

流体線や面の伸長率のレイノルズ数依存性

後藤 晋 (Susumu Goto)¹ 木田重雄 (Shigeo Kida)

京大・工・機械理工 (Dep. Mech. Eng. Sci., Kyoto Univ.)

1 はじめに

物質の輸送や混合において、一般に流れによる効果は分子拡散によるものよりも劇的である。とくに流れが乱流である場合には、流れによる輸送や混合はさまざまな系で本質的な役割を演ずる。そこで本研究では、乱流による混合を定量化し、それが流れ場の性質にどのように依存するかを理解することを目指す。以下ではとくに流れが統計的に一様かつ定常な乱流である場合に、乱流混合の統計性質が流れ場のレイノルズ数にどのように依存するかを論ずる。

ところで、流れによる混合を定量化するためのひとつの方法として、流体線や面 [1] によるものが知られる。流体線や面とは常に同一の流体粒子の集合より構成される線や面であり、したがって2次元流中の流体線や3次元流中の流体面は流体の2つの部分の境界を表す。この性質に注目して、流体線や面の変形や伸長の情報を定量化することにより、分割された2つ部分の混合を定量化しようという訳である。もちろん、境界面の運動の情報だけでは分割された2つの部分の混合を完全に定量化することはできないが、この方法は乱流混合の理解へのひとつの足掛かりとなると期待され、また直接数値計算による取り扱いも（容易でないが）単純であるので本研究でもこの方法を採用する。

さて、一様乱流中での流体線や面の変形や伸長は、乱流中の最小長さスケール（つまり、コルモゴロフ長 η ）の渦によって支配されていると考えられている [1]。実際、文献 [2] では一様乱流中で変形された（有限長さの）流体線の曲率の平均値がレイノルズ数に依らずに $0.1\eta^{-1}$ 程度となることが報告されている。このことから流体線や面の伸長も $O(\eta)$ の渦によって支配的に引き起こされ、したがって流体線の全長や面の面積は時間の指数関数で増大すると考えられる。実際、これまでに多くの直接数値計算によって、流体面や線の指数関数的な伸長が報告されている [2-5]。上で述べたように、この流体線や面の指数関数的な伸長は、流れによる混合によって流体の2つの部分の接触面積が急激に増大することを意味する。そこで、流体線や面の伸長率を

$$\gamma \equiv \frac{d}{dt} \log L \quad \text{および} \quad \frac{d}{dt} \log A \quad (1)$$

で定義（ここで L および A はそれぞれ流体線の全長および流体面の全面積）し、 γ によって乱流による混合のひとつの側面を定量化する。定義 (1) より、時間的に一定な伸長率 γ が指数関数的な伸長に対

¹susumu-goto@mail-box.jp

応する²。以下の目的は、この γ の統計性質が考えている流れ場の（唯一の）パラメタであるレイノルズ数にどのように依存するかを明らかにすることにある。

さて、上述のように、指数関数的な伸長は乱流の最小スケール ($O(\eta)$) の渦によっている。したがって、伸長率の平均値はこれら最小スケールの渦の旋回の時間スケール（つまり、コルモゴロフ時間 τ_η ）で決まると信じられてきた [1]。しかし興味深いことに、われわれの直接数値計算によれば、初期に十分に長い直線状の流体線（十分に広い平面状の流体面）の伸長率の平均値の振る舞いはコルモゴロフ時間だけでは記述できず、 τ_η の逆数で規格化された伸長率はレイノルズ数とともに増大する（下の図 4 を参照）。つまり、伸長率の平均値は乱流中の最小スケールの渦の性質だけでは決定されない。以下では、まずこの数値計算がどのような条件のもので結果であるかを説明したのち、図 4 という古典的な理解と矛盾した結果の解釈を与える。

2 直接数値計算

2.1 流れ場

以下では 2 次元および 3 次元の一様乱流中での流体線や面の伸長を扱う。前者（後者）では、小さな（大きな）長さスケールにおいて人為的な外力が与えられ、大きな（小さな）スケールにおいてエネルギーが散逸する系を考える。このとき、前者ではエネルギーが小スケールから大スケールへ、また後者では大スケールから小スケールへと流れることによって、いずれの場合も外力もエネルギー散逸機構も効果を持たない長さスケール（つまり、慣性領域）においてエネルギースペクトル $E(k)$ がコルモゴロフスペクトル

$$E(k) \sim \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (2)$$

となることが期待される [6, 7]。ここで ϵ は単位質量、単位時間あたりのエネルギー散逸率の平均値であり、これは統計的定常状態では慣性領域におけるエネルギーフラックスの絶対値の平均値に一致する。実際、ナビエ・ストークス方程式を直接数値積分することにより、そのような乱流場を数値的に実現することができる（図 1）。数値計算の詳細は 2 次元乱流に関しては文献 [8] を、3 次元乱流に関しては文献 [2] をそれぞれ参照のこと。

2 次元乱流については 4 つのパラメタ、3 次元乱流については 5 つのパラメタで数値計算をおこなった。得られた乱流場の統計性質を表 1 にまとめる。3 次元一様乱流においては、テイラー長レイノルズ数 R_λ は、積分長 $\mathcal{L}$ （つまり最大渦の長さスケール）とコルモゴロフ長 η （最小渦の長さスケール）との間に

$$R_\lambda \sim \left(\frac{\mathcal{L}}{\eta} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3)$$

というスケーリングが成り立つ。ここで考察している 2 次元乱流ではレイノルズ数を定義できないが、3 次元乱流で成り立つ上の関係式 (3) を拡大解釈して $\mathcal{L}$ と η との比をレイノルズ数と見なす。

²この流体線や面の指数関数的な伸長は実は乱流の性質によるものではなく、カルマン渦列まわりの流れなどのような層流においても観察できる。このことは、乱流中での指数関数的伸長が最小スケールの渦に支配されており、このスケールでは乱流もまた層流的な秩序立った流れとなっていることを思い起こせば当然かもしれない。

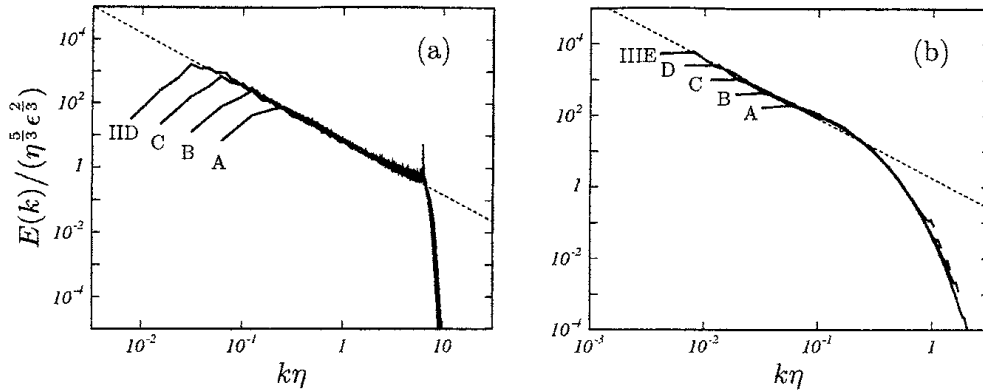


図 1: 直接数値計算で実現された統計的に一様かつ定常な乱流場のエネルギースペクトル。(a) 2次元乱流（逆エネルギーカスケード状態）。(b) 3次元乱流。

2.2 流体線および面の伸長率

図 1 に示すエネルギースペクトルをもつ 2 次元および 3 次元の一様乱流のそれぞれにおいて流体線や面の運動を数値的に追跡する。定義より、流体線や面上の任意の点の位置座標 $\mathbf{x}_p(t)$ の時間発展は移流方程式

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t), t) \quad (4)$$

にしたがう。われわれの直接数値計算では、速度場および流体線や面の時間発展を同時に解く。具体的には、流体線および面をそれぞれ微小な線分および三角形の集合として表現し、それらの頂点の位置座標の時間発展を (4) を数値積分することによって求める。つまり、ナビエ・ストークス方程式の数値積分により得られた速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ の格子点上の値を補間し、移流方程式 (4) の右辺を評価し流体線や面の時間発展を求める。ただし、流体線や面は急激に伸長されるので、時間発展の毎ステップでそれらの構成要素である線分や三角形の大きさを確認し、閾値（コルモゴロフ長さを基準に決める）を越えた線分や三角形は随時 2 つに分割する。

こうして得られた流体線や面のある時刻における変形の様子の一例を図 2 に示す。2 次元乱流中の流体線は、それが流体の 2 つの部分の境界であることを表すために 2 つの部分を塗りわけて描画してある。いずれの場合も乱流は流体線や面を極めて複雑に変形する。

さて、これらの流体線や面の全長や全面積の時間発展を調べると、期待どおり、ほぼ時間の指数関数で増大していることが確かめられる。そこで伸長率 (1) の値を求め、その平均値を評価し、そのレイノルズ数依存性を調べたい。しかしあとの議論で示すように、どのような長さの流体線の伸長率をどのような平均で評価するかが実は本質的であるので、ここではそれらを少し丁寧に説明する。

以下の議論では、初期に直線状の流体線および平面状の流体面の伸長に議論を限定する。また、議論は流体線でも面でも同様であるので流体線についてのみ述べる。初期時刻において、長さが $\ell(0)$ である流体線を M 本考え、各流体線の時刻 t における長さを $\ell^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, M$) と表す。このとき、それぞれの流体線の伸長率は

$$\gamma_{\ell}^{(i)}(t) = \frac{d}{dt} \log \ell^{(i)}(t) \quad (5)$$

(a)		IIA	IIB	IIC	IID
	N^2	512^2	1024^2	2048^2	4096^2
	$\mathcal{E}$	10	6.3	3.6	1.7
	ϵ	3.0	1.4	.60	.20
	$\mathcal{L}$	.38	.32	.29	.23
	η	6.1×10^{-2}	3.1×10^{-2}	3.1×10^{-2}	7.7×10^{-3}
	T	.12	.13	.15	.17
	τ_η	1.2×10^{-2}	9.6×10^{-3}	7.9×10^{-3}	6.8×10^{-3}
	$\mathcal{L}/\eta$	6.3	10	19	30
	T/τ_η	10	13	19	25

(b)		IIIA	IIIB	IIIC	IIID	IIIE
	N^3	128^3	128^3	256^3	512^3	512^3
	$\mathcal{E}$	.544	.573	.586	.585	.601
	ϵ	.124	.127	.124	.119	.121
	T	4.39	4.51	4.73	4.92	4.97
	τ_η	2.02×10^{-1}	1.41×10^{-1}	1.01×10^{-1}	7.26×10^{-2}	5.09×10^{-2}
	$\mathcal{L}$	3.23	3.42	3.62	3.76	3.85
	η	3.17×10^{-2}	1.87×10^{-2}	1.12×10^{-2}	6.74×10^{-3}	3.99×10^{-3}
	R_λ	5.65×10	8.31×10	1.21×10^2	1.75×10^2	2.52×10^2

表 1: 直接数値計算で得られた乱流の統計性質。(a) 2次元乱流 (エネルギー逆カスケード状態)。 N^2 は格子点数、 $\mathcal{E}$ は単位質量あたりのエネルギー、 ϵ はその単位時間あたりの散逸率、 $\mathcal{L}$ は積分長、 η は外力のスケール、 T は最大渦の旋回時間、 τ_η は最小渦の旋回時間。(b) 3次元乱流。 η はコルモゴロフ長、 τ_η はコルモゴロフ時間。 R_λ はテイラー長に基づくレイノルズ数。

である。さて、この伸長率 γ_ℓ の平均値として次の2通りを考えることができる。ひとつは、 γ_ℓ の算術平均、

$$\langle \gamma_\ell \rangle_M \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \gamma_\ell^{(i)} \quad (6)$$

もうひとつは、長さで重みづけをした平均、

$$\langle\langle \gamma_\ell \rangle\rangle_M \equiv \frac{\sum_{i=1}^M \gamma_\ell^{(i)} \ell^{(i)}}{\sum_{i=1}^M \ell^{(i)}} \quad \left(= \frac{\langle \gamma_\ell \ell \rangle}{\langle \ell \rangle} \right) \quad (7)$$

である。(7) より、 γ_ℓ と ℓ とが統計的に独立な場合に限り、これら2つの平均値が同じ値を与えることがわかる。しかし実際には、 ℓ と γ_ℓ とは、

$$\ell(t) = \ell(0) \exp \left[\int_0^t \gamma_\ell(t') dt' \right] \quad (8)$$

という明示的な関係をもつために正の相関を保っており、一般に重みづけ平均 $\langle\langle \gamma_\ell \rangle\rangle$ は算術平均 $\langle \gamma_\ell \rangle$ よりも大きな値をとる (文献 [4] を参照)。

ところで、上で考えた M 本の流体線の集合を初期に一直線上に並べて一本の長い流体線を考える。そのような流体線の全長は

$$L(t) = \sum_{i=1}^M \ell^{(i)}(t) \quad (9)$$

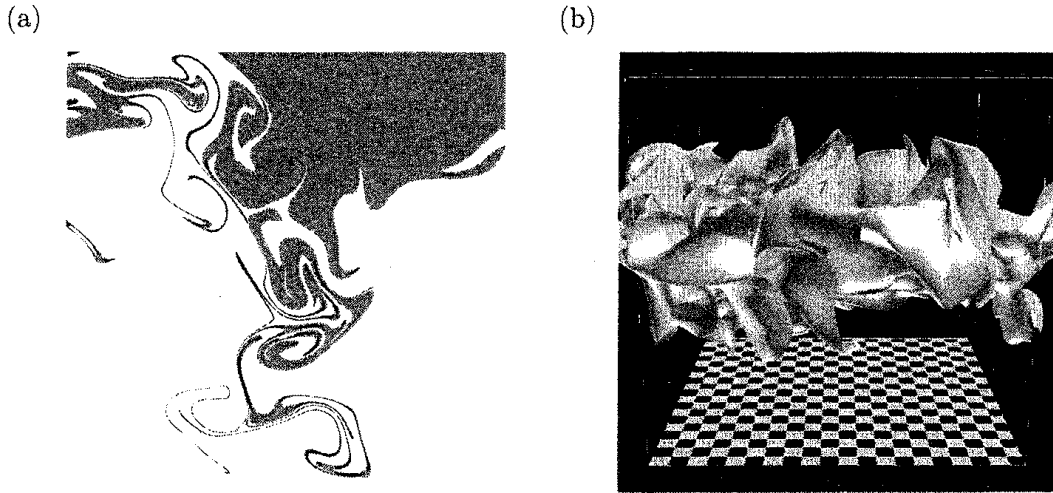


図 2: (a) 2次元乱流中の流体線。(b) 3次元乱流中の流体面。

と表されるので、この $L(t)$ の長さの流体線の伸長率 (1) が、 γ_ℓ の重みづけ平均値 (7) に厳密に一致する。このことから、重みづけ平均 (7) において M を十分に大きな値にした極限は、初期に無限に長い直線状の流体線の伸長率とみなせる。そこで、

$$\gamma_\infty \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \langle \gamma_\ell \rangle_M \quad (10)$$

と γ_∞ を定義する。以上の議論から M を十分大きくとれば、初期長さ $\ell(0)$ に依存せずに γ_∞ が一意に決まることが期待される。実際、これはわれわれの数値計算によっても確かめられる (図 3)。なお、こうして得られた平均値 γ_∞ は、初期から十分に長い流体線の伸長率の算術平均とも一致することが示される (図は省略)。

さて、上述の方法で (10) により得られた十分に長い流体線の伸長率 γ_∞ の時間発展を図 4 に示す。図中には、2次元乱流中の流体線、3次元乱流中の流体線および面の場合の結果をそれぞれ示した。初期時刻では流体線や面の方向は流れ場とは独立であるので伸長率の平均値は 0 となるが、最小スケールの渦の旋回時間 τ_η の数倍の程度の緩和時間を経て伸長率は有限の値をとる。しかし、この有限の γ_∞ は、 τ_η の逆数で規格化してもレイノルズ数に強く依存した時間発展をする。この結果は、従来から信じられたきた描像 — 変形や伸長がコルモゴロフ長の渦によって決まり、したがって伸長率の統計は τ_η で決まる — に照らすと不可解な結果かもしれない。しかし、以下に述べるように、実はごく自然な結果であることが理解される。

3 解釈

十分に広がった流体線や面の伸長率に関する直接数値計算の結果 (図 4) を解釈することが本節の目的である。ところで、図 2 に見られるように、乱流により複雑に変形された線や面は急激に伸長されると同時に急激に折り畳まれている。実際、流体線や面のひろがり

$$\Delta(t) \equiv \sqrt{\int_L (x(s) - x_G)^2 ds} \quad (11)$$

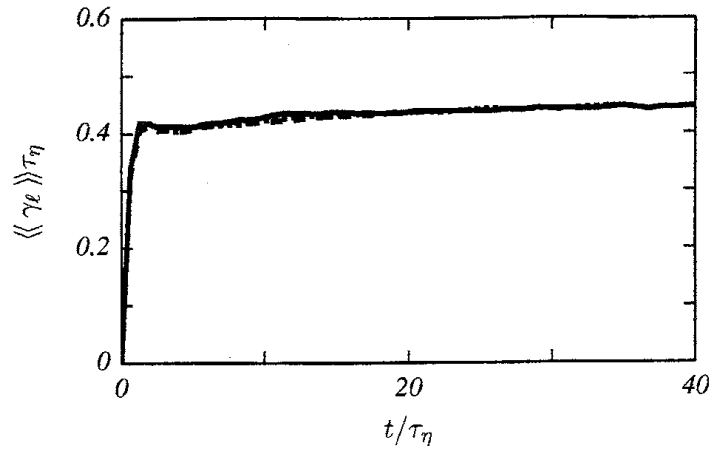


図 3: 2次元乱流中 (run IIC) の流体線の伸長率の重みづけ平均。初期の長さが異なる3つの場合 ($\ell(0) = \eta$, 10η および 100η) を同時に示す。

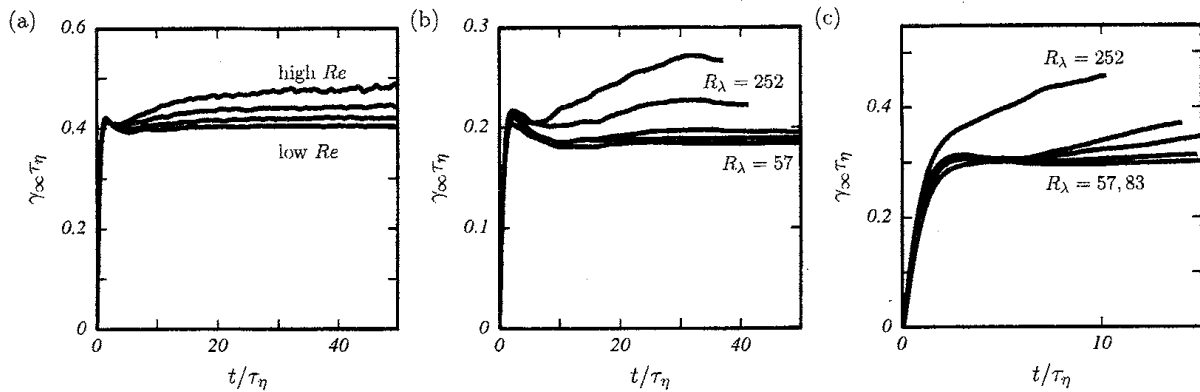


図 4: 初期時刻から十分に広がった流体線や面の伸長率の平均値。(a) 2次元乱流中の流体線。(b) 3次元乱流中の流体線。(c) 流体面。

は時間の巾関数でしか増大しない (図 5(a)) が、全長や全面積は時間の指数関数で増大することから、結果として急激な折り畳みが起こる。なお、(11) で $\mathbf{x}(s)$ は流体線に沿った座標 s における流体線上の点の位置ベクトル、 $\mathbf{x}_G$ は重心の位置ベクトルである。

ここで、流体の非圧縮性により、折り畳まれた流体線や面は伸長率が大きな部分ほど (垂直方向の圧縮性のために) より多くの重なり合いが起こることに注意する。折り畳みによる重なり合いの本数 (枚数) は伸長率の重みづけとして寄与することになるが、より伸長率の大きい部分が折り畳みによってより強調される。したがって、折り畳みの回数が少ない場合と比して、それが多い場合には、伸長率の大きな部分により大きな重みづけがされることにより、伸長率の平均値はより大きな値となる。つまり、流体線や面の伸長率の平均値の評価において、この折り畳みによる重みづけが無視できない。

さて、大きなレイノルズ数と小さいレイノルズ数の乱流場での流体線や面の変形の様子の違いについて考える。レイノルズ数が違うということは、最小渦のスケールと最大渦のスケールとの比が大きいと

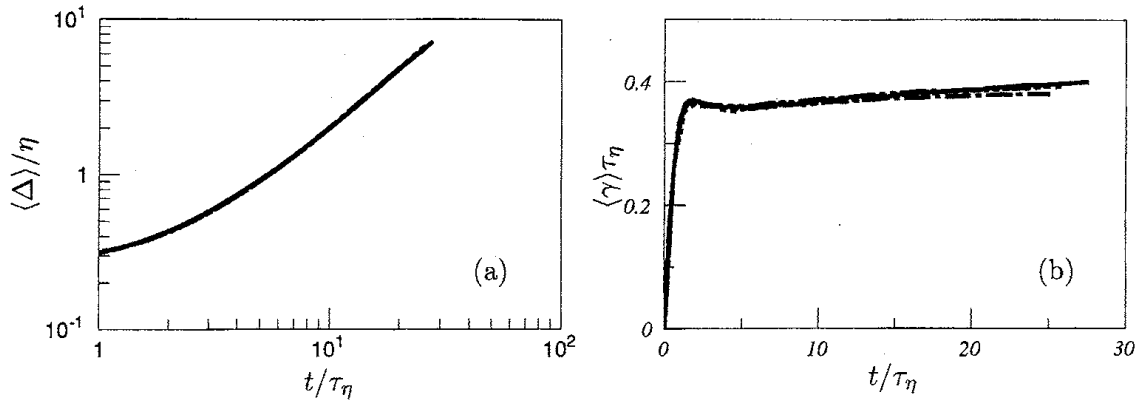


図 5: (a) 初期に η の長さであった流体線の広がり の算術平均。(b) その伸長率の算術平均。---, run IIA; - - -, IIB; ···, IIC; —, IID. ひろがり、伸長率ともにレイノルズ数依存性はみられない。

いうことに他ならない ((3) を参照)。したがって、大きなレイノルズ数では大小さまざまな渦が折り畳みに寄与する。一方で、小さいレイノルズ数の流れでは折り畳みに寄与する渦の長さスケールは、大きなレイノルズの場合と比べて限定されている。したがって、十分にひろがった流体線や面の折り畳みには乱流中の全ての長さスケールの渦が関与するので、大きなレイノルズ数の場合ほどその効率がよい。したがって、より大きなレイノルズ数の流れほど折り畳みの回数が増え、その結果伸長率の平均値も大きくなる。これが図 4 の定性的な解釈である。

それでは逆に、初期の流体線の長さをコルモゴロフ長さでそろえた場合にはどうなるかを考えてみる。この場合、流体線のひろがり $\Delta(t)$ の時間発展は乱流中の相対拡散の問題 [9] と同様に考えることができるので時間の中関数で大きくなる。また、時間をコルモゴロフ時間、ひろがりの算術平均 $\langle \Delta \rangle$ をコルモゴロフ長で規格化すれば、 $\langle \Delta \rangle$ がそれぞれの流れ場の積分長に到達するまでは、その時間発展はレイノルズ数に依存しない (図 5(a))。したがって、このような流体線の折り畳みに寄与する渦のスケールもまたレイノルズ数に依存しない。ここで、ひろがりよりも大きなスケールの渦は流体線を折り畳めないことに注意する。ゆえに、ひろがり積分長に達するまではこれらの流体線の伸長率の算術平均値 $\langle \gamma_\ell \rangle$ もまたレイノルズ数に依存しない (図 5(b))。もちろん、これらの流体線の伸長率の重みづけ平均値 $\langle\langle \gamma_\ell \rangle\rangle$ は無限長さの流体線の伸長率に対応し、レイノルズ数に依存する (図 4)。なお前節で論じたように、重みづけ平均 $\langle\langle \gamma_\ell \rangle\rangle$ は算術平均 $\langle \gamma_\ell \rangle$ よりも大きな値となる (図 4(a) と図 5(b) を比較)。なお以上は 2 次元乱流中の流体線の結果であるが、3 次元流中の流体線についても同様の結果が得られる。

ちなみに、無限小線素の集合に関して伸長率の算術平均値を計算すると、レイノルズ数には全く依存しないことが数値的に示される。初期に空間に一様分布する線素や面素の集合は、流体の非圧縮性により常に一様であるので、この結果から図 4 に見られるレイノルズ数依存性が流体線や面の空間的な非一様分布の影響であることが分かる。

4 まとめ

初期に (積分長と比して) 十分にひろがった流体線や流体面の伸長率の平均値の時間発展は、乱流中の最小スケールの渦の旋回時間であるコルモゴロフ時間 τ_η だけでは記述できない (図 4)。これは流体

線や面の伸長には確かに最小スケールの渦が支配的に寄与するが、一方でこれらの折り畳みにはさまざまなスケールの渦が同時に寄与するからである。流体線や面のひろがり時間の巾関数でしか増大しないが、それらの全長や全面積は指数関数的に増大する。つまり、折り畳みは極めて急激であることに注意しなければならない。折り畳まれた線や面は伸長率がより大きい部分ほどより多く重なり合うので、結果として伸長率の平均値を評価する際の統計重みとして寄与することとなる。折り畳みにはひろがりよりも小さい全てのスケールの渦が寄与するので、初期に十分にひろがった線や面では折り畳みの様子はレイノルズ数に依存する。その結果、このような流体線や面の伸長率の平均値にも差異が現れるのである。逆に折り畳みの様子がレイノルズ数に依存しないような場合（図5）には、伸長率の時間発展もまたレイノルズ数に依存しない。

参考文献

- [1] G. K. Batchelor, "The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces," *Proc. Roy. Soc. London A*, **213** (1952) 349–366.
- [2] S. Goto and S. Kida, "Enhanced Stretching of Material Lines by Antiparallel Vortex Pairs in Turbulence," *Fluid Dynamics Research*, **33** (2003) 403–431.
- [3] S. S. Girimaji and S. B. Pope, "Material-element deformation in isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.*, **220** (1990) 427–458.
- [4] S. Goto and S. Kida, "Multiplicative process of material line stretching by turbulence," *J. Turbulence*, **3** (2002) 017.
- [5] S. Kida and S. Goto, "Line statistics: Stretching rate of passive lines in turbulence," *Phys. Fluids*, **14** (2002) 352–361.
- [6] G.K. Batchelor, "Computation of the energy spectrum in two-dimensional turbulence," *Phys. Fluids Suppl. II*, **12** (1967) 233–239.
- [7] R.H. Kraichnan, "Inertial ranges in two-dimensional turbulence," *Phys. Fluids*, **10** (1967) 1417–1423.
- [8] S. Goto, S. and J.C. Vassilicos, "Particle pair diffusion and persistent streamline topology in two-dimensional turbulence," *New J. Phys.*, **6** (2004) 65.
- [9] L.F. Richardson, "Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph," *Proc. Roy. Soc. London A*, **110** (1926) 709–737.