

Symbolic Powers の定義する Topology について

名工大 渡辺敬一 (Kei-ichi Watanabe)

Noether 環 A と A の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, $\mathfrak{p}$ の symbolic n -th power を $\mathfrak{p}^{(n)}$ と書く. $\mathfrak{p}^{(n)}$ は $\mathfrak{p}^n$ の $\mathfrak{p}$ -primary component である. $\{\mathfrak{p}^n\}_{n \geq 1}$ と $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ は A 上に 2 つの topology を定めるが,

問題. いっ $\{\mathfrak{p}^n\}$ と $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}$ は 同じ topology を定めるか?

筆者がこの問題も考え始めたのは、森重文氏から、この問題について質問されたのがきっかけである。最初は、 A が excellent ring の場合などには両者が一致するのではないか? という予想の下で出発したのだが、調べてみると、むしろ "unibranch" の条件が本質的である事がわかって来た。なお、この問題に関しては、各所で森氏から advice を受けているので、同氏との共同研究というべきものである事をお断りしておきたい。

以下、上記の問題を考えて行く。 $A, \mathfrak{p}$ は上記の意味で使う事にする。

(1) 一般に, $S = 1 + \mathfrak{f}$, $\mathfrak{o} = \text{Ker}(A \rightarrow A_{\mathfrak{f}})$, $\mathfrak{a} = \text{Ker}(A \rightarrow S^1 A)$ とおくと, $\mathfrak{o} = \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{f}^{(n)}$, $\mathfrak{a} = \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{f}^n$ である. ([LR], (3.11), (7.7)). $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{a}$ のときは問題にならないから, 以下に於ては次を仮定しよう.

仮定. natural homomorphism $A \rightarrow A_{\mathfrak{f}}$ は injective である.

(2) $\mathfrak{f}^n$ の素分解に於て, $n \gg 0$ のとき $\text{Ass}(A/\mathfrak{f}^n)$ は一定である事が知られている (Brodmann [B]) ゆえに,

$$\mathfrak{f}^n = \mathfrak{f}^{(m)} \cap \sigma_{\mathfrak{f}_1, n} \cap \dots \cap \sigma_{\mathfrak{f}_s, n} \quad (n \gg 0, \sqrt{\sigma_{\mathfrak{f}_i, n}} = \mathfrak{f}_i)$$

として良い. 当然,

$\{\mathfrak{f}^{(m)}\}$ と $\{\mathfrak{f}^n\}$ が同じ topology を定める $\Leftrightarrow \forall n, \exists m = m(n), \mathfrak{f}^{(m)} \subset \sigma_{\mathfrak{f}_i, n} \quad (i=1, \dots, s)$ である.

$\mathfrak{f}^{(m)} \subset \sigma_{\mathfrak{f}_i, n} \Leftrightarrow \mathfrak{f}^{(m)} \cdot A_{\mathfrak{f}_i} \subset \sigma_{\mathfrak{f}_i, n} \cdot A_{\mathfrak{f}_i}$ であるから, $B = A_{\mathfrak{f}_i}$ とおいて, $\forall n > 0, \exists m(n), \mathfrak{f}^{(m)} \cdot B \subseteq \mathfrak{m}^n B$ ($\mathfrak{m}$ は B の極大 ideal) が言えれば良い. ここで次の "Chevalley の定理" が本質的である.

定理 (Chevalley, [LR], (30.1)) $(A, \mathfrak{m})$ complete local ring, $\{\mathfrak{o}_n\}$: ideal の descending chain として, $\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{o}_n = (0)$ のとき, $\forall n > 0, \exists m = m(n)$ s.t. $\mathfrak{o}_m \subset \mathfrak{m}^n$.

従って, $\mathfrak{p} \in \text{local ring } (A, \mathfrak{m})$ の素ideal とするとき,
 $\bigcap_{n \geq 0} (\mathfrak{p}^{(n)} \hat{A}) = (0)$ ならば, $\forall n \geq 0, \exists m = m(n), \mathfrak{p}^{(m)} \subset \mathfrak{p}^n$
 となり, 逆に $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}$ と $\{\mathfrak{p}^n\}$ が同一 topology を定義すれば,
 $\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n \hat{A} = (0)$ より当然, $\bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{(n)} \hat{A} = (0)$. まとめると,

(3) $\{\mathfrak{p}^n\}$ と $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}$ が同一 topology を定義する

$$\Leftrightarrow \forall \sigma_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}^*(\mathfrak{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ass}(A/\mathfrak{p}^n) \ (n \gg 0), \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} (A_{\sigma_{\mathfrak{p}}})^{\wedge} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \forall \sigma_{\mathfrak{p}} \in \text{Spec}(A), \sigma_{\mathfrak{p}} \supset \mathfrak{p}, \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} (A_{\sigma_{\mathfrak{p}}})^{\wedge} = 0.$$

系 1. ([Z-S], VIII, §5, Cor 5) $\Leftrightarrow \forall \sigma_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}^*(\mathfrak{p}), (A_{\sigma_{\mathfrak{p}}})^*$ が integral domain ならば, $\{\mathfrak{p}^n\}$ と $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}$ は同一 topology を定める.

系 2. A が excellent normal domain のとき, 任意の素イデアル $\mathfrak{p} \subset A$ について, $\{\mathfrak{p}^n\}$ と $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}$ は同一 topology を定める.

($\because$) A が excellent normal domain のとき, $\forall \sigma_{\mathfrak{p}} \in \text{Spec}(A)$, $(A_{\sigma_{\mathfrak{p}}})^{\wedge}$ も normal domain である. ([M], (33.1)).

従って 次の問題は, $\sigma_{\mathfrak{p}} \supset \mathfrak{p}$ に対し, $\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} (A_{\sigma_{\mathfrak{p}}})^{\wedge} = (0)$?

という事だが, もう少し一般化して, 次が云える.

(4) $A \rightarrow B$: flat ring hom. of noetherian rings, $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$

に対して次の条件は同値

(i) $\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} B = (0)$

(ii) $S = B - \bigcup_{\sigma_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_B(B/\mathfrak{p}B)} \sigma_{\mathfrak{p}}$ とおくとき, natural homomorphism

$B \rightarrow S^{-1}B$ は injection.

(iii) $\forall \sigma_f \in \text{Ass}_B(B)$, $\exists \varphi \in \text{Ass}_B(B/\varphi B)$, $\varphi \supset \sigma_f$.

(証明) (ii) $\Rightarrow$ (i) $x \in \bigcap_{n \geq 0} \varphi^{(n)} B \Rightarrow x/1 \in \bigcap_{n \geq 0} \varphi^{(n)} S^{-1}B$.

$A - \varphi \subset S$ だから $\varphi^{(n)} S^{-1}B = \varphi^n S^{-1}B$, $\varphi \subset \text{Rad}(S^{-1}B)$ より,

$\bigcap_{n \geq 0} \varphi^{(n)} S^{-1}B = 0$. $B \rightarrow S^{-1}B$ は injection より $x = 0$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (ii) $B \rightarrow S^{-1}B$ は injection $\Leftrightarrow \forall \sigma_f \in \text{Ass}_B(B)$, $\sigma_f \cap S = \emptyset$.

よりあきらか.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\exists x \neq 0 \in B$, $sx = 0$ ($\exists s \in S$) としよう. $A \rightarrow B$

は flat だから, $\text{Ass}_B(B/\varphi^{(n)}B) = \text{Ass}_B(B/\varphi B)$. $sx \in \varphi^{(n)}B \Leftrightarrow x \in \varphi^{(n)}B$

より, $x \in \bigcap_{n \geq 0} \varphi^{(n)}B$

(5) [反例] $\{\varphi^n\}$ と $\{\varphi^{(n)}\}$ は同じ topology を定義しない例を

作るためには, unibranch でない環を考える必要がある.

例. $A = k[x, y, z]/(y^2 - x^2(x+1))$ (k は体, $\text{char}(k) \neq 2$)

とおくと $\text{Spec}(A)$ は nodal curve C と line A'_k の直積で,

A は domain だが, $m = (x, y, z)$ とおいて, $(A_m)^\wedge$ は C の $(0,0)$

における 2 つの branches に対応する 2 つの minimal primes を

つ. また, A の integral closure $A' \cong k[t, z]$ で, $A \hookrightarrow A'$ は

$x = t^2 - 1$, $y = t(t^2 - 1)$ で def. される. このとき, $\varphi' = \varphi(x, z) \cdot A'$

を A' の素イデアル, $\varphi = \varphi' \cap A$ とおき $\varphi(1, 0) = 0$ 又は $\varphi(-1, 0)$

$= 0$ のどちらかが成立するとする ($\Leftrightarrow \varphi \subset m$). こう置くと,

$\{g^n\}$ と $\{g^{(n)}\}$ が同じ topology を定める $\Leftrightarrow \varphi(1,0)=\varphi(-1,0)=0$.

証明は σ , と一般化した形で与えよう.

(6) 定理. A : excellent Noeth. domain, A' は A の normalization,
 $\mathfrak{p}$ は A の prime ideal とするとき, 次は同値.

(a) $\{g^n\}$ と $\{g^{(n)}\}$ は同じ topology を定義する.

(b) A の prime $\sigma \supset \mathfrak{p}$ と A' の prime $\sigma'_\mathfrak{p}$ で $\sigma'_\mathfrak{p} \cap A = \sigma$ であるものに對し, A' の prime $\mathfrak{p}' \subset \sigma'_\mathfrak{p}$ で, $\mathfrak{p}' \cap A$ なるものが存在する.

(証明の前に excellent local domain の性質をいくつかあげよう.) A' は A の normalization.
 $1^\circ \sim 3^\circ$ に對して $(A, \mathfrak{m})$ は excellent local domain とする.

1° . $\hat{A}$ は reduced で, $\forall \sigma_\mathfrak{p} \in \text{Min}(\hat{A}), \dim \hat{A}/\sigma_\mathfrak{p} = \dim \hat{A}$.

2° . $\forall \mathfrak{m} \in \text{Max}(A'), \text{ht}(\mathfrak{m}) = \dim A$.

3° . $\text{Min}(\hat{A})$ と $\text{Max}(A')$ の間には自然な 1:1 対応がある.

$(A')^\wedge \cong A' \otimes_A \hat{A} \cong \prod_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(A')} (A'_\mathfrak{m})^\wedge$, 各 $(A'_\mathfrak{m})^\wedge$ は local domain であるから, $\text{Spec}((A'_\mathfrak{m})^\wedge)$ の generic point の行先を $\sigma_\mathfrak{p} \in \text{Min}(\hat{A})$ とする事で, $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A')$ と $\sigma_\mathfrak{p} \in \text{Min}(\hat{A})$ の対応が得られる. (1° は [M], (14C) Th23 (2nd ed.), 2° は 1° よりすぐ出る,)

((6) の証明). (a) $\Rightarrow$ (b) prime $\sigma \supset \mathfrak{p}$ をとる. A_σ を取めて A とおき, $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A')$ とする. $\mathfrak{m}$ に対応する $\sigma_\mathfrak{p} \in \text{Min}(\hat{A})$ に對して, (4) より, $\exists \mathfrak{p}' \in \text{Ass}_A(\hat{A}/\mathfrak{p}\hat{A}), \mathfrak{p}' \supset \sigma_\mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}' \in \text{Spec}((A'_\mathfrak{m})^\wedge)$

と $\mathfrak{p}' \cap \hat{A} = \mathfrak{p}$ により, $\mathfrak{p}' \cap A' = \mathfrak{g}'$ とおくと, $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{m}$,
 $\mathfrak{g}' \cap A = \mathfrak{g}$ になるから, (a) が言える。

(b) $\Rightarrow$ (a) $\forall \mathfrak{p}_f \supset \mathfrak{g}, \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{g}^{(n)} (A_{\mathfrak{p}_f})^\wedge = (0)$ が言える。
 $A_{\mathfrak{p}_f} \in A$ であるから, $(A, \mathfrak{m})$ を local とし, $\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{g}^{(n)} \hat{A} = (0)$ を示す。(4)(iii) の条件を $B = \hat{A}$ に対して示す。 $\mathfrak{p}_f \in \text{Min}(\hat{A})$ と対応する $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A')$ をとる。(a) より, $\exists \mathfrak{g}' \in \text{Spec}(A')$, $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{m}$ かつ $\mathfrak{g}' \cap A = \mathfrak{g}$ 。2° より $\text{ht } \mathfrak{g}' = \text{ht } \mathfrak{g}$ である。
 $\mathfrak{p}' \in \text{Spec}((A')^\wedge)$ と $\mathfrak{p}' \cap A' = \mathfrak{g}'$, $\text{ht } \mathfrak{p}' = \text{ht } \mathfrak{g}'$ により, $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}'$ の $\hat{A}$ への image とすると, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_f$, $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{g}$ かつ $\text{ht } \mathfrak{p} = \text{ht } \mathfrak{g}$ になるから, $\mathfrak{p} \in \text{Ass } \hat{A}(\hat{A}/\mathfrak{g}\hat{A})$ 。(証明終)。

(7) [付録] symbolic power のからんだ別の問題で,

問. $\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}^{(n)}$ はいつ Noether 環になるか?

というのがある。もし $\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}^{(n)}$ が Noether 環なら, ある $N > 0$ に対し, $\mathfrak{g}^{(mN)} = (\mathfrak{g}^{(N)})^m$ ($\forall m \geq 1$) が成立するから, 勿論, $\{\mathfrak{g}^n\}$ と $\{\mathfrak{g}^{(n)}\}$ は同じ topology を定める。逆の成立しない例としては,

定理 ([R] 参照). $(A, \mathfrak{m})$: 2 次元 local domain, normal,
 $\mathfrak{g} \subset A$: ht 1 prime のとき, $\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}^{(n)}$ が Noetherian $\Leftrightarrow \exists N > 0$, $\mathfrak{g}^{(N)}$ が単項生成。

とあげれば十分である。 A が excellent のとき, $\{\mathfrak{g}^n\}$ と

$\{g^{(n)}\}$ は常に同じ topology を定めるのに対し, $g^{(n)}$ が単項生成になる g は, 一般の A に対しては特殊なものだから.

[あとがき] (5) の反例は松村英之先生より別の問題に対して与えられた反例がこの場合も反例となる事がわかったものです. また, (6) に関して (3) 系 1 の存在については, 後藤四郎氏より助言を頂きました.

References.

- [B] M. Brodmann: Asymptotic stability of $\text{Ass}(M/I^n M)$,
Proc. AMS 74 (1979), 16~18
- [LR] M. Nagata: Local Rings.
- [M] H. Matsumura: Commutative Algebra.
- [R] D. Rees: On a problem of Zariski, III. J. Math.
2 (1958), 145~149.
- [Z-S]. O. Zariski and P. Samuel: Commutative Algebra,
vol. II.