

Hilbert modular form の trace formula 及び L-関数の特殊値

東工大・理学部 高瀬 幸一 (Koichi Takase)

1. 本稿では, Zagier [8] の方法により, 次の 2 項を同時に考える; 1) Hilbert cusp form の空間に作用する Hecke operator $T(N)$ の trace の explicit formula, 2) Hilbert cusp form に付随する 2 番目の "L-関数" $L_2(s, f, \bar{\chi}_w)$ の特殊値。主結果は, No. 7 に示す。No. 9 では, 例として, 実 2 次体の場合を考える。

2. g 次総実代数体 F を取り, その狭義類数は 1 であると仮定する。 F の conjugate mapping $x \mapsto x^{(j)}$ ($j=1, \dots, g$) に対応する real prime を ∞_j ($j=1, \dots, g$) とする。 F の idele class group F_A^*/F^* の unitary character ω を取り,

$$\omega(x) = \prod_f |x_f|_f^{s(f)} \times \prod_{f \mid \infty} (x_f/|x_f|)^{n(f)} \times \prod_{f \nmid \infty} \lambda_f(\tilde{x}_f) \quad (x = (x_f) \in F_A^*)$$

とする ($s(f) \in \sqrt{f}\mathbb{R}$, $n(f) = 0$ or 1 , $|\cdot|_f =$ normalized f -adic absolute value, $\lambda_f: f$ -adic unit group の character, $\tilde{x}_f = x_f \cdot \pi_f^{-\text{ord}_f(x_f)}$)。

ω の conductor を $f(\omega) \leq 1$, ω に対応する F の ideal character を χ_ω とする。 $f(\omega)$ で割れる F の 整 ideal M に對して,

$$\Gamma_0(M) = \left\{ \gamma \in GL(2, O_F) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{M}, \det \gamma \gg 0 \right\}$$

とおく。 $k = (k_1, \dots, k_g) \in \mathbb{Z}^g$ s.t. $k_j \equiv n(\infty_j) \pmod{2}$, $k_j > 0$ に對して,

$H^g = \{ z = (z^{(1)}, \dots, z^{(g)}) \in \mathbb{C}^g \mid \operatorname{Im} z^{(j)} > 0 \}$ 上の正則関数 f で、条件

1) $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M)$ 12 $z \mapsto \gamma z$,

$$f(\gamma z) = \bar{\lambda}_M(d) \cdot (\det \gamma)^{-(k+S(\infty))/2} \cdot J(\gamma, z)^k \cdot f(z).$$

こゝで

$$\lambda_M(d) = \prod_{j=1}^g \lambda_j(d), \quad (\det \gamma)^{-(k+S(\infty))/2} = \prod_{j=1}^g (\det \gamma^{(j)})^{-(k_j+S(\infty)_j)/2}$$

$$J(\gamma, z)^k = \prod_{j=1}^g (c^{(j)} z^{(j)} + d^{(j)})^{k_j}.$$

2) $|f(z)| \cdot (\operatorname{Im} z)^{k/2}$ は、 H^g 上 有界。

こゝで

$$(\operatorname{Im} z)^{k/2} = \prod_{j=1}^g (\operatorname{Im} z^{(j)})^{k_j/2}.$$

を満す f のからなる、有限次元 $\mathbb{C}$ -vector space を $S_k(M, w)$ と書く。

$f, g \in S_k(M, w)$ の Petersson 内積を、

$$(f, g) = \int_{\Gamma_0(M) \backslash H^g} f(z) \cdot \overline{g(z)} \cdot (\operatorname{Im} z)^k \cdot d\mu(z) \quad (d\mu(z) = \prod_{j=1}^g y^{(j)-2} dx^{(j)} dy^{(j)})$$

により定義する。

F の prime ideal $\mathfrak{f}$ 12 $z \mapsto \gamma z$, Hecke operator $T(\mathfrak{f}^e)$ ($e \geq 0$) を、

$$(T(\mathfrak{f}^e) \cdot f)(z)$$

$$= (p^e)^{-(k+S(\infty))/2} \cdot \sum'_{1 \leq i \leq e} \sum_{t \in \mathcal{O}_F/\mathfrak{f}^i} (p^{e-i})^k \cdot \lambda_M(p^{e-i}) \cdot f\left(\begin{pmatrix} p^{e-i} & t \\ 0 & p^i \end{pmatrix} z\right)$$

により定義する。こゝで $p \in \mathcal{O}_F$ は、 $\mathfrak{f}$ の縮正生成元、 $\sum'_{1 \leq i \leq e}$ は、

$(\mathfrak{f}^{e-i}, M) = 1$ なる $1 \leq i \leq e$ 上の和をとる。

F の 整 ideal $\mathfrak{o}$ 12 $z \mapsto \gamma z$, $T(\mathfrak{o}) = \prod_{\mathfrak{f} \in \mathfrak{o}} T(\mathfrak{f}^e) \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(S_k(M, w))$ とおく。

$f \in S_k(M, w)$ の Fourier 展開を、

$$f(z) = \sum_{0 \ll t \in \mathcal{O}(F/Q)^{-1}} a(t) \cdot e(T_{F/Q}(t \cdot z))$$

$$\left(\mathcal{O}(F/Q) : F/Q \text{ の different, } e(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x), T_{F/Q}(t \cdot z) = \sum_{j=1}^g t^{(j)} z^{(j)} \right)$$

とす。 $0 \ll t \in \mathcal{O}(F/Q)^{-1}$ に對して,

$$\zeta(t, t \cdot \mathcal{O}(F/Q)) = a(t) \cdot t^{-(k+s(\infty))/2}$$

は, f と $t \cdot \mathcal{O}(F/Q)$ のみに依る。更に, F の整 ideal $\mathfrak{o}$ に對して,

$$\zeta^*(t, \mathfrak{o}) = \zeta(t, \mathfrak{o}) \cdot N(\mathfrak{o}) \quad (N(\mathfrak{o}) = \text{absolute norm of } \mathfrak{o})$$

とあって, f に付随する 2 番目の L -函数を

$$L_2(s, f, \bar{\chi}_w) = \zeta_F(2s)_M \cdot \sum_{(a, M)=1} \bar{\chi}_w(\mathfrak{a}) \cdot \zeta^*(f, \mathfrak{a}^2) \cdot N(\mathfrak{a})^{-(s+1)}$$

と定義する。 ($\zeta_F(s)_M = \prod_{\mathfrak{f} \nmid M} (1 - N(\mathfrak{f})^{-s})^{-1}$)。 $L_2(s, f, \bar{\chi}_w)$ は, $\text{Re } s > 1$

で絶対収束する。

$f \in S_k(M, w)$ は, 条件

1) f は全ての Hecke operator $T(\mathfrak{a})$ の eigen vector

2) $\zeta(f, 1) = 1$

を満すとき, normalized eigen form と呼ばれる。このとき

$$T(\mathfrak{a}) \cdot f = \zeta^*(f, \mathfrak{a}) \cdot f \quad \text{for } \forall \mathfrak{a}$$

となり, 又

$$\begin{aligned} L_2(s, f, \bar{\chi}_w) &= \zeta_F(2s)_M \cdot \zeta_F(s)_M^{-1} \cdot \sum_{(a, M)=1} \bar{\chi}_w(\mathfrak{a}) \cdot \zeta^*(f, \mathfrak{a}^2) \cdot N(\mathfrak{a})^{-(s+1)} \\ &= \prod_{\mathfrak{f} \nmid M} H_{\mathfrak{f}}(\bar{\chi}_w(\mathfrak{f}) \cdot N(\mathfrak{f})^{-(s+1)})^{-1} \end{aligned}$$

となる。こゝで

$$H_{\mathfrak{f}}(T) = (1 - \alpha^2 T)(1 - \alpha\beta T)(1 - \beta^2 T), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ s.t. } \begin{cases} \alpha + \beta = \zeta^*(f, \mathfrak{f}) \\ \alpha\beta = \bar{\chi}_w(\mathfrak{f}) \cdot N(\mathfrak{f}) \end{cases}$$

3. 以下では, $M = f(W)$, $k_j > 2$ ($j=1 \cdots g$) と仮定する。

このとき, $S_k(M, W)$ は new form の空間と一致し, normalized eigen form からなる $\mathbb{C}$ -base $\{f_1 \cdots f_r\}$ をもつ (Miyake [2]). $\{f_1 \cdots f_r\}$ は Petersson 内積に関して, 直交系を成す。

$\forall s \in \mathbb{C}$ s.t. $\operatorname{Re} s > 1$ に対して, $f \mapsto L_2(s, f, \bar{\chi}_W)$ は, $S_k(M, W)$ の $\mathbb{C}$ -linear form f_i から, $\Xi_s \in S_k(M, W)$ が一意的に定まって,

$$(f, \Xi_s) = L_2(s, f, \bar{\chi}_W) \quad \text{for } \forall f \in S_k(M, W)$$

となる。 $\{f_1 \cdots f_r\}$ が直交系を成すことから,

$$\Xi_s = \sum_{i=1}^r L_2(s, f_i, \bar{\chi}_W) \cdot (f_i, f_i)^{-1} \cdot f_i$$

となる。Fourier 係数と比較して,

$$\mathcal{C}^*(\Xi_s, \mathcal{O}) = \sum_{i=1}^r L_2(s, f_i, \bar{\chi}_W) \cdot (f_i, f_i)^{-1} \cdot \mathcal{C}^*(f_i, \mathcal{O}) \quad (1)$$

となる。

4. $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M) \right\}$ とし, $z \in H^3$, $s \in \mathbb{C}$ に対して,

$$E_M(z, s) = \zeta_F(2s)_M \times \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(M)} N_{F/\mathbb{Q}}(\operatorname{Im} \gamma(z))^s$$

とおくとき, 右辺は $\operatorname{Re} s > 1$ で絶対収束する。 $E_M(z, s)$ は, s に関して

$\mathbb{C}$ 上に有理型に解析接続され, $s \neq 1$ で正則, $s=1$ は simple pole の residue は,

$$\operatorname{Res}_{s=1} E_M(z, s) = \frac{1}{4} \cdot (2\pi)^g \cdot \frac{R(F)}{D(F)} \cdot N(M)^{-1} \cdot \prod_{\mathfrak{f} | M} (1 - N(\mathfrak{f})^{-1})$$

となる ($R(F)$: regulator of F , $D(F)$: F の絶対判別式)。

$f \in S_k(M, w)$ は normalized eigen form であるとする。このとき, F の prime ideal $\mathfrak{f}$ に対して,

$$|\zeta^*(f, \mathfrak{f}^e)|^2 = \begin{cases} N(\mathfrak{f}^e) & \text{if } \mathfrak{f} \nmid M \\ \bar{\chi}_w(\mathfrak{f}^e) \cdot \zeta^*(f, \mathfrak{f}^e)^2 & \text{if } \mathfrak{f} \nmid M \end{cases}$$

となることは注意する, $\operatorname{Re} s > 1$ のとき,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_0(M) \backslash H^g} |f(z)|^2 \cdot (\operatorname{Im} z)^k \cdot E_M(z, s) d\mu(z) \\ &= \left(\prod_{j=1}^g \Gamma(s + k_j - 1) \cdot (4\pi)^{-(s + k_j - 1)} \right) \cdot \zeta_F(s) \cdot D(F)^{s - \frac{1}{2}} \cdot L_2(s, f, \bar{\chi}_w) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。よって, $L_2(s, f, \bar{\chi}_w)$ は $s \in \mathbb{C}$ 上に有理型に解析接続され

(2) の両辺の $s=1$ での residue を比較して,

$$\begin{aligned} & L_2(1, f, \bar{\chi}_w) / (f, f) \\ &= \frac{\pi^g}{2} \cdot \left(\prod_{j=1}^g (4\pi)^{k_j} \cdot \Gamma(k_j)^{-1} \right) \cdot D(F)^{-1} \cdot N(M)^{-1} \cdot \prod_{\mathfrak{f} \nmid M} (1 - N(\mathfrak{f})^{-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。即ち, $L_2(1, f, \bar{\chi}_w) / (f, f)$ は, f に関する定数となる。

よって, (1) で $s=1$ とすれば

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} T(\mathcal{O}) &= \sum_{i=1}^r \zeta^*(f_i, \mathcal{O}) \\ &= 2 \cdot \pi^{-g} \cdot \left(\prod_{j=1}^g (4\pi)^{-k_j} \cdot \Gamma(k_j) \right) \cdot D(F) \cdot N(M) \cdot \prod_{\mathfrak{f} \nmid M} (1 - N(\mathfrak{f})^{-1})^{-1} \times \zeta^*(\mathcal{E}_1, \mathcal{O}) \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

5. $z, z' \in H^g$ に対して,

$$K_1(z, z') = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z} \backslash \Gamma_0(M)} \lambda_M(\gamma) \cdot (\det \gamma)^{(k + s(\infty))/2} \cdot (z' + \gamma(z))^{-k} \cdot J(\gamma, z)^{-k}$$

とおく。 $z \sim z'$

$$\mathbb{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M) \right\} = \text{center of } \Gamma_0(M)$$

$$\lambda_M(r) = \prod_{p|M} \lambda_p(r) \quad \text{for } r = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M)$$

$$(z' + r(z))^{-k} = \prod_{j=1}^g (z'_j + r(z)_j)^{-k_j}.$$

$K_1(z, z')$ は 絶対収束して, ϕ -変数に因りて, $K_1(*, z') \in S_k(M, w)$ である。更に, $\forall f \in S_k(M, w)$ に対して,

$$(f, K_1(*, -\bar{z})) = c_k \cdot f(z) \quad \left(c_k = \pi^g \cdot \left(\prod_{j=1}^g (\sqrt{r_j})^{k_j} \cdot 2^{2-k_j} \cdot (k_j-1)! \right) \right)$$

となる (Shimizu [3], Th. 9)。

Γ の 整 ideal $\mathcal{O}$ に対して, Petersson 内積 に関する $T(\mathcal{O})$ の conjugate $\in T^*(\mathcal{O})$ とし (i.e. $(T(\mathcal{O})f, g) = (f, T^*(\mathcal{O})g)$),

$$K_{\mathcal{O}}(*, z') = T^*(\mathcal{O}) \cdot K_1(*, z') \in S_k(M, w)$$

とおく ($T^*(\mathcal{O})$ は, $K_1(z, z')$ の ϕ -変数に因りて作用する。),

$\forall f \in S_k(M, w)$ に対して,

$$(f, K_{\mathcal{O}}(*, -\bar{z})) = c_k \cdot (T(\mathcal{O})f)(z)$$

となる。

§3 に $(\mathcal{O}, M) = 1$ のとき $T^*(\mathcal{O}) = \bar{\chi}_w(\mathcal{O}) \cdot T(\mathcal{O})$ である。

$$K_{\mathcal{O}}(z, z') = \sum_{r \in \mathbb{Z} \setminus \Delta_0(M) \text{ s.t. } (\det r) = \mathcal{O}} \lambda_M(r) \cdot (\det r)^{(k+s(M))/2} \cdot (z' + r(z))^{-k} \cdot J(r, z)^{-k}$$

となる。 $z \sim z'$

$$\Delta_0(M) = \left\{ r = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathcal{O}_F) \mid \det r \gg 0, c \equiv 0 \pmod{M}, (a, M) = 1 \right\}.$$

更に, $S_k(M, w)$ の normalized eigen base $\{f_1, \dots, f_r\}$ に対して,

$$K_{\mathcal{O}}(z, z') = w_{\mathcal{O}}(-1) \cdot c_k \cdot \bar{\chi}_w(\mathcal{O}) \cdot \sum_{i=1}^r c^*(f_i, \mathcal{O}) \cdot (f_i, f_i)^{-1} \cdot f_i(z) \cdot \overline{f_i(-\bar{z}')} \quad (5)$$

となる。

式 (1), (2), (5) から次を得る;

Prop. 1 $(n, M) = 1$ なる F の 整 ideal $\mathfrak{n}$ に対して,

$$\begin{aligned} & \zeta^*(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}) \\ &= \left(\prod_{j=1}^g (2\sqrt{f})^{k_j} \cdot (k_j - 1) \cdot (4\pi)^{s+k_j-2} \cdot \Gamma(s+k_j-1)^{-1} \right) \cdot D(F)^{\frac{1}{2}-s} \cdot \zeta_F(s) \cdot \bar{\chi}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{n}) \\ & \times \int_{\Gamma_0(M) \backslash H^g} K_n(z, -\bar{z}) \cdot (L_m z)^k \cdot E_M(z, s) d\mu(z). \end{aligned}$$

6. Prop. 1 に現われる積分を計算して, $\zeta^*(\mathfrak{w}, \mathfrak{n})$ の公式を得るのであるが, その際生ずる特殊な character sum について述べる.

n, m は F の 整数で, m は 素正とする. M で割れる F の 整 ideal $\mathfrak{c}$ に対して,

$$\begin{aligned} C_{n,m}(\omega, \mathfrak{c}) &= m^{(k-s(\omega))/2} \cdot \sum_{t \in \mathcal{O}_F/\mathfrak{c} \text{ s.t. } t^2 + mt + n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}}} \bar{\lambda}_M(t) \\ & \left(\lambda_M(t) = \begin{cases} \prod_{\mathfrak{p} \mid M} \lambda_{\mathfrak{p}}(t) & : \text{if } (t, M) = 1 \\ 0 & : \text{if } (t, M) \neq 1 \end{cases} \right) \end{aligned}$$

とおく. 更に $s \in \mathbb{C}$ に対して,

$$L_M(n, m, \omega; s) = \zeta_F(s)^{-1} \cdot \zeta_F(2s)_M \cdot \sum_{M \mid \mathfrak{c}} C_{n,m}(\omega, \mathfrak{c}) \cdot N(\mathfrak{c})^{-s}$$

とおく ($\sum_{M \mid \mathfrak{c}}$ は, M で割れる F の 整 ideal $\mathfrak{c}$ 上の和).

F の 2 次拡大 $K = F(\sqrt{n^2 - 4m})$ に対して, K/F の 相対判別式の生成元

$D \in \mathcal{O}_F$ を選んで, $n^2 - 4m = D \cdot f^2$ ($f \in \mathcal{O}_F$) とし, K/F に対応する F の

ideal character $\chi_D = \left(\frac{K/F}{*} \right)$ とすると, 次を得る;

Prop. 2 $L_M(n, m, w; s)$

$$= \begin{cases} \left(-\frac{n}{2}\right)^k \cdot \chi_w\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \beta_F(2s-1) \cdot N(M)^{1-2s} \cdot \prod_{\mathfrak{f} \in M} (1+N(\mathfrak{f})^{s-1})(1-N(\mathfrak{f})^{-s}) & \text{if } f=0 \\ L_F(s, \chi_D) \times \sum_{\mathfrak{f} \in f_M} N(f_M/\mathfrak{f})^{1-2s} \cdot \prod_{\mathfrak{f} \in \mathfrak{f}} (1-\chi_D(\mathfrak{f}) \cdot N(\mathfrak{f})^{-s}) & \text{if } f \neq 0 \\ \times \sum_{\mathfrak{f} \in M_M^{(f)}} c_{n,m}(w, M^{(f)}/\mathfrak{f}) \cdot N(M^{(f)}/\mathfrak{f})^{-s} \cdot \prod_{\mathfrak{f} \in \mathfrak{f}} (1-\chi_D(\mathfrak{f}) \cdot N(\mathfrak{f})^{-s}) \\ \times \prod_{\mathfrak{f} \in M} (1-N(\mathfrak{f})^{-s}) \end{cases}$$

ここで

$$L_F(s, \chi_D) = \prod_{\mathfrak{f} \in D} (1 - \chi_D(\mathfrak{f}) \cdot N(\mathfrak{f})^{-s})^{-1}$$

$$f_M = \prod_{\mathfrak{f} \in M} \mathfrak{f}^{ord_{\mathfrak{f}}(f)}$$

$$M(f) = \prod_{\mathfrak{f} \in M} \mathfrak{f}^{c(\mathfrak{f})} \quad \text{for } c(\mathfrak{f}) = \max\{2 \cdot ord_{\mathfrak{f}}(f) + 1, ord_{\mathfrak{f}}(M \cdot f)\}$$

又, $F(\sqrt{n^2-4m}) = F$ のとき, $\chi_D = 1$ とする.

Prop. 2 により, Shintani [4] 又は Siegel [5], [6] の公式を用いて, 適当な $s \in \mathbb{Z}$ における $L_M(n, m, w; s)$ の値を具体的に求めることが出来る.

7. Prop. 1 に現われる積分を計算して, 次の通り;

Th. 1 $M = f(w)$, $k_j > 2$ ($j = 1, \dots, g$) と仮定する. $(n, M) = 1$ なる F の整 ideal $\mathfrak{o}$ に対して, $\mathfrak{o}$ の統正生成元 $m \in \mathfrak{o}_F$ を取る. 奇整数 k を取って, $1 < k < k_0 - 1$ ($k_0 = \min\{k_1, \dots, k_g\}$) とする. このとき,

$$C^*(\Phi_k, \alpha)$$

$$= \left(\prod_{j=1}^g (4\pi)^{k_j-1} \cdot \Gamma(k_j-1)^{-1} \cdot D(F)^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_F(2k) \cdot N(\sqrt{\alpha})^{1-k} \cdot \chi_w(\sqrt{\alpha}) \right. \\ \left. + (-1)^{\frac{1}{2}(k+1)g} \cdot \frac{\pi^g}{2} \cdot \left(\prod_{j=1}^g 2^{k_j} \cdot (2\pi)^{k+k_j-2} \cdot \frac{\Gamma(k) \cdot \Gamma(k_j-k)}{\Gamma(k+k_j-1) \cdot \Gamma(k_j-1)} \right) \cdot D(F)^{\frac{1}{2}-k} \cdot m^{1-k} \right. \\ \left. \times \sum_{n^2 \ll 4m} N_{F/\mathbb{Q}}(4m-n^2)^{k-\frac{1}{2}} \cdot C_{k-k-1}^k(n, m) \cdot L_M(n, m, w; k) \right)$$

と 3. 2. 2

$$\zeta_F(s)_M = \prod_{\mathfrak{f} \in M} (1 - N(\mathfrak{f})^{-s})^{-1}$$

$$N(\sqrt{\alpha})^{1-k} \cdot \chi_w(\sqrt{\alpha}) = \begin{cases} N(\beta)^{1-k} \cdot \chi_w(\beta) & \text{if } \alpha = \beta^2 \quad (\beta: \text{ideal of } F) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$m^{1-k} = \prod_{j=1}^g m^{1-k_j} \quad , \quad \sum_{n^2 \ll 4m} : n^2 - 4m \ll 0 \text{ ならば } n \in \mathcal{O}_F \text{ 上の } \mathfrak{f}$$

$$C_{k-k-1}^k(n, m) = \prod_{j=1}^g C_{k_j-k-1}^k(n^{(j)}, m^{(j)}) \quad \left(\begin{array}{l} (1 + \alpha x + \beta x^2)^{-k} \\ = \sum_{e \geq 0} C_e^k(\alpha, \beta) \cdot x^e \end{array} \right)$$

と おく。更に、 k は奇整数 故 ち、Prop. 1 に 依 り、上 の 式 に 現 わ れ る

$L_M(n, m, w; k)$ の 値 は 具 体 的 に 計 算 で き る こ と に 注 意 す る。

Th. 2 $M = f(w)$, $k_j > 2$ ($j = 1, \dots, g$) と 仮 定 す る。 $(\alpha, M) = 1$ な る F の 整 ideal

α に 対 し て、 α の 統 正 全 成 元 $m \in \mathcal{O}_F$ を 取 る。 こ の と き

$$\text{trace } T(\alpha)$$

$$= \prod_{j=1}^g (k_j-1) \cdot D(F)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2 \cdot \zeta_F(2)}{(2\pi)^{2g} \cdot \sqrt{D(F)}} \cdot N(M) \cdot \prod_{\mathfrak{f} \in M} (1 + N(\mathfrak{f})^{-1}) \cdot \chi_w(\sqrt{\alpha})$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{\frac{r}{2}} \sum_{n^2 \ll 4m} m^{1-k} \cdot \zeta_{k-2}^1(n, m) \cdot \frac{h(K)}{w(K)} \cdot N\left(\frac{f \cdot M}{f_M \cdot M(f)}\right) \\
& \quad \times \sum_{\ell | f_M} N(\ell) \cdot \prod_{\mathfrak{f} | \ell} (1 - \chi_D(\mathfrak{f}) \cdot N(\mathfrak{f})^{-1}) \\
& \quad \times \sum_{\ell | M(f)/M} \zeta_{n, m}(w, M(f)/\ell) \cdot N(\ell) \cdot \prod_{\mathfrak{f} | \ell} (1 - \chi_D(\mathfrak{f}) \cdot N(\mathfrak{f})^{-1}) \\
& - \Delta_F(k, m, w)
\end{aligned}$$

となる。

$$\chi_w(\sqrt{D}) = \begin{cases} \chi_w(\mathfrak{f}) & \text{if } D = \mathfrak{f}^2 \ (\mathfrak{f}: \text{ideal of } F) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sum_{n^2 \ll 4m} : n^2 - 4m \ll 0 \text{ なる } n \in \mathcal{O}_F \text{ 上の和}$$

又, $K = F(\sqrt{n^2 - 4m})$ とし, K/F の相対判別式の生成元 $D \in \mathcal{O}_F$ を選んで

$$n^2 - 4m = Df^2 \ (f \in \mathcal{O}_F) \text{ としたとき,}$$

$h(K)$ = K の類数, $w(K)$ = K が含む 1 の冪根の個数

$$f_M = \prod_{\mathfrak{p} | M} \mathfrak{f}^{\text{ord}_{\mathfrak{p}}(f)}$$

$$M(f) = \prod_{\mathfrak{p} | M} \mathfrak{f}^{c(\mathfrak{p})} \quad \text{for } c(\mathfrak{p}) = \max\{2 \cdot \text{ord}_{\mathfrak{p}}(f) + 1, \text{ord}_{\mathfrak{p}}(M \cdot f)\}$$

$$\chi_D = \left(\frac{K/F}{\cdot}\right) : K/F \text{ に対応する } F \text{ の ideal character.}$$

$F \neq \mathbb{Q}$ のときは, $\Delta_F(k, m, w) = 0$. $F = \mathbb{Q}$ のときは,

$$\Delta_F(k, m, w) = \sum_{d | m} \max\{d, m/d\}^{1-k} \cdot \Delta(d + m/d, m, w)$$

$$\Delta(t, m, w) = \begin{cases} \frac{M}{M(e)} \cdot \sum_{d | M(e)/M} \zeta_{-t, m}(w, M(e)/d) \cdot d \cdot \prod_{p | d} (1 - p^{-1}) & \text{if } t^2 - 4m = e^2 \neq 0 \\ \left(\frac{t}{2}\right)^k \cdot \chi_w\left(\frac{t}{2}\right) \cdot 2^{r-1} & \text{if } t^2 - 4m = 0 \end{cases}$$

$$M(e) = \prod_{p | M} p^{c(p)} \quad \text{for } c(p) = \max\{2 \cdot \text{ord}_p(e) + 1, \text{ord}_p(M \cdot e)\}$$

r = M の素因子の個数。

$S_k(M, w)$ の normalized eigen base $\{f_1, \dots, f_r\}$ に對して,

$$C^*(\overline{\alpha}_k, \alpha) = \sum_{i=1}^r L_2(k, f_i, \overline{\alpha}_w) \cdot (f_i, f_i)^{-1} \cdot C^*(f_i, \alpha)$$

である。よつて, Th.2 より $C^*(f_i, \alpha)$ の値を知り, Th.1 より $C^*(\overline{\alpha}_k, \alpha)$ の値を知れば, $L_2(k, f_i, \overline{\alpha}_w) / (f_i, f_i)$ の値を具体的に計算することができる。よつて, 次のを得る;

Cor. normalized eigen form $f \in S_k(M, w)$ ($M = F(w)$) と, $1 \leq k < k_0 - 1$

なる奇整数 k を取る ($k_0 = \min\{k_1, \dots, k_g\}$)。このとき, w が finite order (i.e. $s(\infty_j) = 0$ ($j=1, \dots, g$)) ならば

$$L_2(k, f, \overline{\alpha}_w) / \left(\prod_{j=1}^g \pi^{2k-k_j-1} \right) \cdot (f, f)$$

は, $\mathbb{Q}$ に代数的数である。

$F = \mathbb{Q}$, $s(\infty) = 0$ の場合は, Sturm [7] にあつて扱われている。 Cor. と,

[7] の結果との関係は, 次の通り; λ_M は modulo M の primitive Dirichlet character とみなせるから, $D(s, f, \lambda_M)$ を [7] で定義された関数とするとき, $L_2(s, f, \overline{\alpha}_w) = D(s+k-1, f, \lambda_M)$ となる。 $L_2(s, f, \overline{\alpha}_w)$ は, $s \mapsto 1-s$ で関数等式をもつ様に正規化されている。

8. Th.2 を $F = \mathbb{Q}$, $n=1$ の場合に適用して, よく知られた

$\dim_{\mathbb{C}} S_k(M, w)$ の公式を得る;

Cor. $M = f(w)$, $k > 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} S_k(M, w) &= \frac{k-1}{12} \cdot M \cdot \prod_{p|M} (1+p^{-1}) \\ &+ \left\{ \begin{array}{l} 1 : k \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 : k \equiv 1 \pmod{2} \\ -1 : k \equiv 2 \pmod{4} \end{array} \right\} \times \frac{1}{4} \times \sum_{t \in \mathbb{Z}/(M) : t^2+1 \equiv 0 \pmod{M}} \lambda_M(t) \\ &+ \left\{ \begin{array}{l} 1 : k \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 : k \equiv 1 \pmod{3} \\ -1 : k \equiv 2 \pmod{3} \end{array} \right\} \times \frac{1}{3} \times \sum_{t \in \mathbb{Z}/(M) : t^2+t+1 \equiv 0 \pmod{M}} \lambda_M(t) \\ &- 2^{r-1} \end{aligned}$$

ここで, $r = M$ の素因子の個数。

9. 以下 $\mathfrak{f} = (F:\mathbb{Q}) = 2$ の場合12, Th.2 の例として, $\dim_{\mathbb{C}} S_k(M, w)$ の公式を示す。 F の狭義類数は 1 と仮定してゐるから,

$$F = \mathbb{Q}(\sqrt{p}) \quad p=2 \text{ 又は } p \equiv 1 \pmod{4} \text{ なる素数}$$

となる。ここで

$$\{n \in \mathcal{O}_F \mid n^2 \ll 4\} = \begin{cases} \{0, \pm 1, \pm \sqrt{2}\} & \text{if } p=2 \\ \{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \pm \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\} & \text{if } p=5 \\ \{0, \pm 1\} & \text{if } p>5 \end{cases}$$

だから, これら三つの場合を分けて考える。

Case 1 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ($p > 5$).

n	n^2-4	D	f	$w(F(\sqrt{n^2-4}))$
0	-4	-4	1	4
± 1	-3	-3	1	6

$$C_{k-2}^1(0,1) = \begin{cases} 1 & : k \equiv (0,0), (2,2) \pmod{4} \\ 0 & : k \equiv (1,*), (*,1) \pmod{2} \\ -1 & : k \equiv (0,2), (2,0) \pmod{4} \end{cases}$$

$$C_{k-2}^1(1,1) = \begin{cases} 1 & : k \equiv (0,0), (2,2) \pmod{3} \\ 0 & : k \equiv (1,*), (*,1) \pmod{3} \\ -1 & : k \equiv (0,2), (2,0) \pmod{3} \end{cases}$$

よって, $M = F(w)$, $k_j > 2$ ($j=1,2$) のとき,

$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{C}} S_k(M, w) \\ &= (k_1-1)(k_2-1) \cdot D(F)^2 \cdot \frac{2 \cdot \zeta_F(2)}{(2\pi)^4 \cdot \sqrt{D(F)}} \cdot N(M) \cdot \prod_{\mathfrak{f} \mid M} (1+N(\mathfrak{f})^{-1}) \\ & \quad + C_{k-2}^1(0,1) \times \frac{1}{4} \times h(F(\sqrt{-1})) \times \sum_{t \in \mathcal{O}_{F/M} : t^2+1 \equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t) \\ & \quad + C_{k-2}^1(1,1) \times \frac{1}{3} \times h(F(\sqrt{-3})) \times \sum_{t \in \mathcal{O}_{F/M} : t^2+t+1 \equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t). \end{aligned}$$

ここで, Kubota [1] の公式から,

$$h(F(\sqrt{-1})) = \frac{1}{2} \cdot h(\mathbb{Q}(\sqrt{-p})), \quad h(F(\sqrt{-3})) = \frac{1}{2} \cdot h(\mathbb{Q}(\sqrt{-3p}))$$

である。最初の 10 個の $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ に対しては,

p	$h(F(\sqrt{-1}))$	$h(F(\sqrt{-3}))$	$D(F)^2 \cdot \frac{2 \cdot \zeta_F(2)}{(2\pi)^4 \cdot \sqrt{D(F)}}$
13	1	2	$1/2$
17	2	1	$1/6$
29	3	3	$1/4$
37	1	4	$5/12$
41	4	1	$2/3$
53	3	5	$7/12$

61	3	4	$11/12$
73	2	2	$11/6$
89	6	1	$13/6$
97	2	2	$17/6$

$\gamma \neq 3$.

Case 2 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. $p = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $p' = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ $\gamma \in \mathbb{Z}$,

n	n^2-4	D	f	$h(F(\sqrt{n^2-4}))$	$w(F(\sqrt{n^2-4}))$
0	-4	-4	1	1	4
± 1	-3	-3	1	1	6
$\pm p$	$-3+p$	$-3+p$	1	1	10
$\pm p'$	$-2-p$	$-2-p$	1	1	10

$$D(F)^2 \cdot \frac{2 \cdot S_F(2)}{(2\pi)^4 \cdot \sqrt{D(F)}} = \frac{1}{60}$$

$$C'_{k-2}(p, 1) = \begin{cases} 1 : k \equiv (0, 0) (2, 2) (4, 3) (3, 4) \pmod{5} \\ p : k \equiv (3, 0) (4, 2) \pmod{5} \\ p' : k \equiv (2, 4) (0, 3) \pmod{5} \\ 0 : k \equiv (1, *) (*, 1) \pmod{5} \\ -p' : k \equiv (2, 3) (0, 4) \pmod{5} \\ -p : k \equiv (3, 2) (4, 0) \pmod{5} \\ -1 : k \equiv (0, 2) (2, 0) (3, 3) (4, 4) \pmod{5} \end{cases}$$

$$C'_{k-2}(p', 1) = C'_{k-2}(p, 1) \text{ の conjugate.}$$

$f > 2$, $M = f(w)$, $k_{\bar{j}} > 2$ ($\bar{j} = 1, 2$) のとき

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} S_k(M, w) &= \frac{1}{60} \cdot (k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdot N(M) \cdot \prod_{j|M} (1 + N(j)^{-1}) \\
&+ C_{k-2}^1(0, 1) \times \frac{1}{4} \times \sum_{t \in \mathcal{O}_{F/M} : t^2 + 1 \equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t) \\
&+ C_{k-2}^1(1, 1) \times \frac{1}{3} \times \sum_{t \in \mathcal{O}_{F/M} : t^2 + t + 1 \equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t) \\
&+ C_{k-2}^1(\rho, 1) \times \frac{1}{5} \times \sum_{t \in \mathcal{O}_{F/M} : t^2 + \rho t + 1 \equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t) \\
&+ C_{k-2}^1(\rho', 1) \times \frac{1}{5} \times \sum_{t \in \mathcal{O}_{F/M} : t^2 + \rho' t + 1 \equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t)
\end{aligned}$$

$\chi \neq 3$ ($C_{k-2}^1(0, 1)$, $C_{k-2}^1(1, 1)$ は Case 1 の $\chi \nmid \ell$)。

Case 3 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 。

n	$n^2 - 4$	D	f	$h(F(\sqrt{n^2 - 4}))$	$w(F(\sqrt{n^2 - 4}))$
0	-4	-2	$\sqrt{2}$	1	8
± 1	-3	-3	1	1	6
$\pm \sqrt{2}$	-2	-2	1	1	8

$$D(F)^2 \cdot \frac{2 \cdot \zeta_F(2)}{(2\pi)^4 \cdot \sqrt{D(F)}} = \frac{1}{24}$$

$$C_{k-2}^1(\sqrt{2}, 1) = \begin{cases} 1 : k \equiv (0, 0) (2, 2) (4, 4) (6, 6) (0, 6) (6, 0) (2, 4) (4, 2) \pmod{8} \\
2 : k \equiv (3, 7) (7, 3) \pmod{8} \\
\sqrt{2} : k \equiv (0, 7) (2, 3) (3, 0) (3, 6) (4, 3) (6, 7) (7, 2) (7, 4) \pmod{8} \\
0 : k \equiv (1, *) (*, 1) (5, *) (*, 5) \pmod{8} \\
-\sqrt{2} : k \equiv (0, 3) (2, 7) (3, 2) (3, 4) (4, 7) (6, 3) (7, 0) (7, 6) \pmod{8} \\
-2 : k \equiv (3, 3) (7, 7) \pmod{8} \\
-1 : k \equiv (0, 2) (2, 0) (0, 4) (4, 0) (2, 6) (6, 2) (4, 6) (6, 4) \pmod{8} \end{cases}$$

$f \geq 2$, $M = f(w)$, $k_j \geq 2$ ($j = 1, 2$) のとき,

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k(M, \omega)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{24} \cdot (k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdot N(M) \cdot \prod_{\delta | M} (1 + N(\delta)^{-1}) \\
 &+ C'_{k-2}(0, 1) \times \frac{1}{8} \times \begin{cases} 3 \cdot \sum_{t \in \mathcal{O}_{F/M} : t^2 + 1 \equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t) & : \text{ord}_{\sqrt{2}}(M) = 0 \\ \sum_{t \in \mathcal{O}_{F/(\sqrt{2}M)} : t^2 + 1 \equiv 0 \pmod{\sqrt{2} \cdot M}} \bar{\lambda}_M(t) & : \text{ord}_{\sqrt{2}}(M) = 2 \\ 2 \cdot \sum_{t \in \mathcal{O}_{F/M} : t^2 + 1 \equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t) & : \text{ord}_{\sqrt{2}}(M) = 3 \\ 0 & : \text{ord}_{\sqrt{2}}(M) > 3 \end{cases} \\
 &+ C'_{k-2}(1, 1) \times \frac{1}{3} \times \sum_{t \in \mathcal{O}_{F/M} : t^2 + t + 1 \equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t) \\
 &+ C'_{k-2}(\sqrt{2}, 1) \times \frac{1}{4} \times \sum_{t \in \mathcal{O}_{F/M} : t^2 + \sqrt{2}t + 1 \equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t)
 \end{aligned}$$

と異なる ($C'_{k-2}(0, 1)$, $C'_{k-2}(1, 1)$ は Case 1 と同じ)。 $M = f(\omega)$ は, ω の conductor

であるから, $\text{ord}_{\sqrt{2}}(M) = 0$ 又は, $\text{ord}_{\sqrt{2}}(M) \geq 2$ と異なることを注意する。

References.

- [1] Kubota, T.: Uber den bizyclischen biquadratischen Zahlkorper.
Nagoya Math.J. 10 (1956) 65-85.
- [2] Miyake, T.: On automorphic forms on GL_2 and Hecke operators.
Ann.of Math. 94 (1971) 174-189.
- [3] Shimizu, H.: On discontinuous groups operating on the product
of the upper half planes. Ann.of Math. 77 (1963) 33-71.
- [4] Shintani, T.: On evaluation of zeta functions of totally real
algebraic number fields at non-positive integers.
J.Faculty of Science Univ.of Tokyo 23 (1976) 393-417.
- [5] Siegel, C.L.: Bernoullische Polinome und quadratische Zahlkorper.
Nach.Akad.Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl. (1968) 7-38.
- [6] Siegel, C.L.: Berechnung von Zetafunctionen an ganzzahligen
Stellen. ibid. (1969) 87-102.
- [7] Sturm, J.: Special values of zeta functions, and Eisenstein
series of half integral weight. Amer.J.of Math. 102 No.2
(1980) 219-240.
- [8] Zagier, D: Modular forms whose Fourier coefficients involve
zeta-functions of quadratic fields.
Lecture Note in Math. 627 (1976) 105-169. Springer.