって X には $N(1)$ が成立する。

Corollary 8. X' is variety $Y \subset X'$ of subvariety of codimension 2 or more. $X \subset X'$ of Y is center of blowing up. At this time, X' satisfies $N(1)$ (or $K(1)$) if and only if X satisfies $N(1)$ (or $K(1)$).

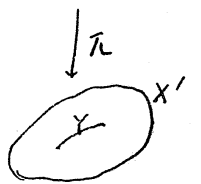
証明. X' on the sheaf $\mathcal{F}$ and $X'-Y$ on the element x' is specified. At this time, X' on the curve C' satisfies the following conditions.

$C' \ni x', C' \cap Y = \emptyset$, and $H^0(X', \mathcal{F}) = H^0(C', \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{C'})$.

C is a divisor of ample cutting.

Now assume X does not satisfy $N(1)$. Then X is not ample

line bundle L with $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L^\vee) \neq 0$.



X is not ample. Let $x \in X$ and $x \notin \pi^{-1}Y$.

Let $C \hookrightarrow X$ be a curve passing through x .

Then $H^0(C, \iota^*(\Omega_X^1 \otimes L^\vee)) \neq 0$.

Now $\pi(x) = x' \notin Y$ and $\Omega_{X'}^1 \otimes \pi_* L^\vee$ is the sheaf we started with.

Apply the same argument to C' .

Then $C' \ni x', C' \cap Y = \emptyset$, $H^0(X', \Omega_{X'}^1 \otimes \pi_* L^\vee) =$

$H^0(C', \iota'^*(\Omega_X^1 \otimes \iota'^*\pi_* L^\vee))$. Since $\pi^{-1}(C') = C \hookrightarrow X$ and

it is clear that $\iota'^*\Omega_{X'}^1 = \iota'^*\Omega_X^1$, $\iota'^*\pi_* L^\vee = \iota'^*L^\vee$ and $C \ni x$ so

$H^0(X', \Omega_{X'}^1 \otimes \pi_* L^\vee) \neq 0$, $\pi_* L$ is ample line bundle. Then

X' satisfies $N(1)$.

$K(1)$ についても、全く同様である。

Corollary 9. $Y \in \mathbb{P}^n$ 又は Abelian variety とする。 $X \in Y$ 自身又は Y の subvariety として Y の Normal bundle $N_{X/Y}$ が ample line bundle による splitting を持つものとする。この時 $m = \dim X$ とすれば、 X において $N(m-1)$ 従って $K(m-1)$ が成立する。

証明。 Y が Abelian variety であって $Y \neq X$ の時。 $n = \dim Y$ とすれば $\Omega_Y^1 = \bigoplus \mathcal{O}_Y$ 、 $N = N_{X/Y} = (L_1, L_2, \dots, L_{n-m})$ 、 L_i ample line bundle なる splitting を持っている。次の sequence

$$0 \longrightarrow \check{N} \longrightarrow \bigoplus^m \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow 0$$

は exact, 従って 一般に $\Lambda^i \bigoplus^m \mathcal{O}_X$ は次の splitting を持つ。
 $(\Rightarrow) (\Lambda^i \check{N}, \Lambda^{i-1} \check{N} \otimes \Omega_X^1, \Lambda^{i-2} \check{N} \otimes \Omega_X^2, \dots, \check{N} \otimes \Omega_X^{i-1}, \Omega_X^i)$ 。

X において $N(i)$ $i \leq m-1$ が成立する事を i の induction で証明する。 $i=0$ の時は証明すべき事は存在にもない。

$i > 0$ として $i-1$ まで OK とする。従って $K(i-1)$ も成立している。 $H^l(X, \Omega^{i-l} \otimes L^{\vee}) \neq 0$ なる ample line bundle が存在したと仮定する。 s_0 を十分大にとれば、すべての l について $H^l(X, \Omega^{i-l} \otimes L^{\vee} \otimes S^s(L \otimes L_1^{\vee} \otimes \dots \otimes L_{n-d}^{\vee})) = 0 \quad \forall s \geq s_0$ とできる。従って L を $L \otimes L^{t_0} \otimes L_1^{t_1} \otimes \dots \otimes L_{n-d}^{t_{n-d}}$ ($t_j \geq 0$) なる形のものととりかえて、次の様に思つてよい。

$$0 \leq l \leq i, \quad H^l(X, \Omega_X^{i-l} \otimes L^\vee) \neq 0 \quad \text{で}$$

$$0 \leq l \leq i, \quad \forall (j) = (j_0, \dots, j_{n-m}), \quad j_k \geq 0, \quad (j) \neq (0)$$

$$H^l(X, \Omega_X^{i-l} \otimes L^\vee \otimes L^{\vee \otimes j_0} \otimes L_1^{\vee \otimes j_1} \otimes \dots \otimes L_{n-m}^{\vee \otimes j_{n-m}}) = 0 \quad \text{とて}$$

きる。ところで $l \neq i$ のときには $H^l(X, \Omega_X^{i-l} \otimes L^\vee) = 0$

なる事が $\Rightarrow$ の splitting より分る。従って $H^i(X, L^\vee) \neq 0$

ところで $H^i(X, L^{\vee(p)}) = 0$ と induction の仮定より

Proposition 3 の 3つの exact sequence より

$$H^i(X, L^\vee) \approx H^{i-1}(X, B_X' \otimes L^\vee) \approx H^{i-1}(X, Z_X' \otimes L^\vee) \approx \dots$$

$$\approx H^0(X, B_X' \otimes L^\vee) \approx H^0(X, Z_X' \otimes L^\vee) \hookrightarrow H^0(X, \Omega_X^i \otimes L^{\vee(p)}) = 0$$

となり これは矛盾, 従って $N(i)$ が成立する。

$Y = \mathbb{P}^N$ の時も, もっとめんどうになるが同様に証明できる。

§4. Curve の時

X が Curve の時次の事が R-Hartshorn [1] によって問題とされた。" $F^*(1, \mathcal{O}_X)$ が injective ならば", すべての ample line bundle L に対して $F^*(1, L^\vee)$ も injective か?"

これは一般に正しくはない事が次の様に判明した。

X に associated な integer $n(X)$ を次の様に定義する。

先ず関数体 $K = K(X)$ の元 f に対して, $n(f)$ を次の様に定義する.

$$n(f) = \sum_{x \in X} \left[\frac{v_x(df)}{p} \right].$$

ここで $[]$ はガウス記号, v_x は x に対応する K の valuation.

$n(X)$ は次の式で定義される.

$$n(X) = \max \{ n(f) ; \text{st. } n(f) < \infty \}$$

容易に分る様に, $n(X) \leq \left[\frac{1}{p}(2g-2) \right]$ である. (g は X の genus).

定理 9. $n(X)$ は $\mathcal{B}_X'$ の maximal line bundle の degree である.

証明. D を X の divisor とする. $\mathcal{O}(-D)$ を $-D$ に associated な line bundle とする.

この時, proposition 3 の (iii) 式に $\mathcal{O}(-D)$ を tensor した式より,

$\Omega_X' \approx F_* \Omega_X'$ なる事に注意して, 次の式を得る.

$$(4) \quad \begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}(-D) \otimes \mathcal{B}_X') & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{O}(-D) \otimes F_* \Omega_X') & \xrightarrow{C^*} & \\ & \searrow \varphi & \downarrow \cong & & \\ & & H^0(X, \mathcal{O}(-pD) \otimes \Omega_X') & & \end{array}$$

一方, $H^0(X, \mathcal{O}(-pD) \otimes \Omega_X') \approx \{ \omega \in \Omega^1(K) ; (\omega) \geq pD \}$ である.

ここで, $\Omega^1(K) = \Omega_X' \otimes K$, (ω) は ω に associated な divisor である.

φ の image が C^* の kernel である事より, 次の式を得る.

$$\varphi \text{ の image } \approx \{ df ; f \in K, (df) \geq pD \}$$

上式より定理の証明は容易である.

(1) 式と定理 9 より, $n(X) > 0$ となる事は $F^*(1, L)$ が injective とならなげな ample line bundle の存在を示している。次に Example であげる curve は $F^*(1, \mathcal{O}_X)$ が injective であるにもかかわらず, $n(X)$ は正である。

Example. $p \geq 3$ とする。X を次の式で与えられる plane curve とする。

$$X_0^{p+1} = X_1 X_2 (X_0^{p-1} + X_1^{p-1} - X_2^{p-1}).$$

この時, $n(X) = [\frac{1}{p}(g-2)] = p-2$ である。この $n(X)$ を与える $f \in K$ は $\frac{X_0}{X_1}$ である。 $F^*(1, \mathcal{O}_X)$ は injective であるが, 証明はめんどうである。

文献

- [1]. Hartshorne, R. Ample vector bundles on curves. Nagoya, Math. J. 43 (1971).
- [2] Manin, Ju. I. The Hasse-Witt matrix of an algebraic curve. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. 25 (1961)
- [3] Serre, J. P. Sur la topologie des variétés algébriques en caract. p. Symp. Int. Top. Alg, Mexico, (1958).
- [4] Seshadri, C. S. L'opération de Cartier. Applications. Exp. 6. Seminaire C. Chevalley; Variétés de Picard 3 (1958/59)