

金子邦彦

謝辞 研究を進める上での鈴木先生からの有益な助言や激励, また研究会期間中の久保先生, 森先生, 長谷川先生からの貴重なコメントに心から感謝致します。

References

- 1) H. Haken, *Synergetics* (Springer-Verlag, 1977).
- 2) R. L. Stratonovich, *Topics in the Theory of Random Noise* (Gordon and Breach, New York, 1963) Vol. 1.
- 3) T. Morita, H. Mori, and K. T. Mashiya, *Prog. Theor. Phys.* **64** (1980) 500.
- 4) H. Hasegawa, M. Mabuchi, and T. Baba, *Phys. Lett.* **79A** (1980) 273.
- 5) R. Kubo, in *Fluctuations, Relaxations, and Resonance in Magnetic Systems*, ed. D. ter Haar (Oliver & Boyd, Edinburgh, 1962).
- 6) A. Schenzle and H. Brand, *Phys. Rev.* **20A** (1979) 1628.
- 7) J. M. Sancho and M. SanMiguel, *Z. Phys.* **B36** (1980) 357.
- 8) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys. Supplement* (1981).
- 9) K. Kitahara, W. Horsthemke, and R. Lefever, *Phys. Lett.* **70A** (1979) 337.
- 10) M. Suzuki, K. Kaneko, and F. Sasagawa, Submitted to *Prog. Theor. Phys.*
- 11) K. Kaneko, Submitted to *Prog. Theor. Phys.*

Dynamics of the “Noise-Induced Phase Transition”

東京工大・理 濱 田 義 保

いわゆる, 非平衡開放系が注目され始めてから久しい。その中でも, 最近特に, 多くの研究者の注目を集めているのが雑音によって誘起される相転移現象である¹⁾。この現象は, 雑音の大きさがある閾値をこえた時, 系の状態を記述する変数に対する定常確率密度関数の形が, ドラスティックに変わることから, この名がつけられている。平衡状態における 2 次相転移では, 転移点において臨界緩和がおこり, 動的にも, 緩和時間が発散するという異常がおこることは, よく知られていることである。ここでは, 雑音によって誘起される相転移でも同様なことが見られるか否かについて考えている。平均値の時間変化を考える限り, 転移点において, 臨界緩

和は起らないことがわかった。しかし、鈴木²⁾は、ある特別な量の時間変化を考えて、臨界緩和が起るという結果を得ている。このことから、平衡状態での相転移も含めて、相転移現象を考える時は、どのような量に注目しているかということが重要になるものと想像できる。適切なオーダーパラメーター（モード）を選ぶと、動的にも静的にも同じ点で異常があらわれ、その点を転移点と呼ぶべきだと思う。この問題については、深く立入らず、Verhulst モデル³⁾にマルチプリカティブな雑音の影響を与えた時に、得られた結果のみ述べることにする。

1. モデルおよび定常解

Verhulst モデルは、生態学におけるモデルのひとつである。ここでは、外部環境の影響が白色ガウス雑音であらわされている、次の確率微分方程式を出発点にとる。

$$dX_t = (\alpha X_t - X_t^2) dt + X_t \cdot dB_t$$

$\alpha > 0$, $\langle dB_t \rangle = 0$, $\langle dB_t dB_t \rangle = \sigma^2 dt$ とする。雑音項は、Stratonovich の解釈に従うものとする。この時、対応する Fokker-Planck 方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = - \frac{\partial}{\partial X} \left\{ (\alpha + \sigma^2/2) X - X^2 - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} X^2 \right\} P(X, t)$$

この方程式の定常解については、すでに議論¹⁾されており、 $\sigma^2/2$ が α より大きいかな否かによって定常確率密度関数 $P_{st}(X)$ の形がドラスティックに変わることがわかっている。このことから、 $\sigma^2/2 \alpha = 1$ で、雑音によって誘起される相転移がおこるものと考えられた。

2. 動的な振舞

雑音によって誘起される相転移の動的な様相について考えてみる。Fokker-Planck 方程式を、固有値問題として扱うことは、Schenzle と Brand⁴⁾によってなされている。しかし、平均値 $\langle X \rangle(t)$ の時間変化を求めるには、固有関数で展開することが必要であり、簡単ではない。ここでは、モーメントの時間変化をあらわす階級方程式を直接に扱う。考えているモデルでは、厳密解が得られることがわかった⁵⁾。また、厳密解が得られない時も、適当な漸近評価さえ行えば、久保等⁶⁾による $\mathcal{Q}$ -展開法、鈴木⁷⁾による Scaling 理論をともに含むような議論ができることもわかっている⁸⁾。

モーメントを、

$$a_m(t) = \int_0^\infty dX \cdot X^m P(X, t)$$

で定義する時、モーメント方程式は、

$$\frac{d}{dt} a_m(t) = m(\alpha + m\sigma^2/2) a_m(t) - m a_{m+1}(t)$$

で与えられる。逐次近似によって、1次モーメントの厳密解を求めると、次のようになる⁵⁾

$$\begin{aligned}
 a_1(t) = & x(t) + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dz} z \frac{d}{dz} z \int_0^t ds \int_0^1 du \int_{-\infty}^{\infty} dw \exp(-w^2 + \sqrt{2\sigma^2(t-s)} w) \\
 & \times e^{\alpha(t-s)} x(s) \exp(2zx(s)u/\sigma^2) (1-u)^{1+2\alpha/\sigma^2} \\
 & \times \{ 1 + \alpha/\sigma^2 - (2z/\sigma^2) e^{\alpha(t-s)} x(s) u (1-u) \exp(\sqrt{2\sigma^2(t-s)} w) \} \\
 & \times \exp(-(2z/\sigma^2) e^{\alpha(t-s)} x(s) u (1-u) \exp(\sqrt{2\sigma^2(t-s)} w)) \Big|_{z=1}
 \end{aligned}$$

ここで、 $x(t)$ は決定論的方程式

$$\frac{d}{dt} x = \alpha x - x^2$$

の解である。また、初期条件 $P(X, 0) = \delta(X - x(0))$ が成立つ場合を考えている。具体的な時間変化を求めるために、 $x(t) = x(0) = \alpha$ として、数値計算をおこなう。この結果、 σ^2 が小さい間は、 $a_1(t) - x(t)$ の変化は、 $\exp(-(\alpha - \sigma^2/2)t)$ に比例していることがわかった。しかし、 σ^2 が大きくなると、振動しながら定常状態に近づいて行くようになり、また、緩和時間は σ^2 が大きくなればなるほど長くなり、 $\sigma^2/2\alpha = 1$ で臨界緩和は、起きないことがわかった⁵⁾

定常分布は、 $\sigma^2/2\alpha = 1$ で、その形をドラスティックに変えるが、その点で $\langle X \rangle(t)$ の時間変化には、何らの異常も起きないことがわかった。このことは、 $\langle X \rangle_{st}$ 、つまり1次モーメントの定常値が、雑音の大きさによらず、常に一定であることに対応しているものと考えられる。従って、平均値の時間変化が臨界緩和を起さない方が、むしろ当然であるかもしれない。鈴木²⁾はこの問題で、 $\langle 1/X \rangle(t)$ の時間変化を考えているが、この量の方が、今の問題については適切であるかもしれない。しかし、ここで得た結果は、雑音の大きさが任意の場合に成立っており、 $\sigma^2/2\alpha = 1$ 付近での時間変化の様子を求めた最初のものであり、重要な結果であると考えている。

References

- 1) W. Horsthemke and M. Malek-Mansour, Z. Phys. B24 (1976), 307.
- 2) M. Suzuki, Adv. Chem. Phys. 46 (1980), in press.
- 3) H. Haken, Synergetics (Springer-Verlag, 1977).
- 4) A. Schenzle and H. Brand, Phys. Rev. A20 (1979), 1628.
- 5) Y. Hamada, submitted to Prog. Theor. Phys.
- 6) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. 9 (1973), 51.
- 7) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. Suppl. 64 (1978), 402 and references cited therein.
- 8) Y. Hamada, Prog. Theor. Phys. 64 (1980), 1127.