

Determining Avogadro's Number through Observations of Brownian Motion

ブラウン運動の観察からアボガドロ数を決定する

MASATOSHI ICHIKAWA

市川正敏

Lecturer, Graduate School of Science, Kyoto University

京都大学理学研究科 講師

What would be a “cool” experiment for high school students that can demonstrate sophisticated physical concepts, and yet take only 2 to 3 hours to complete? That was what I first asked myself when I was assigned to lead a physics experiment for ELCAS. An experiment associated with a famous scientist might just pique the interest of high school students. Albert Einstein is very popular in Japan, so he was an obvious choice. His achievements span such a wide variety of areas that one would never run out of things to talk to students about. Even some physicists are not aware of some of his less well-known accomplishments.

Now, which Einstein-related topic should I pick for the experiment in question? The photoelectric effect is what landed him the Nobel Prize, but we can only do boring experiments on it with the equipment available, so I ruled that out. The theory of relativity is another of Einstein's well-known achievements, but it is not a great topic for experiments. Students can get a feel for relativity by measuring the speed of light, or confirming principle of constancy of light velocity, but that is not much of a hands-on experiment. Einstein also discovered stimulated emission, which forms the basis of lasers that are ubiquitous in information and communication equipment. This discovery was as groundbreaking as what are considered Einstein's three greatest discoveries! Finally, there is Brownian motion. This should be perfect because it is a well-known phenomenon that can be observed with the equipment available.

Simply observing Brownian motion is fun, but a proper experiment requires an objective. What is a physical concept that high school students know of that can be determined from observing Brownian motion? My answer is Avogadro's number. Perrin was the first name that came to mind for determining Avogadro's number, and I found that he conducted 13 different types of experiments to determine the value. These experiments, although amazing, are not suitable for a high school level lab experiment. I decided to implement a simpler version of the experiment which involves tracking a particle undergoing Brownian motion and measuring the distance that it travels.

The experiment started with the observation of the motion of $1\text{ }\mu\text{m}$ -diameter glass beads with a microscope used for actual research. Fig. 1 shows a photo of students gathered around the microscope. From my experience, about one in ten people have trouble looking through binocular eyepieces with both eyes, but with recent advances in digital cameras, it is now easy to make observations using a monitor as well. I asked the students to take turns observing Brownian motion using either method. With only one microscope available, the students may

高校生にウケが良く、それなりに高度な内容を含むものの2、3時間以内に完了する実験テーマは何か。ELCASの物理実験で1テーマを担当するにあたり最初に考えた事である。人気と知名度が有る科学者にちなんだ実験なら高校生も興味を持ちやすいだろうか。その点でアルベルト・アインシュタインの日本での人気は抜群である。

アインシュタインの業績は多岐にわたる。マイナーなものになると物理学分野の研究者でも知らない事もあるので、話のタネにも困らない。ノーベル賞の対象になった光電効果、これは手元の装置ではツマラン実験しか出来ないのでパスする。相対性理論は実験が難しい。光の速度でも測れば、光速不変の原理など一端に触れられるが、ちょっと体験性に欠ける。光といえば、情報通信機器でよく用いられているレーザー光、このレーザーというのは誘導放出という現象を利用しているのだが、これもアインシュタインが発見している。重要性では彼の3大発明に引けを取らない。そして、ブラウン運動。これは有名だし手元の装置で出来るので丁度良いだろう。

ブラウン運動をただ眺めてもそこそこに面白いが、実験というからには何か目標が有った方がよい。高校生が知っていて、ブラウン運動から導き出せる何か。そういう理由でアボガドロ数を選んだ。アボガドロ数の決定と言えばペランである。では、ペランの実験に倣うかと調べてみると、ペランは13種類もの実験を行って、値の検証を行っていたらしい。すごい事である。そのまま真似する事はやめにして、単純かつ簡単に求められる実験に決めた。ブラウン運動する粒子を追跡し、移動距離を測るというものである。

実験は直径 $1\text{ }\mu\text{m}$ のガラスビーズの観察から行った。研究で用いるのと同じ顕微鏡を使い、接眼レンズを通して実際に動く様子を観察する。図1はその様子を写真にとったものである。双眼鏡型の接眼レンズは経験上、十人に一人くらいの割合でどうしても両眼で見ることが出来ない人がいるが、最近はデジタルカメラも発達したのでモニタ経由で見える事も容易になっている。ともあれブラウン運動の様子を順々に見てもらった。一人ずつしか覗けない接眼レンズのみだと待ち時間は退屈であったかもしれない。

粒子位置の測定の為には、目で見た映像を取得しなければならない。ここでは、事前に撮っておいた動画から1秒毎に抜き出した画像をプリンタで印刷しておいた。三分クッキングである。研究の現場では画像データから直接解析しているが、定規と電卓で算出する経験をしてほしかった(図2)。画像にはそのコマの時間と長さの目安が表示してあるので、それらを手掛かりに粒子位置の時間発展を取得する。各人にはそれぞれ異

have gotten restless as they awaited their turn.



Fig.1. Students making observations with a microscope. The images can be saved as videos on a computer.

図1. 顕微鏡で観察の様子。顕微鏡の観察像はパソコンに動画として保存できる。

The second part of the experiment involved tracking particle motion by analyzing microscopy images as shown in Fig. 2. In actual research, this procedure would be conducted directly on the image data using a computer, but I wanted the students to use a ruler and calculator to do the same analysis and thereby learn the underlying principles. Therefore, I extracted one image per second from pre-recorded videos made using the microscope and printed them in advance, much like for the Japanese TV show “Three-Minute Cooking,” where a lot of preparation is done beforehand to fit the show into a short time frame. The acquisition time and a length scale were indicated on each image so that the students could determine the time evolution of a particle’s position. Each student was given a different set of sequential images of different particles taken at different times. With every student analyzing a different set of data, errors can be averaged to make a more accurate determination of Avogadro’s number. These errors include systematic errors arising from variations in particle size and individual differences in manner of reading a length scale, and random errors, such as those arising from measuring distances with a ruler and inherent variation in random motion. The final value that we obtained was 6.58×10^{23} , which differs from the standard value by about 9%. Given the fact that the particle size varies by several percent, this is a surprisingly accurate result. Frankly, I did not expect to achieve such high accuracy.

The first value for Avogadro’s number that we calculated was exactly half of the value mentioned above. This was due to either a couple of issues in the lab manual. Firstly, the theoretical calculations in the manual were specifically for 1D motion, whereas in the experiment, we calculated 2D distances from images using x, y coordinates. This affects the calculation by a factor of 2. If you consider an isosceles right triangle, the lengths of the sides are in the ratio of $1:1:\sqrt{2}$. Secondly, I oversimplified the explanation in one part and made a mistake. When I deleted a section on probability distribution, I forgot to include a factor of 2 to maintain consistency. I was sincerely impressed by the comprehension and critical thinking skills of the ELCAS students as they asked pointed questions regarding these issues. I sincerely hope that they will continue to be critical thinkers as they advance in their studies.

Last but not least, I would like to thank the teaching assistants, Kubo, Ohmura, and Eto, for setting up the experiment, preparing the lab manual with the theoretical calculations, and providing support to the students.

なる粒子、異なる時間帯を切り出したコマ送り画像を配布してある。全員が異なるデータを解析し、それを持ち寄って平均する事で、粒子サイズのバラつきや目盛りの読み方の個人差などの系統誤差、定規の精度やランダム運動に起因する値のバラつきなどの偶然誤差。これらの誤差を平均化する事でより真値に近づけることができる。最終的には、 6.58×10^{23} というアボガドロ数の測定値を得る事が出来た。これは標準値として採用されている値に対して、9%程度の差異となっている。粒子サイズに数%程度のバラつきがある事を鑑みれば、十分な精度で求められたと言って良いだろう。正直ここまで高い精度で出てくるとは思っていなかった。



Fig.2. Students analyzing data. Since they are from different schools, I thought that this would be a great cooperative exercise to obtain a single accurate value.

図2. 皆で解析の様子。それぞれ異なる学校から集った状況なので、皆で協力する事で精度の良い一つの値を出すという作業を狙ってみた。

実は解析作業の際、最初にはじき出した値は上記の丁度半分であった。これは、我々の中での連絡ミスで、その時には1つしか気が付かなかったが、原因は以下の2つのどちらかだ。理論計算のテキストは1次元運動の場合で計算したが、画像の解析は平面の(x,y)座標を測って2次元での距離を計算させていたかもしれない。もうひとつは説明を単純にし過ぎて間違えている箇所があった。1つ目を単純に説明するなら、三辺1:1: $\sqrt{2}$ の二等辺三角形の斜めに相当する距離の2乗が2である事に対応している。二つ目は確率分布の説明を省いた時に整合性を取る2を忘れていた。この辺りの説明に対して的確な質問を投げかけた ELCAS 生の理解力と洞察力には素直に感心した。是非ともこの調子で学んでいって欲しい。

最後に、実験の準備や理論計算のテキストの作成、そして高校生たちをきめ細かくサポートしてくれたティーチングアシスタントの久保君、大村君、衛藤君にお礼を申し上げたい。



市川 正敏 (いちかわ まさとし)
京都大学大学院理学研究科
物理学・宇宙物理学専攻物理学第一教室
講師 (博士 (理学))
専門は、ソフトマター物理学、生命現象の物理学