

3次元渦系の相互作用

電機工 福湯章夫 (Akio Fukaya)

§. 序

3次元 Euler 方程式の解は有限時間内に *blow up* するの
か? これは流体力学の数学的理論で未解決な最も基本的な
問題の一つであろう。2次元の Euler 方程式の場合, 初期デ
ータが滑らかならばその解はいつまでも滑らかであることが
知られている。最近, Beale-Kato-Majda⁽¹⁾ によって3次元の
Euler 方程式の解の正則性と渦度の関係が調べられ, 渦度が
流線の場のある所で有界ならば解も正則であることが示さ
れた。言いかえると, 仮に *blow up* が起ったとすれば流線の
場の渦度の最大値ノルムが無限大にならなければならない。
3次元流では2次元流と違って渦の *stretching* が起るので,
それに伴って渦度の最大値ノルムは増大するはずであるが,
有限時間内に無限大の *stretching* (局所的にでも) が起る
メカニズムはあまりはっきりしていない。本論文の目的は
渦系モデルを使ってこのような *stretching* のメカニズムを
検討することである。

§. 渦の stretching の力 = スム (渦糸モデルによる考察)
 非粘性流では, 渦度はその点での速度場によって運ばれる。
 速度場は非回転部分を除くと渦度分布から

$$\omega(r) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(r-r') \times \omega(r')}{|r-r'|^3} dr' \quad (1)$$

で与えられる。ここでは簡単のために, 渦度はすべて有限の太さのいくつかの渦管に集中しているものとする。渦管の断面の径が渦管の曲率半径や渦管の相対距離に比べて充分小さいとすれば, 渦管は循環が一定の渦糸で近似できる。このとき (1) は

$$\omega(r) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \int_{\text{渦糸 } i} \frac{(r-r') \times dr'}{|r-r'|^3} \quad (2)$$

となる。ここに, N は渦糸の総数, Γ_i は i 番目の渦糸の循環の強さ, dr' は各渦糸に沿った変位ベクトルである。

流れの場を渦糸の集合で置きかえたとする。流れの各点での速度は (2) で与えられるが, r を渦糸上の点に取れば渦糸上の点はその速度で移動するので一般に渦糸は変形する。渦糸の誘起する速度はその形に依存するので, これは非常に複雑な非線形問題である。

ところで, 一本の渦糸は自分自身の誘起する速度場によっても変形する。local induction 近似⁽²⁾によれば, 渦糸の

各点に誘起される速度の大きさはその点での渦糸の曲率に比例し、その方向は陪法線方向である。更に、この近似では渦糸の *stretching* は起らない。したがって、渦糸が引伸ばされるためには遠距離力の効果を取り入れなければならない。

渦糸の集合で与えられる非粘性の流れの場合、渦糸の変形に際してその循環は一定に保たれ、また、流れの全エネルギーと全ヘリシティは保存される。渦糸上の各点に誘起される速度は渦糸に沿って一様ではないので一般には *stretching* や *contraction* (負の *stretching*) が起こるはずである。このとき、渦糸の各部分が引き伸ばされる割合いやその変化の時間のスケールは場所によって大きく異なるであろう。このような流れを解析するために、いま渦糸の集合の中のある一本の渦糸に注目しよう。これを S とする。渦糸 S 上の点 P の速度は、 S 自身が P に誘起する速度と S 以外の他の渦糸の誘起する速度の重ね合わせであるが、ある一つの渦糸素片の寄与は P からの距離の2乗に反比例するので、 P に最も近い渦糸素片の効果が最も大きいはずである。

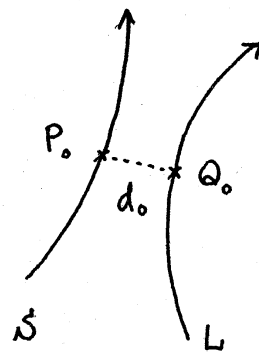


図 1.

そこで、ある瞬間に渦糸 S からの距離が局所的に最小の渦糸

とし、最小の距離を与える S , L 上の点それぞれ P_0 , Q_0 とする (図 1). P_0 , Q_0 間の距離を d_0 とする。渦糸の集合で与えられる流れの場が十分に発達し、ある瞬間に P_0 , Q_0 にあける渦糸 S , L の曲率半径 ρ_{P_0} , ρ_{Q_0} が

$$\rho_{P_0} \gg d_0, \quad \rho_{Q_0} \gg d_0. \quad (3)$$

を満し、点 P_0 の近くには (d_0 の程度の近く) 他の渦糸が存在しないと仮定しよう。これは無理な仮定ではない。実際、 $\rho_{P_0} \ll d_0$ とすれば点 P_0 附近の渦糸 S の変形には曲率の効果が支配的で *local induction* 近似が適用できる。このとき P_0 は陪法線方向に運動し、渦糸 S の局所的な *stretching* は起らない。この陪法線方向への運動の結果 S 自身は変形するが、 P_0 が他の渦糸に近づけば、近づくにつれて P_0 附近の渦糸 S の曲率が限りなく大きくなるのではないが、ある瞬間には (3) のような状況が実現されるはずである。図 1 の渦糸 S , L は大域的に別々の渦糸である必要はなく、先の方でつながつていてもよい。この条件が満たされたとき、以後の点 P_0 附近の渦糸 S の変形には渦糸 L の寄与が支配的で他の渦糸の影響は無視してもよいであろう。距離 d_0 に比べて渦糸の曲率半径が大きいので、 P_0 附近の流れは二本の直線渦糸が距離 d_0 で置かれたときの流れで近似できるはずである。

循環の等しい二本の渦糸が平行に置かれたときには、渦糸系は二本の渦糸の中心のまわりに回転し、反平行の場合は平行移動する。二本の渦糸の循環が異なれば、その比によって決まる点を中心に回転する。このとき、渦糸の相対位置は変わらず、変形も起らない。しかし、二本の直線渦糸がある有限の角度で置かれた場合、一本の渦糸が他方の渦糸上に誘起する速度が場所によって異なるので渦糸は変形し、変形の結果自己誘起速度も現われるので、以後は非常に複雑に変形することになる。

さて、距離が d_0 の平行でない二本の直線渦糸が相互作用の結果互に変形し、時間 t の後に渦糸上のどこかで

$$P_{P_1} \gg d_1, P_{Q_1} \gg d_1, d_1 < d_0, \sigma_1 < \sigma_0$$

を満たすような状況が実現されたとしよう(図2)。ここで、

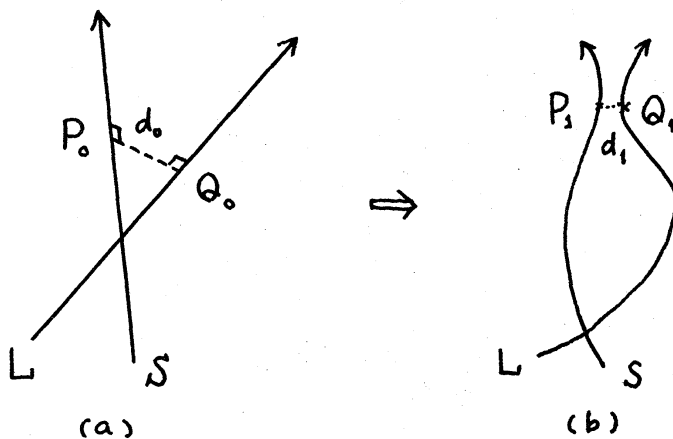


図2.

σ_0, σ_1 は点 P_0, P_1 での渦糸の断面積を表わす。渦糸近似では運動方程式 (2) に断面積は直接には現われないが、渦糸が引き伸ばされるとそれに反比例して断面積 σ は減少する。渦糸の循環は保存されるので $\Gamma = \omega \sigma$ から σ は渦度増大の目安になる。図 2 (b) の状態が実現されたとき、点 P_1, Q_1 附近の流れは d_1 の尺度では距離が d_1 の 2 本の直線渦糸による流れで近似できるであろう。この状態を出発点とすると、上と同様にして時刻 τ_1 後に

$$\rho_{P_2} \gg d_2, \rho_{Q_2} \gg d_2, d_2 < d_1, \sigma_2 < \sigma_1$$

を満たす点が渦糸上に現われる。渦糸の循環の保存と Euler 方程式のスケール則を使うと

$$\tau_1 = \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2 \tau_0, \quad d_2 = \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2 d_0, \quad \sigma_2 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2 \sigma_0$$

を得る。以後同様の過程がくり返されるとすれば、一般に

$$\tau_{n-1} = \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^{2^{n-2}} \tau_0, \quad d_n = \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^n d_0, \quad \sigma_n = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^n \sigma_0$$

となり、極限では

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \frac{d_0^2}{d_0^2 - d_1^2} \tau_0 < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$$

が得られる。すなわち、有限時間 T の間に渦糸上のどこかに

無限に引き伸ばされる点が見られることになる。このとき、 $\Gamma = \omega \sigma = \text{一定}$ を考慮すると渦度の最大値ノルムは無限大になる。

非粘性流では全エネルギーは保存されなければならない。ところが、循環が一定の無限に細い渦系による運動エネルギーは一般に無限大になる。したがって渦が引き伸ばされた結果、有限の長さの無限に細い渦系が見られることは正しいはずである。渦の stretching のメカニズムについてはこの点も考慮されなければならない。

上で考えたような渦の stretching の一段階を一つの素過程とよぶことにしよう。このような素過程が無限にくり返されるということは、各段階で幾何学的相似を仮定していることになる。したがって渦系の断面も充分早く細くならなければならない。これは各段階で渦管が渦系で近似され、そのためには渦系間の距離 d が減少するにつれて渦系の断面の半径もそれ以上に早く、あるいは少なくとも同じ割合で減少する必要があるからである。

前述の考察では初めに距離が d_0 の二本の直線渦系を考えながら、渦系は無限に長い直線と考える必要はなく、 P_0, Q_0 附近で直線的であればよい。そこで長さが l_0 で断面積が一樣に σ_0 の渦系素片を考えよう(図3)。 a_0 は渦系の断面の半径と

したとき (i.e. $\sigma_0 \sim \pi a_0^2$)

$$l_0 \gg d_0 \gg a_0$$

であれば渦糸近似は正しく, P_0 , Q_0 附近の渦糸の形状には渦糸素片 l_0 のみの寄与を考えればよい。

この状態から出発して最初の素過程で, l_1, d_1, a_1 が実現したとしよう。前と同様に素過程を n 回くり返した後には

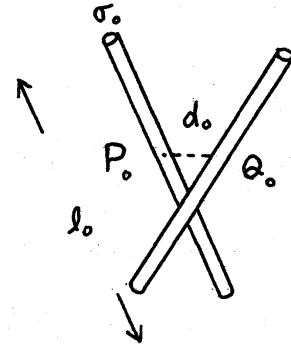


図3

$$l_n = \left(\frac{l_1}{l_0}\right)^n l_0 \equiv K_1^n l_0, \quad d_n = \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^n d_0 \equiv K_2^n d_0, \quad a_n = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n a_0 \equiv K_3^n a_0.$$

となる。stretching の素過程が無限にくり返されるための幾何学的条件は, $K_1 \leq K_2 \leq K_3$ であるが, ここでは簡単のため K_1, K_2, K_3 がすべて等しく K であつたとしよう。

$$l_n = K^n l_0, \quad d_n = K^n d_0, \quad a_n = K^n a_0.$$

l_n は各素過程のスケールを表わすと考えられるが, 各段階で (3) の条件が成り立っていることから, l_n は点 P_n における渦糸の曲率半径で置きかえてもよいであろう。

以上のような stretching の素過程をくり返すことにより n 段階には循環が Γ で長さが l_n , 断面の半径が a_n の渦糸素

片が現われる。この渦糸素片の運動エネルギーに対する寄与 ε_n は

$$\varepsilon_n \sim 2\pi\Gamma l_n (\log a_n + \text{有限部分})$$

で、 $l_n = K^n l_0$, $a_n = K^n a_0$ から

$$\varepsilon_n \sim 2\pi\Gamma l_0 K^n (n \log K + \text{有限部分})$$

となり、 $K < 1$ ならば $n \rightarrow \infty$ で $\varepsilon_n \rightarrow 0$ である。一方、インストロフーに対する寄与 S_n は、この渦糸素片の渦度 ω_n が $\omega_n = \Gamma / \sigma_n$ で与えられるので

$$S_n \sim \omega_n^2 l_n \sigma_n = \frac{\Gamma^2 l_0}{\pi a_0^2} K^{-n}$$

で、 $n \rightarrow \infty$ で $S_n \rightarrow \infty$ になる。すなわち、以上のような $\times$ カ = ズムによれば、渦が引き伸ばされて有限時間内に渦度の最大値ノルムが発散し、全エネルギーは一定に保たれ、インストロフーが無限大になることが起こり得る。

渦度が発散している部分の Hausdorff 次元は次のようにして計算することができる。はじめに図 2 (a) の状態で P_0 と Q_0 の中点を中心として半径 l_0 の球を描く。この球の内部では渦糸 S , L はともに直線渦糸と見なしてよい。対称性から、最初の素過程によって stretching の起った l_1 のスケールの部

はスナ所できるはずである(図4)。そこで P_2, Q_2 および P'_2, Q'_2 の中点を中心として半径 l_2 の球をくりぬく。 $K < 1/2$ と

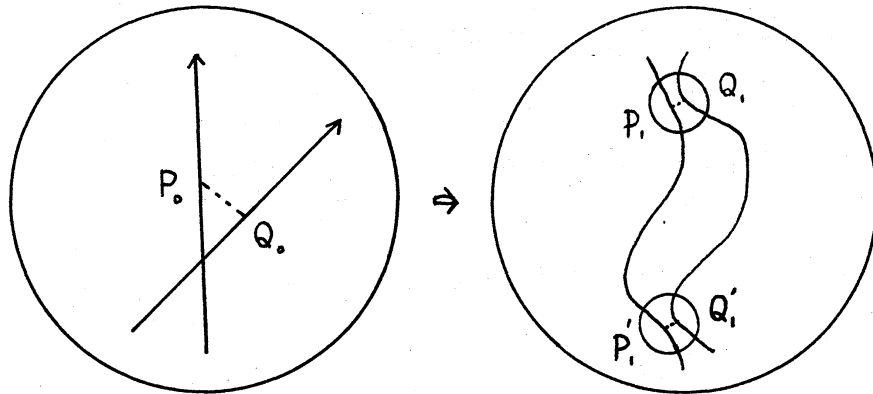


図4.

すなはち、これらの球はともに最初の半径 l_0 の球の内部に含まれると考えるよりである。以下同様に各素過程ごとに引き伸ばした部分をくりぬく操作をくり返すと、くりぬかれた部分の Hausdorff 次元は

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log (1/K)^n} = -\frac{\log 2}{\log K}$$

$K < 1/2$ ならば $D < 1$ である。ところで、 $1/2 < K < 1$ でも漏れ引き伸ばされることになるが、対称性を考慮して各素過程ごとに引き伸ばした部分の数が2倍になるとすれば、これらの部分の全エネルギーに対する寄与は $2^n \epsilon_n$ となり、これは $K > 1/2$ ならば発散してしまう。したがって、 $K < 1/2$ の仮定は自然である。

8. 数値例

前節で考察したような渦の stretching が実際に起こるかどうかを調べるために、ここでは二本の直線渦系が相互作用によって変形して行く様子を数値的に調べる。計算のスキームは(2)を差分化したもので、Chorin⁽³⁾が用いたものと同じである。すなわち、渦系を、 L をそれぞれ N_1, N_2 個の折れ線で近似する。折れ線の結点の位置ベクトルをそれぞれ $r_j^{(1)}$ ($j=0, 1, \dots, N_1$), $r_j^{(2)}$ ($j=0, 1, \dots, N_2$) としたとき

$$U(r) = -\frac{\Gamma_1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_1} \frac{a_k^{(1)} \times \Delta r_k^{(1)}}{|a_k^{(1)}|^3} - \frac{\Gamma_2}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_2} \frac{a_k^{(2)} \times \Delta r_k^{(2)}}{|a_k^{(2)}|^3}$$

$$a_k^{(i)} = \frac{1}{2} (r_{k+1}^{(i)} - r_k^{(i)}) - r \quad (i=1, 2)$$

$$\Delta r_k^{(i)} = r_{k+1}^{(i)} - r_k^{(i)}.$$

この方法では曲線を折れ線で近似しているもので、渦系が変形し引き伸ばされるにつれて当然折れ線を細分しなければならぬ。Chorinは $|\Delta r_k^{(i)}|$ がある値以上になったときこれを半分に分割する方法を取ったが、この方法ではある点で渦系の曲率半径が λ 以下になったときには折れ線で渦系を正しく近似できぬ。本論文の目的は長時間にわたって渦系の変形を追跡するということよりは、むしろ渦系の形をできるだけ正確に求め、前節で考察したような渦の stretching の一つの素過程

と見たときの状態が現われるかどうかを調べることにするので、折れ線の細分は以下の方法を取った。すなわち、折れ線の結点で相接する線分のなす角度がある値 $\theta_{\min}$ 以下になったとき、その点での渦系の曲率半径（近隣の点の外接円の半径）を保つように細分し、各結点での線分のなす角度 θ が常に $\theta_{\min} < \theta \leq 2\pi$ を満たすようにするものである。実際には曲率と同時に旋率の保存も考慮した。

初期における2本の渦系のなす角度を ϕ_0 としたとき、次の3つの場合について計算した。

$$\text{case 1 } \phi_0 = 45^\circ, \quad \text{case 2 } \phi_0 = 90^\circ, \quad \text{case 3 } \phi_0 = 135^\circ$$

その他のデータは次の通りである。

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1, \quad l_0 = 1, \quad d_0 = 0.1, \quad N_1 = N_2 = 20; \quad \theta_{\min} = 150^\circ$$

時間発展は1次のEuler法を用いた。 Δt は各時刻ごとに

$$\Delta t = \alpha \times \min_{\substack{1 \leq k \leq N \\ i=1,2}} \frac{|\Delta r_k^{(i)}|}{\|\Delta u_k^{(i)}\|}$$

から決定した。ここに、 $|\Delta r_k^{(i)}|$ はその時刻での k 番目の線分の長さ、 $\|\Delta u_k^{(i)}\|$ は k 番目の線分の両端に誘起される速度の絶対値、 N は線分の個数で細分のたびに増加する。 α は定数で計算には $\alpha = 0.01$ を用いた。

図5, 図6, 図7に case 1, case 2, case 3 について渦糸の形状の様子を示した。渦糸は初期に xy 平面にあり $x = 0.55$, $0 \leq y \leq 1$ の線分とした。図の各時刻において, 左側の図は渦糸の xy 平面への投影図, 右側は yz 平面への投影図である。また, xy 平面への最初の投影図で $\times$ 印は, 初期における渦糸を表わす。さらに, $\circ$ 印は初期において渦糸しか xy 平面を切る点を示す。 N はその時刻での線分の数, d は渦糸と z 軸の距離 (cf. $d_0 = 1$) である。case 1, 2 では $d > d_0$ に注意しよう。すなわち, 初期の二本の渦糸が平行から互角までの場合には渦糸間の相対距離が離れる傾向があるようである。一方, case 3 の場合は相対距離が急速に小さくなっていく。渦の stretching については, case 1, 2 とは中央附近の曲率の大きな部分は初期に比べて渦は縮んでおり, 渦が引き伸ばされていくのはその外側の比較的直線に近い部分である。この部分はもう一方の渦糸からの距離が大きい所なので, case 1, 2 の場合は前節で考察した stretching の素過程と見てよめる状況にはなっていない。case 3 についてはほぼ全体的に渦は引き伸ばされており, 特に他方の渦糸と接近している部分 (前節の P_1 , Q_1 と見てよめる部分) では伸びの割合が大きいの。図8は case 3 の $t = 0.158$ での渦糸と, その相対位置の xy , yz , xz 平面への投影図を示した。

図中の $\times$ FP, $\circ$ 印は渦糸, L 間の最小距離と与える点を示す. この点での ρ , d , σ は

$$\rho_p = 0.112, \rho_0 = 0.040, d = 0.0384, \sigma_p = 0.310, \sigma_0 = 0.433$$

$$t = 0.174 \text{ では}$$

$$\rho_p = 0.0695, \rho_0 = 0.0489, d = 0.0163, \sigma_p = 0.145, \sigma_0 = 0.0904$$

になっている. σ は渦糸の比断面積を表わす. $t = 0.174$ では $\rho \gg d$ と考えようであるが, 渦糸の伸びは充分では無いようである.

以上の計算結果から前節で考察したような stretching が起こるかどうかが結論は出せないが, 及平行に近い渦糸の相互作用が渦の stretching に大きな寄与を持つことは明らかであろう.

文献

- (1) Beale, J.T., Kato, T. and Majda, J. *Comm. Math. Phys.* 94 (1984) 61
- (2) Arms, R.T. and Hama, F.R. *Phys. Fluids* 8 (1965) 553
- (3) Chorin, A.J. *Comm. Math. Phys.* 83 (1982) 517

