

$\mathbb{R}^N$ におけるある楕円型方程式に対する符号変化する解の多重存在性を含む
解の多重性の結果について

塩路直樹 (NAOKI SHIOJI)

横浜国立大学大学院環境情報研究院 (YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. 序

このノートでは、次の問題の解の多重存在についての考察を行なう。

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + \mu u = Q(x)|u|^{p-1}u & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

ここで、 $\mu > 0$, $N \geq 3$, $1 < p < (N+2)/(N-2)$, $Q \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ とする。特に、符号変化する解の多重存在について興味がある。近年、様々な方程式について、解の多重存在についての結果が報告されている。([1, 2, 4-11, 14, 16, 18]などを参照。) Struwe [7, 15], Clapp-Weth [7] らによって指摘されているように、符号変化する解の存在について議論しているものの証明の中にギャップを含んだものがいくつかある。そのギャップとは、写像 $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^\pm|^2 dx$ が1階の Sobolev 空間上でフレッシュエ微分可能であることを無条件に仮定してしまっているものである。ここで扱っている問題 (1.1) も、[3] において議論されているが、このギャップを含んでいる。ここでは、[3] のギャップを修正するとともに、[3] では得られていないタイプの符号変化する解の存在を示す。もう少し詳しく述べるために $\Lambda_* = \{u = u^+ + u^- \in H^1(\mathbb{R}^N) : u^+ \neq 0, u^- \neq 0, \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^\pm|^2 + \mu|u^\pm|^2) dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u^\pm|^{p+1} dx\}$ と定義する。[3] においては、 Λ_* における極小解に対応する符号変化する解の存在しか議論されていないが、ここでは mountain pass に対応する符号変化する解の存在についても結果を得ている。我々の結果は次のものである。

定理 1. $Q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ は、すべての $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $Q(x) > 1$, $|x| \rightarrow \infty$ のとき $Q(x) \rightarrow 1$ を満たす連続関数で、異なる2点 $a^1, a^2 \in \mathbb{R}^N$ において最大値 $M > 1$ を取り、すべての $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{a^1, a^2\}$ に対して $Q(x) < M$ とする。このとき、ある $\mu_0 > 0$ が存在し、 $\mu \geq \mu_0$ ならば、問題 (1.1) には、少なくとも3つの正値解と少なくとも4つの符号変化する解のペアが存在する。

註. もし Q が $m (\geq 2)$ 個の異なる点で最大値を取るならば、少なくとも $m+1$ 個の正値解と少なくとも $m + mC_2 + 1$ 個の符号変化する解のペアが存在する。

さらに仮定をおけば、もう1組符号変化する解のペアの存在が示せる。

定理 2. 先の定理の仮定を仮定する。もし、 $M_1 > 2^{(p-1)/2}M/(M^{2/(p-1)}+1)^{(p-1)/2}$, $R > |a^1 - a^2|/2$ を満たす M_1, R が存在し、 $|x - (a^1 + a^2)/2| \leq R$ を満たす $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $Q(x) \geq M_1$ が成り立つならば、十分大きな μ に対して、もう1組問題 (1.1) の符号変化する解のペアが存在する。

本研究は、平野載倫氏との共同研究である。

2. 証明の概略

この節では、符号変化する解の多重存在についての証明の概略を与える。 $(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + uv) dx$ および $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ により、 $H^1(\mathbb{R}^N)$ における内積とノルムを定める。 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して、 $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{u, 0\}$ と置く。すなわち、 $u = u^+ + u^-$ と表すことになる。

$\lambda = 1/\sqrt{\mu}$ および $v(x) = \lambda^{2/(p-1)} u(\lambda x)$ と置くことにより、問題 (1.1) は、

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\Delta v + v = Q(\lambda x)|v|^{p-1}v & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

と変形できる。以下、問題 (2.1) を取り扱う。この問題に対応する汎関数 $I_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} Q(\lambda x)|u|^{p+1} dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

と定める。

$\eta > 0$ および $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して、 $C_\eta[x] = \prod_{i=1}^N [x_i - \eta, x_i + \eta]$ と定める。 $K, l > 0$ を、 $C_l[a^1] \cap C_l[a^2] = \emptyset$ かつ $\bigcup_{j=1}^2 C_l[a^j] \subset \prod_{i=1}^N (-K, K)$ を満たすように取る。仮定から、 $\sup\{Q(x) : x \in \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{j=1}^2 C_l[a^j]\} < M$ が成り立つ。各 $\lambda > 0$ に対して、 $\phi_\lambda \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ および $g_\lambda \in C(H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \mathbb{R}^N)$ を

$$\phi_\lambda(t) = \begin{cases} 2K/\lambda & t > 2K/\lambda \text{ のとき,} \\ t & -2K/\lambda \leq t \leq 2K/\lambda \text{ のとき,} \\ -2K/\lambda & t < -2K/\lambda \text{ のとき,} \end{cases}$$

$$g_\lambda(u) = (g_{\lambda,1}(u), \dots, g_{\lambda,N}(u)), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$$

と定める。ただし、 $g_{\lambda,i}(u)$ は、

$$g_{\lambda,i}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\lambda(x_i)|u|^{p+1} dx / \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx, \quad i = 1, \dots, N$$

と定める。各 $\lambda > 0$ および $j, k \in \{1, 2\}$ に対して、

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda) &= \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : (\nabla I_\lambda(u), u) = 0\}; \\ \Lambda(\lambda; j) &= \{u \in \Lambda(\lambda) : g_\lambda(u) \in C_{l/\lambda}[a^j/\lambda]\}; \\ \Lambda_*(\lambda) &= \{u \in \Lambda(\lambda) : u^+ \in \Lambda(\lambda), u^- \in \Lambda(\lambda)\}; \\ \Lambda_*(\lambda; j, k) &= \{u \in \Lambda_*(\lambda) : u^+ \in \Lambda(\lambda; j), u^- \in \Lambda(\lambda; k)\}, \end{aligned}$$

と定める。

$\tau : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow (0, \infty]$ を

$$\tau(u) = \begin{cases} tu \in \Lambda(\lambda) \text{ を満たす唯一の正数 } t & u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ のとき,} \\ \infty & u = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める。 $\tau : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow (0, \infty]$ は連続であり、各 $u \in \Lambda(\lambda)$ に対して、 $u \in \Lambda_*(\lambda)$ であることと $\tau(u^+) = \tau(u^-)$ が同値になることがわかる。

$\eta > 0$ とする。Kwong [13] は、

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \eta |u|^{p-1} u, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

が、唯一の球対称正値解を持つことを示した。その解を $\bar{u}_\eta$ と表すことにする。また、

$$\bar{c}_\eta = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\eta}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx : u \in H^1(\mathbb{R}^N), \|u\|^2 = \eta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right\}.$$

と、 $\bar{c}_\eta$ を定める。 $\bar{c}_M = \bar{c}_1/M^{2/(p-1)}$ および各 $\lambda > 0$ と $j, k = 1, 2$ に対して $2\bar{c}_M < \inf\{I_\lambda(u) : u \in \Lambda_*(\lambda; j, k)\}$ が成り立つ。

補助定理 1. ある $\varepsilon > 0$ および $\lambda_\varepsilon > 0$ が存在し、すべての $\lambda \in (0, \lambda_\varepsilon)$ に対して次が成り立つ。

$$(2.2) \quad \inf\{I_\lambda(u) : u \in \Lambda_*(\lambda; j, k)\} < 2\bar{c}_M + \varepsilon, \quad j, k \in \{1, 2\},$$

$$(2.3) \quad \inf\{I_\lambda(u) : u \in \Lambda_*(\lambda) \setminus \bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{k=1}^2 \Lambda_*(\lambda; j, k)\} > 2\bar{c}_M + \varepsilon.$$

これより後、 $\varepsilon > 0$ および $\lambda > 0$ を、 $\bar{c}_M + \varepsilon < \bar{c}_1$, (2.2), (2.3) が成り立つように固定する。また、 $I_\lambda, \Lambda_*(\lambda; j, k)$ などの代わりに、 $I, \Lambda_*(j, k)$ のように λ を省略して書く。

次の問題および対応する汎関数を次のように考える。

$$(2.4) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-1} u & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N); \end{cases}$$

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \quad \text{for } u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

$|x| \rightarrow \infty$ のとき $Q(x) \rightarrow 1$ が成り立つから、問題 (2.4) は、問題 (2.1) の極限問題である。

次は良く知られている。([17, Theorem 8.4] を参照のこと。)

補助定理 2. $I(u_n) \rightarrow c$ および $\nabla I(u_n) \rightarrow 0$ を満たす $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して、(2.5) を満たす $\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{n_m}\}$, 問題 (2.1) の解 $v_0, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 問題 (2.4) の非自明解 $v_1, \dots, v_k, \mathbb{R}^N$ の点列 $\{y_m^j\} (j = 1, \dots, k)$ が存在する。

$$(2.5) \quad \left\| u_{n_m} - v_0 - \sum_{j=1}^k v_j(\cdot - y_m^j) \right\| \rightarrow 0, \quad c = I v_0 + \sum_{j=1}^k I_\infty v_j,$$

$$|y_m^j| \rightarrow \infty, \quad |y_m^j - y_m^{j'}| \rightarrow \infty \text{ for } j \neq j'.$$

この補助定理により、 $\bar{c}_1$ のレベルで、 I は Palais-Smale 条件を満たさないことがわかる。しかし、次の Palais-Smale タイプの条件は、成り立つ。

補助定理 3. $c \in (-\infty, \bar{c}_1 + \bar{c}_M]$ とする。 $I(u_n) \rightarrow c$ および $\nabla I(u_n) \rightarrow 0$ を満たす列 $\{u_n\} \subset \Lambda_*$ は、強収束する部分列をもつ。

証明. $\{u_n\} \subset \Lambda_*$ は、 $I(u_n) \rightarrow c$ および $\nabla I(u_n) \rightarrow 0$ を満たすとする。補助定理 2 の結論が成り立っているとしてよい。 $v_0 \neq 0$ のとき $I(v_0) > \bar{c}_M$ であり、 v_j が符号変化するかもしれないが $I_\infty(v_j) > 2\bar{c}_1$ または $I_\infty(v_j) = \bar{c}_1$ である。よって、次のいずれかが成り立つ。

- (i) $k = 1$, v_1 は正または負, $v_0 = 0$, $c = \bar{c}_1$;
(ii) $k = 0$.

$\{u_n\} \subset \Lambda_*$ により, $\inf_n \|u_n^+\| \geq C$ かつ $\inf_n \|u_n^-\| \geq C$ を満たす $C > 0$ が存在するので, (i) は起こり得ない。したがって, (ii) が成り立つから, $\{u_{n_m}\}$ は v_0 に強収束する。□

各 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\mathcal{K}_c = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \nabla I(u) = 0, I(u) = c\}$$

と置く。次が成り立つ。

補助定理 4. 各 $c \in (-\infty, \bar{c}_1 + \bar{c}_M]$ に対して, $\mathcal{K}_c \cap \Lambda_*$ はコンパクトまたは空である。

$\alpha : [0, 1] \times \Lambda_* \rightarrow \Lambda$ を

$$\alpha(t, u) = \tau((1-t)u^+ + tu^-)((1-t)u^+ + tu^-), \quad (t, u) \in [0, 1] \times \Lambda_*$$

と定める。 τ, α, Λ_* の定義より, 次を得る。

補助定理 5. 各 $(t, u) \in [0, 1] \times \Lambda_*$ に対して,

$$\begin{aligned} \tau((1-t)u^+ + tu^-) &= \left(\frac{(1-t)^2 \|u^+\|^2 + t^2 \|u^-\|^2}{(1-t)^{p+1} \|u^+\|^2 + t^{p+1} \|u^-\|^2} \right)^{\frac{1}{p-1}}; \\ I(\alpha(t, u)) &= \|u^+\|^2 f \left(\frac{(1-t)^{p+1} \|u^+\|^2 + t^2 (1-t)^{p-1} \|u^-\|^2}{(1-t)^{p+1} \|u^+\|^2 + t^{p+1} \|u^-\|^2} \right) \\ &\quad + \|u^-\|^2 f \left(\frac{t^{p-1} (1-t)^2 \|u^+\|^2 + t^{p+1} \|u^-\|^2}{(1-t)^{p+1} \|u^+\|^2 + t^{p+1} \|u^-\|^2} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし, $f(s) = s^2/2 - s^{p+1}/(p+1)$ である。

簡単な計算により, 次が成り立つ。

補助定理 6. 各 $c \in \mathbb{R}$ および各 $\sigma > 0$ に対し, $|t - 1/2| \geq \sigma$ および $I(u) \leq c + \eta$ を満たす $(t, u) \in [0, 1] \times \Lambda_*$ に対して $I(\alpha(t, u)) \leq I(u) - \eta$ が成り立つ $\eta > 0$ が存在する。

$A \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ および $\delta > 0$ にたいして, $B_\delta(A) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \text{dist}(u, A) \leq \delta\}$ と置く。

さて, [4, 11, 14] の手法を発展させることにより, Λ_* における極小タイプの問題 (2.1) の符号変化する解の存在についての結果を示す。

命題 1. 各 $j, k \in \{1, 2\}$ に対し, $u \in \Lambda_*(j, k)$ および $I(u) = \min\{I(v) : v \in \Lambda_*(j, k)\}$ を満たす問題 (2.1) の符号変化する解のペア $\pm u$ が存在する。

証明. $j, k \in \{1, 2\}$ を固定し, $c = \inf\{I(u) : u \in \Lambda_*(j, k)\}$ と置く。 $\mathcal{K}_c \cap \Lambda_*(j, k) \neq \emptyset$ を示せば良い。これを否定する。 $0 < c < 2\bar{c}_M + \varepsilon (< \bar{c}_1 + \bar{c}_M)$ が成り立っていることに注意する。また, $c = \bar{c}_1$ かもしれないので, I は $(PS)_c$ を満たさないかもしれないことを注意する。 $c < \bar{c}_1 + \bar{c}_M$ だから, 補助定理 4 より, $\mathcal{K}_c \cap \Lambda_*$ はコンパクトまたは空であることがわかる。よって, $\text{dist}(N, \Lambda_*(j, k)) > 0$ を満たす Λ_* における $\mathcal{K}_c \cap \Lambda_*$ の近傍 N が取れる。各 $\eta > 0$ に対し,

$$U_\eta = \{\alpha(t, u) : (t, u) \in [0, 1] \times (\Lambda_* \setminus N), I(u) \leq c + \eta, I(\alpha(t, u)) \geq c - \eta\}$$

と置く。このとき, $\eta > 0$, $\bar{\eta} \in (0, \eta)$ および連続写像 $\Phi : [0, 1] \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ を, $c + \bar{\eta} < 2\bar{c}_M + \varepsilon$ かつ次を満たすように選ぶことができる。

- (i) $I(u) \leq c+2\eta$ を満たす $(t, u) \in ([0, 1/3] \cup [2/3, 1]) \times \Lambda_*$ に対して、 $I(\alpha(t, u)) \leq c - 2\eta$
- (ii) $(\theta, u) \in [0, 1] \times \Lambda$ に対して、 $I(\Phi(\theta, u)) \leq I(u)$
- (iii) $I(u) \notin [c - 2\eta, c + 2\eta]$ を満たす $(\theta, u) \in [0, 1] \times \Lambda$ に対して、 $\Phi(\theta, u) = u$
- (iv) $\Phi(1, U_{\tilde{\eta}}) \subset \{u \in \Lambda : I(u) \leq c - \tilde{\eta}\}$.

さて、 $I(u_1) \leq c + \tilde{\eta}$ を満たす $u_1 \in \Lambda_*(j, k)$ を選ぶ。 $I(u_1) < \inf\{I(u) : u \in \partial\Lambda_*(j, k)\}$ が成り立つことを注意しておく。ただし、 $\partial\Lambda_*(j, k) = \{u \in \Lambda_*(j, k) : g_\lambda(u^+) \in \partial(C_{l/\lambda}[a^j/\lambda]) \text{ または } g_\lambda(u^-) \in \partial(C_{l/\lambda}[a^k/\lambda])\}$ である。

$$I(\alpha(t, u_1)) = I(\alpha(t, u_1)^+) + I(\alpha(t, u_1)^-) \leq I(u_1^+) + I(u_1^-) = I(u_1)$$

より、すべての $t \in [0, 1]$ に対して $I(\alpha(t, u_1)) \leq c + \tilde{\eta}$ となる。よって、(ii), (iv) により、

$$I(\Phi(1, \alpha(t, u_1))) \leq c - \tilde{\eta} \quad \forall t \in [0, 1]$$

を得る。(i), (iii) により、

$$\begin{aligned} \tau(\Phi(1, \alpha(0, u_1)))^+ - \tau(\Phi(1, \alpha(0, u_1)))^- &= \tau(\alpha(0, u_1)^+) - \tau(\alpha(0, u_1)^-) \\ &= \tau(u_1^+) - \tau(0) = -\infty \end{aligned}$$

かつ $\tau(\Phi(1, \alpha(1, u_1)))^+ - \tau(\Phi(1, \alpha(1, u_1)))^- = \infty$ を得るので、中間値の定理より、 $\tau(\Phi(1, \alpha(t_1, u_1)))^+ = \tau(\Phi(1, \alpha(t_1, u_1)))^-$ を満たす $t_1 \in [1/3, 2/3]$ が存在する。よって、 $\Phi(1, \alpha(t_1, u_1)) \in \Lambda_*$ および $I(\Phi(1, \alpha(t_1, u_1))) \leq c - \tilde{\eta}$ を得る。したがって、 $c - \tilde{\eta} < c < 2\bar{c}_M + \varepsilon$ に注意すると、 $\Phi(1, \alpha(t_1, u_1)) \in \bigcup_{j'=1}^2 \bigcup_{k'=1}^2 \Lambda_*(j', k')$ を得る。(ii) と $I(u_1) < \inf\{I(u) : u \in \partial\Lambda_*(j, k)\}$ により、

$$\Phi(1, \alpha(t_1, u_1)) \in \Lambda_*(j, k) \quad \text{かつ} \quad I(\Phi(1, \alpha(t_1, u_1))) \leq c - \tilde{\eta}$$

がわかるので、矛盾を得た。よって、証明された。 $\square$

前命題により、問題 (2.1) の少なくとも3つの符号変化する解のペアを得たことになる。実際、 $\Lambda_*(1, 2)$ の最小元として得た解のペアと $\Lambda_*(2, 1)$ の最小元として得た解のペアは一致するかもしれないからである。

次に、mountain pass タイプの問題 (2.1) の符号変化する解の存在を示す。 $\tilde{u}_0 \in \Lambda_*(1, 1)$, $\tilde{u}_1 \in \Lambda_*(1, 2)$ を $\tilde{u}_0^+ = \tilde{u}_1^+$, $I(\tilde{u}_0) \approx \inf\{I(u) : u \in \Lambda_*(1, 1)\}$, $I(\tilde{u}_1) \approx \inf\{I(u) : u \in \Lambda_*(1, 2)\}$ を満たすように取り、 $\sup_{0 \leq s \leq 1} I(\gamma_0(s)) < \bar{c}_1 + \bar{c}_M$ として良い。ただし、 $\gamma_0 \in C([0, 1]; \Lambda_*)$ は、 $\gamma(t)^+ \equiv \tilde{u}_0^+ (= \tilde{u}_1^+)$, $\gamma_0(0) = \tilde{u}_0$ および $\gamma(1) = \tilde{u}_1$ を満たす適当なパスである。

命題 2. すべての $j, k = 1, 2$ に対して $I(u) > \min\{I(v) : v \in \Lambda_*(j, k)\}$ を満たす問題 (2.1) の符号変化する解のペア $\pm u$ が存在する。

証明.

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1]; \Lambda_*) : \gamma(0) = \tilde{u}_0, \gamma(1) = \tilde{u}_1\}, \quad c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{0 \leq s \leq 1} I(\gamma(s))$$

と置く。 $\mathcal{K}_c \cap \Lambda_* \neq \emptyset$ を示したい。これを否定する。(2.2), (2.3), $\sup_{0 \leq s \leq 1} I(\gamma_0(s)) < \bar{c}_1 + \bar{c}_M$ により、 $\max\{I(\tilde{u}), I(\tilde{u}_1)\} < 2\bar{c}_M + \varepsilon < c < \bar{c}_1 + \bar{c}_M$ となる。(2.3) により、 $c > \sup_{j, k \in \{1, 2\}} \min\{I(v) : v \in \Lambda_*(j, k)\}$ となる。 $c < \bar{c}_1 + \bar{c}_M$ と補助定理 4 により、 $\mathcal{K}_c \cap \Lambda_*$ は空である。各 $\eta > 0$ に対し、

$$U_\eta = \{\alpha(t, \gamma(s)) : \gamma \in \Gamma, \max_{0 \leq r \leq 1} I(\gamma(r)) \leq c + \eta,$$

$$(t, s) \in [0, 1]^2, I(\alpha(t, \gamma(s))) \geq c - \eta\}$$

と置く。適当に $\eta > 0$, $\tilde{\eta} \in (0, \eta/2)$ および連続写像 $\Phi : [0, 1] \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ を選ぶことに
より次が成り立つようにできる。

- (i) $\max_{0 \leq s \leq 1} I(\gamma(s)) \leq c + 2\eta$ を満たす $\gamma \in \Gamma$ および $(t, s) \in ([0, 1/3] \cup [2/3, 1]) \times [0, 1]$ に対して、 $I(\alpha(t, \gamma(s))) \leq c - 2\eta$
- (ii) $(\theta, u) \in [0, 1] \times \Lambda$ に対して、 $I(\Phi(\theta, u)) \leq I(u)$
- (iii) $I(u) \notin [c - 2\eta, c + 2\eta]$ を満たす $(\theta, u) \in [0, 1] \times \Lambda$ に対して、 $\Phi(\theta, u) = u$
- (iv) $\Phi(1, U_{2\tilde{\eta}}) \subset \{u \in \Lambda : I(u) \leq c - 2\tilde{\eta}\}$.

$\sup_{0 \leq s \leq 1} I(\gamma_1(s)) \leq c + 2\tilde{\eta}$ を満たす $\gamma_1 \in \Gamma$ を取る。

$$\begin{aligned} I(\alpha(t, \gamma_1(s))) &= I(\alpha(t, \gamma_1(s))^+) + I(\alpha(t, \gamma_1(s))^-) \\ &\leq I(\gamma_1(s)^+) + I(\gamma_1(s)^-) = I(\gamma_1(s)), \end{aligned}$$

より、すべての $(t, s) \in [0, 1]^2$ に対して $I(\alpha(t, \gamma_1(s))) \leq c + 2\tilde{\eta}$ を得る。よって、(ii), (iv) により

$$(2.6) \quad I(\Phi(1, \alpha(t, \gamma_1(s)))) \leq c - 2\tilde{\eta} \quad \forall (t, s) \in [0, 1]^2$$

を得る。前命題の証明と同様に、各 $s \in [0, 1]$ に対して、 $\tau(\Phi(1, \alpha(t, \gamma_1(s))))^+ = \tau(\Phi(1, \alpha(t, \gamma_1(s))))^-$ を満たす $t \in [1/3, 2/3]$ が存在する。よって、もし $\rho : [0, 1] \rightarrow \{(t, s) : \tau(\Phi(1, \alpha(t, \gamma_1(s))))^+ - \tau(\Phi(1, \alpha(t, \gamma_1(s))))^- = 0\}$, $\rho(0) = (1/2, 0)$, $\rho(1) = (1/2, 1)$ を満たす連続写像が存在すれば、 $\Phi(1, \alpha(\cdot, \gamma_1(\cdot))) \circ \rho \in \Gamma$ となり、(2.6) に矛盾する。しかし、対応 $(t, s) \mapsto \tau(\Phi(1, \alpha(t, \gamma_1(s))))^+ - \tau(\Phi(1, \alpha(t, \gamma_1(s))))^-$ は微分可能ではないために、この写像の 0 の逆像の中に連続なパスを見つけることは難しい。そのために、この写像を C^∞ 関数 β で近似する。 $b \approx 0$ を満たす β の正則値 b を取ると、 $\beta^{-1}(b)$ は 1 次元微分可能多様体となる。1 次元微分可能多様体は完全に分類されているため、 $\rho(0) \in [1/3, 2/3] \times \{0\}$, $\rho(1) \in [1/3, 2/3] \times \{1\}$ を満たす連続写像 $\rho : [0, 1] \rightarrow \beta^{-1}(b)$ を選ぶことができる。残念ながら $\Phi(1, \alpha(\cdot, \gamma_1(\cdot))) \circ \rho$ は Γ の元とはならないが、うまく ρ を選ぶことにより、 $\min\{I(\Phi(1, \alpha(\cdot, \gamma_1(\cdot)))) \circ \rho(r) : r \in [0, 1]\} \geq c - \tilde{\eta}$ とできるため、(2.6) に対する矛盾を導くことができる。詳細は、[12] に述べられている。□

以上で、定理 1 の証明を終える。

以下、定理 2 の解説を行なう。 $\lambda > 0$ を十分小さく取ることにより、

$$\begin{aligned} &\inf \left\{ \sup_{0 \leq s \leq 1} I(\gamma(s)) : \gamma \in C([0, 1]; \Lambda_*), \gamma(0) = \tilde{u}_0, \gamma(1) = \tilde{u}_1 \right\} \\ &< \inf \{ I(u) : u \in \Lambda_*, u^\pm \notin \Lambda(1) \cup \Lambda(2) \} \end{aligned}$$

として良い。連続写像 $h_0 : [0, 1]^2 \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ を次を満たすように適当に取る。

$$\begin{cases} h_0(j, k) \in \Lambda_*(j+1, k+1) \quad \forall j, k \in \{0, 1\} \\ h_0(j, s)^+ \equiv h_0(j, 0) \quad \forall s \in [0, 1] \quad \forall j \in \{0, 1\} \\ h_0(t, k)^+ \equiv h_0(0, k) \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

そして、

$$\Gamma = \{\gamma : [0, 1]^2 \rightarrow \Lambda_*, \gamma = h_0 \text{ on } \partial[0, 1]^2\} \quad c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{(t, s) \in [0, 1]^2} I(h_0(t, s))$$

と置く。まず最初の難点として、無条件では $c > \bar{c}_M + \bar{c}_1$ となっている可能性があるため、 c のレベルで Palais-Smale タイプのことが成り立たない可能性がある。(補助定理 3 を参照のこと。) そのために、 $M_1 > 2^{(p-1)/2} M / (M^{2/(p-1)} + 1)^{(p-1)/2}$, $R > |a^1 - a^2|/2$ を満たす M_1, R が存在し、 $|x - (a^1 + a^2)/2| \leq R$ を満たす $x \in \mathbb{R}^N$ に

対して $Q(x) \geq M_1$ が成り立つという仮定を置いている。この仮定により、 $c < \bar{c}_M + \bar{c}_1$ が保証され、Palais-Smale タイプの条件が復活する。適当に $\eta > 0$, $\bar{\eta} \in (0, \eta/2)$, 連続写像 $\Phi : [0, 1] \times \Lambda \rightarrow \Lambda$, $\sup_{(t,s) \in [0,1]^2} I(\gamma_1(t,s)) \leq c + 2\bar{\eta}$ を選んで、

$$(2.7) \quad I(\Phi(1, \alpha(r, \gamma_1(t, s)))) \leq c - 2\bar{\eta} \quad \text{for all } (r, t, s) \in [0, 1]^3$$

が成り立つようにできる。 $(r, t, s) \mapsto \tau(\Phi(1, \alpha(r, \gamma_1(t, s))))^+ - \tau(\Phi(1, \alpha(r, \gamma_1(t, s))))^-$ は微分可能ではないために、この写像の 0 の逆像の中に連続なパスを見つけることは難しい。そのために、この写像を C^∞ 関数 β で近似する。 $b \approx 0$ を満たす β の正則値 b を取ると、 $\beta^{-1}(b)$ は 2 次元微分可能多様体となる。連続写像 $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow \beta^{-1}(b)$ をうまく選ぶことができれば、前命題と同様な証明で証明を終えることができるが、2 次元微分可能多様体にはハンドルが付いている可能性があるため、連続写像 $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow \beta^{-1}(b)$ をうまく取れない可能性がある。そこでミニマックスの取り方に工夫をする。

$\mathcal{F} = \{F : F \text{ は 2 次元コンパクト連結で向きづけ可能な多様体で}$

$[0, 1]^2 \times \mathbb{R}$ に埋め込まれており、 $\partial F = \partial[0, 1]^2 \times \{0\}$ を満たし、

$F \cap (([0, 1]^2 \setminus [\xi, 1 - \xi]^2) \times \mathbb{R}) = ([0, 1]^2 \setminus [\xi, 1 - \xi]^2) \times \{0\}$,

を満たす $\xi \in (0, 1/2)$ が存在し、

$\tilde{F} \cap ([0, 1]^2 \times \mathbb{R}) = F$ かつ

$\tilde{F} \cap ((\mathbb{R}^2 \setminus [0, 1]^2) \times \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^2 \setminus [0, 1]^2) \times \{0\}$

によって定義される多様体 $\tilde{F}$ は C^∞ である}

と定め、各 $F \in \mathcal{F}$ に対して $\partial F = \partial[0, 1]^2 \times \{0\}$ を $\partial[0, 1]^2$ と同一視し、

$$\Gamma = \{(F, \gamma) : F \in \mathcal{F}, \gamma \in C(F; \Lambda_*), \gamma = h_0 \text{ on } \partial F\}, \quad c \equiv \inf_{(F, \gamma) \in \Gamma} \sup_{s \in F} I(\gamma(s))$$

と定める。 c が臨界値あることが示せるので、定理 2 が成り立つことがいえる。詳細については、[12] に述べられている。

参考文献

- [1] N. Ackermann, *On the multiplicity of sign changing solutions to nonlinear periodic Schrödinger equations*, Topological Methods, Variational Methods and Their Applications (Taiyuan 2002), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2003, pp. 1–9.
- [2] T. Bartsch, Z. Liu, and T. Weth, *Nodal solutions of a p -Laplacian equation*, Proc. London Math. Soc. (3) **91** (2005), 129–152.
- [3] D. Cao and E. S. Noussair, *Multiplicity of positive and nodal solutions for nonlinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$* , Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13** (1996), 567–588.
- [4] A. Castro, J. Cossio, and J. M. Neuberger, *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem*, Rocky Mountain J. Math. **27** (1997), 1041–1053.
- [5] J. Chen, *Multiple positive and sign-changing solutions for a singular Schrödinger equation with critical growth*, Nonlinear Anal. **64** (2006), 381–400.
- [6] J. Chen, S. Li, and Y. Li, *Multiple solutions for a semilinear equation involving singular potential and critical exponent*, Z. Angew. Math. Phys. **56** (2005), 453–474.
- [7] M. Clapp and T. Weth, *Multiple solutions of nonlinear scalar field equations*, Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), 1533–1554.
- [8] E. N. Dancer and Z. Zhang, *Fucik spectrum, sign-changing, and multiple solutions for semilinear elliptic boundary value problems with resonance at infinity*, J. Math. Anal. Appl. **250** (2000), 449–464.
- [9] P. Han and Z. Liu, *The sign-changing solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations with a weight*, Differential Integral Equations **17** (2004), 835–848.

- [10] N. Hirano, A. M. Micheletti, and A. Pistoia, *Existence of sign changing solutions for some critical problems on $\mathbb{R}^N$* , Commun. Pure Appl. Anal. **4** (2005), 143–164.
- [11] N. Hirano and N. Shioji, *A multiplicity result including a sign-changing solution for an inhomogeneous Neumann problem with critical exponent*, to appear in Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.
- [12] ———, *A multiplicity result including sign-changing solutions for a nonlinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$* .
- [13] M. K. Kwong, *Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$* , Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1989), 243–266.
- [14] J. M. Neuberger, *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem with a reaction term nonzero at zero*, Nonlinear Anal. **33** (1998), 427–441.
- [15] M. Struwe, *Superlinear elliptic boundary value problems with rotational symmetry*, Arch. Math. **39** (1982), 233–240.
- [16] T. Weth, *Sign changing solutions of superlinear Schrödinger equations*, Topological Methods, Variational Methods and Their Applications (Taiyuan 2002), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2003, pp. 249–257.
- [17] M. Willem, *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [18] Z. Zhang and X. Li, *Sign-changing solutions and multiple solutions theorems for semilinear elliptic boundary value problems with a reaction term nonzero at zero*, J. Differential Equations **178** (2002), 298–313.