

Grzegorz hierarchy について

名古屋大学 波多野祥二

Cobhan[1]とMuchnik[4]はGrzegorz hierarchy(see,[3][5])の $\mathcal{E}^n$ がある空間領域制限のTuring machinesの族と一致することを証明した。本論文では時間領域制限のTuring machinesに対応する族 $\mathcal{P}^n$ を定義し、それらが一致することを証明し、それらのhierarchyの構造を調べる。

§ 1. 記号と定義

記号として以下を使用する。

C_*	特性関数が C に含まれる述語の集合
$\mathcal{E}^n$	Grzegorz hierarchyの第 n 番のクラス
P	多項式時間内にdeterministic Turing machinesで計算可能な関数族
NP	多項式時間内にnondeterministic Turing machinesで計算可能な関数族
$i \uparrow$	$i \uparrow (x_1, \dots, x_n) = x_j$ for $1 \leq j \leq n$ and $n=1, 2, \dots$
$0(x)$	定数関数 $0(x)=0$.
$s(x)$	$s(x)=x+1$.
$Ack(x, y)$	Peter関数 $Ack(0, y)=y+1, Ack(x+1, 0)=Ack(x, 1), Ack(x+1, y+1)=Ack(x, Ack(x+1, y))$
$ x $	$ x =x$ を2進展開した長さ
$x \# y$	smash関数 $x \# y = 2^{ x \cdot y }$.

Def.1.1 関数 $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ が *increasing* とは、すべての $i < n$ に対して、
 $a < b \Rightarrow f(x_0, \dots, x_{i-2}, a, x_i, \dots, x_{n-1}) \leq f(x_0, \dots, x_{i-2}, b, x_i, \dots, x_{n-1})$.

Def.1.2 g, h, j を既に定義された関数とする。その時、次に定義されている関数 f を関数 g, h, j からlimited recursionによって得られた関数という。

$$\begin{aligned} f(0, x_1, \dots, x_n) &= g(x_1, \dots, x_n) \\ f(y+1, x_1, \dots, x_n) &= h(y, x_1, \dots, x_n, f(y, x_1, \dots, x_n)) \\ f(y, x_1, \dots, x_n) &\leq j(y, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Def.1.3 g, h_1, h_2, j を既に定義された関数とする。その時、次に定義されている関数 f を関数 g, h_1, h_2, j から bounded recursion によって得られた関数という。

$$f(0, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(2y, x_1, \dots, x_n) = h_1(y, x_1, \dots, x_n, f(y, x_1, \dots, x_n)) \quad \text{for } y > 0$$

$$f(2y+1, x_1, \dots, x_n) = h_2(y, x_1, \dots, x_n, f(y, x_1, \dots, x_n))$$

$$f(y, x_1, \dots, x_n) \leq j(y, x_1, \dots, x_n)$$

Def.1.4 $f_1, \dots, f_n$ を関数とする。 $Com(f_1, \dots, f_n)$ を次の条件を満たす最小の関数族 C とする

$$1) \ 0(x), s(x), i^j, f_1, \dots, f_n \in C$$

$$2) \ h, g_1, \dots, g_m \in C \Rightarrow h(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k)) \in C$$

Def.1.5 $\mathcal{E}(f_1, \dots, f_n)$ を次の条件を満たす最小の関数族 C とする。

$$1) \ 0(x), s(x), i^j, f_1, \dots, f_n \in C$$

$$2) \ h, g_1, \dots, g_m \in C \Rightarrow h(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k)) \in C$$

$$3) \ C \text{ は limited recursion について閉じている。}$$

Def.1.6 $\mathcal{P}(f_1, \dots, f_n)$ を次の条件を満たす最小の関数族 C とする。

$$1) \ 0(x), 2x, 2x+1, i^j, f_1, \dots, f_n \in C$$

$$2) \ h, g_1, \dots, g_m \in C \Rightarrow h(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k)) \in C$$

$$3) \ C \text{ は bounded recursion について閉じている。}$$

定義より次の事実がわかる。

Theorem 1.1

$$\mathcal{E}^n = \mathcal{E}(Ack(n, x), \max(x, y)) \supseteq \mathcal{E}(Ack(n, x)) \quad \text{for } n \geq 2.$$

$$\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}(Ack(0, x)) = \mathcal{E}(\emptyset) \subseteq \mathcal{E}(\max(x, y)).$$

$$\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}(Ack(2, x), \max(x, y)) = \mathcal{E}(x+y) = \mathcal{E}(2x, \max(x, y)) \supseteq \mathcal{E}(2x).$$

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}(x \cdot y) = \mathcal{E}(x^2, \max(x, y)) \supseteq \mathcal{E}(x^2)$$

$$\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}(Ack(3, x), \max(x, y)) = \mathcal{E}(2^{x \cdot y}) = \mathcal{E}(2^x, \max(x, y)) \supseteq \mathcal{E}(2^x)$$

□

Def.1.7 $P^1 = P()$, $P^2 = P(x^2, \max(x, y))$,
 $n > 2$ のとき、 $P^n = P(\langle \text{Ack}(n, x), \max(x, y) \rangle)$

Def.1.8 C を関数族とする。

$\text{DTM}(C) = \{f \mid \exists t \in C \langle f(x_1, \dots, x_n) \text{ を } t(x_1, \dots, x_n) \text{ ステップで計算可能な} \\ \text{deterministic Turing machine が存在する。} \}$

$\text{DSTM}(C) = \{f \mid \exists t \in C \langle f(x_1, \dots, x_n) \text{ を } t(x_1, \dots, x_n) \text{ 空間領域で計算可能な} \\ \text{deterministic Turing machine が存在する。} \}$

§ 2 $\mathcal{E}$ と $\mathcal{P}$

Theorem 2.1 $\mathcal{P}^1 \subsetneq \mathcal{P}^2 \subsetneq \mathcal{P}^3 \subsetneq \dots$

$$\mathcal{P}^1_* \subsetneq \mathcal{P}^2_* \subsetneq \mathcal{P}^3_* \subsetneq \dots$$

proof Gregorczyk hierarchy の場合 ($\mathcal{E}^0_* \subseteq \mathcal{E}^1_* \subseteq \mathcal{E}^2_* \subsetneq \mathcal{E}^3_* \subsetneq \dots$,
 $\mathcal{E}^n \subsetneq \mathcal{E}^{n+1}$, see [3]) と同様に証明出来る。□

Theorem 2.2 $\mathcal{P}(f_1, \dots, f_n) \subseteq \mathcal{E}(f_1, \dots, f_n, 2x)$

proof $\mathcal{E}(f_1, \dots, f_n, 2x)$ が bounded recursion について閉じていることを示せばよい。

$g, h_1, h_2, j \in \mathcal{E}(f_1, \dots, f_n, 2x)$ 、 f を g, h_1, h_2, j から bounded recursion によって得られた関数とする。 f' を次の limited recursion によって得られた関数とする。

$$f'(0, y, \vec{x}) = g(\vec{x})$$

$$f'(s+1, y, \vec{x}) = \begin{cases} h_1(q, \vec{x}, f'(s, y, \vec{x})) & \text{if } |y| \geq s+1, y = (2 \cdot q) \cdot 2^{|y|-s-1} + r \\ h_2(q, \vec{x}, f'(s, y, \vec{x})) & \text{if } |y| \geq s+1, y = (2 \cdot q+1) \cdot 2^{|y|-s-1} + r \\ f'(s, y, \vec{x}) & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f'(s, y, \vec{x}) \leq j(y, \vec{x})$$

従って、 $f(y, \vec{x}) = f'(y, y, \vec{x}) \in \mathcal{E}(f_1, \dots, f_n, 2x)$ 。 □

Theorem 2.3 $a(x) \geq 2^x \Rightarrow \mathcal{P}(a, \dots) = \mathcal{E}(a, \dots)$

proof $a \in \mathcal{P}(a, \dots)$ より、 $2^x \in \mathcal{P}(a, \dots)$ 。 $\mathcal{P}(a, \dots)$ が limited recursion について閉じていることを示す。 $g, h, j \in \mathcal{P}(a, \dots)$ とし、 f が g, h, j から limited recursion によって得られた関数とする。

$$f'(0, \vec{x}) = g(\vec{x})$$

$$f'(2s, \vec{x}) = f'(2s+1, \vec{x}) = h(|s|, \vec{x}, f'(s, \vec{x}))$$

$$f'(s, \vec{x}) \leq j(|s|, \vec{x})$$

$$f(y, \vec{x}) = f'(2^y - 1, \vec{x}) \in \mathcal{P}(a, \dots).$$

□

Theorem 2.4 $f(x) \geq x^2, f \in \text{DSTM}(C o m(\max(x, y), f))$ ならば、

$$\mathcal{E}(\max(x, y), f) = \text{DSTM}(C o m(\max(x, y), f))$$

proof 仮定より、 $\{x^2\} \cup C o m(\max(x, y), f) \subseteq \text{DSTM}(C o m(\max(x, y), f))$ 。

($\subseteq$) $\text{DSTM}(C o m(\max(x, y), f))$ が limited recursion について閉じている。

($\supseteq$) $g \in C o m(\max(x, y), f), h(x)$ を $|g(x)|$ 空間領域で計算可能な deterministic Turing machine $\mathbb{M}$ が存在するとする。 q を $\mathbb{M}$ の内部状態の数とする。 $h(x)$ を計算するために、Turing machine $\mathbb{M}$ とテープの取り得る状態はたかだか $m \cdot q \cdot g(x)$ である (m は定数である。)。すなわち、 $\mathbb{M}$ は $m \cdot q \cdot g(x)$ ステップ以内でとまる。よって、bounded recursion を使用して、関数 $h(x)$ を $\mathcal{E}(\max(x, y), f)$ に属するように定義しなおすことが出来る。 □

Cor.2.1(Ritchie) $\mathcal{E}^2 = \text{DLBA} (= \text{DSTM}(\{\text{多項式}\}))$

□

Theorem 2.5

(a) $f(x) \geq x^2, f \in \text{DTTM}(C o m(\max(x, y), f))$ ならば、

$$\mathcal{P}(\max(x, y), f) \supseteq \text{DTTM}(C o m(\max(x, y), f))$$

(b) $f(x) \geq x \# x, f \in \text{DTTM}(C o m(\max(x, y), f))$ ならば、

$$\mathcal{P}(\max(x, y), f) = \text{DTTM}(C o m(\max(x, y), f))$$

proof (a) 明らか。

(b) ($\supseteq$) (a) より。 ($\subseteq$) $\text{DTTM}(C o m(\max(x, y), f))$ が bounded recursion について閉じていることを示せばよい。 □

Rose[5] は $\mathcal{P}(x \# y)_* = P$ を示した。

Cor.2.1 $\mathcal{P}(x \# y)_* = P \subseteq NP \subseteq \mathcal{E}(x \# y)_*$

proof theorem 2.3 より、 $\mathcal{P}(x \# y)_* = P \subseteq \mathcal{E}(x \# y)_*$ 。 $\mathcal{E}(x \# y)_*$ は bounded

$$k(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \Rightarrow f'(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_0, \dots, x_{n-1}),$$

$g \in \mathcal{P}(f(x_0, \dots, x_{n-1}))$ とする。そのとき、

次の条件を満たす関数 $g' \in \mathcal{P}(f(x, \dots, x))$, $j \in \text{Com}(f(x_0, \dots, x_{n-1}))$ が存在する。

$$j(x_0, \dots, x_{m-1}) \leq x_m \Rightarrow g'(x_0, \dots, x_{m-1}, x_m) = g(x_0, \dots, x_{m-1}).$$

proof g の構成に関する帰納法で証明出来る。 $\square$

Theorem 3.2 関数 f を increasing とし、 $f(x_0, \dots, x_{n-1}) \geq \max(x_0, \dots, x_{n-1})$,

$\exists k \in \text{Com}(f(x_0, \dots, x_{n-1})) \exists f' \in \mathcal{P}(f(x, \dots, x))$

$$k(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \Rightarrow f'(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_0, \dots, x_{n-1}),$$

とする。そのとき、

$$\mathcal{P}(f(x_0, \dots, x_{n-1}))_* = \mathcal{P}(f(x, \dots, x))_*.$$

proof theorem 3.1 と同様に証明出来る。 $\square$

theorem 3.2 より、ただちに次のことがわかる。

Cor.3.2 $\mathcal{P}()_* = \mathcal{P}(x+y)_*$, $\mathcal{P}(x^2)_* = \mathcal{P}(x \cdot y)_*$, $\mathcal{P}(x \# x)_* = \mathcal{P}$ $\square$

References

- [1] Alen Cobham, "The intrinsic computational difficulty of functions", in:
Y.Bar-Hillel.(ed.) Proceedings of the 1964 International Conference on
Logic, Methodology and the Philosophy of science, North-Holland Publ.Comp.,
Amsterdam 1965, 24-30
- [2] R.O.Gandy, "Some relations between classes of low computational complexity",
Bull. London Math. Soc. 16(1984)127-134.
- [3] Andrzej Grzegorzczuk, "Some classes of recursive functions", Rozprawy
Matematyczne (Inst Mat. Polsk. Akad. Nauk.) IV (1953).
- [4] Steven S. Muchnick, "On two approaches to classical recursive functions",
in: Problems in Mathematical Logic [in Russian], Moscow, pp.123-138 (1970)
- [5] H. E. Rose, Subrecursion