

Accumulation Game について

Clemson University William H. Ruckle
神戸商科大学 菊田健作 (Kensaku Kikuta)

1. はじめに.

2 人のプレーヤーを Hider (以後 **H**) と Seeker (以後 **S**) とする. n 個の箱がある. B は箱全体の集合である. 毎回, **H** はただ 1 個の物を任意の空の箱に隠し, **S** はただ 1 個の箱を調べる. 調べる箱に物がある場合, **S** は確率 1 でそれを見つける. 毎回, **S** が物を見つけた時にのみ, **H** は **S** が調べた箱を知る. **H** はこの情報を, 次回に箱を選ぶ際に使うことができる. 毎回終了後, もし k 個の物が (k 個の) 箱にあれば, ゲームは終了し, **H** は勝って利得 1 を得る. T 回終了までに, k 個の物を箱に残すのに失敗した時は **H** の負けで利得 0 を得る. このゲームを n 個の箱, k 個の location, T 回の試行を行える quiet accumulation game と呼ぶ.

[2] において, Kikuta/Ruckle は新しい探索ゲームを提案し, accumulation game と呼んだ. そこでは, **H** が **S** の調べた箱を毎回知ることができるような場合, すなわち noisy accumulation game を調べた. [5] において, Ruckle/Kikuta は quiet accumulation game の二つの special case を分析した. 一つは, $k=2, T=3$ の場合, もう一つは $k=T$ の場合である. $k=2, T=3$ の場合を $T=k+1$ ($k \geq 2$) の場合へ拡張して分析するのは困難である.

そこで本報告では, n 個の箱, k 個の location, $T=k+m$ ($m \geq 1$) 回の試行を行える quiet accumulation game の三つの variation (下記 VAR I, VAR II, VAR III) を提案する. これらの variation を分析することにより, 元のゲームの値の上界または下界を見つけることができる. さらに, これらの分析により, 元のゲームの最適戦略についての情報を得ることができる. 各 variation はプレーヤーの戦略に制限を加えることにより得られる. 本報告では下記 VAR II を主として分析する. VAR I と VAR III を第 3 節で部分的に分析する. 第 4 節では quiet accumulation game の値に対する上界, 下界について述べる.¹⁾

VAR I: **S** はこれまでに調べたことがない箱のみを調べることができる,

H はこれまでに隠したことがない箱にのみ隠すことができる.

VAR II: **S** はこれまでに調べたことがない箱のみを調べることができる.

VAR III: **H** はこれまでに隠したことがない箱にのみ隠すことができる.

第 i 回の結果 O_i を次のように定義する.

$O_i = N$: 第 i 回に **S** は物を見つけなかった.

$O_i = F$: 第 i 回に **S** は物を見つけた.

一般的な結果の列は次の通りである:

$$(1.1) \quad \underbrace{NN \cdots NF}_{\ell_1} \underbrace{NN \cdots NF}_{\ell_2} \cdots \underbrace{NF \cdots NF}_{\ell_i} \cdots \underbrace{NF \cdots NF}_{\ell_{m+1}}$$

ここに

$$(1.2) \quad \ell_1 + \cdots + \ell_{m+1} = k \text{ かつ } 0 \leq \ell_i \leq k \text{ for } 1 \leq i \leq m+1.$$

h_i, s_i は第 i 回における **H**, **S** の選択を表わす. 各 $i=1, \dots, T$ に対し:

$$\begin{aligned} H_i &\equiv \{h_1, \dots, h_i\}, (\text{choices by H}), \\ S_i &\equiv \{s_1, \dots, s_i\}, (\text{choices by S}), \\ N_i &\equiv I \setminus (H_i \cup S_{i-1}), (O_i = N \text{ iff } s_i \in N_i), \\ F_i &\equiv H_i \setminus S_{i-1}, (O_i = F \text{ iff } s_i \in F_i), \end{aligned}$$

¹⁾ 命題の証明のうち本報告で省かれたものに興味のある人は [6] を参照されたい.

$H_0 = S_0 = \emptyset$ とおく. $D_i^j \equiv H_i \cup \{s_{i+1}, \dots, s_{k+j}\}$ for $i = 0, \dots, k+j$ and $j = 1, \dots, m$ とおく. $\mathbf{H}$ と $\mathbf{S}$ の純戦略を次のように表わす.

$$h^i = h_i(h_1, \mathcal{O}_1, h_2, \mathcal{O}_2, \dots, h_{i-1}, \mathcal{O}_{i-1}) \text{ for } i = 1, \dots, T,$$

$$s^i = s_i(s_1, \mathcal{O}_1, s_2, \mathcal{O}_2, \dots, s_{i-1}, \mathcal{O}_{i-1}) \text{ for } i = 1, \dots, T.$$

B_t は $t-1$ 回の後の空の箱の集合である. 第 t 回 ($1 \leq t \leq T$) での $\mathbf{H}$ の B_t への確率分布を p_t , $\mathbf{S}$ の $I \setminus S_{t-1}$ 上の確率分布を q_t と表わす. $T = k+m$ であるから, $\mathbf{S}$ が $(m+1)$ 回見つけるとゲームは $\mathbf{H}$ の負けで終了する. 従って, 両プレーヤーとも, これまでの $\mathbf{S}$ による発見回数は m 以下であるとして, 確率分布を考えればよい.

これ以後 $x \equiv n-k$ とおく.

2. VAR II の分析

本節では VAR II を分析する. まず, $\mathbf{H}$ の行動戦略を定義する. 第 t 回において,

$$(2.1) \quad p_t^*(h) = \frac{1}{n-t+r},$$

ここに $\ell_1 + \dots + \ell_{r-1} + r + 1 \leq t \leq \ell_1 + \dots + \ell_r + r$ かつ $2 \leq r \leq m$ ($r = m+1$ のときは, $\ell_1 + \dots + \ell_m + m + 2 \leq t \leq k+m$, そして $r = 1$ のときは, $1 \leq t \leq \ell_1 + 1$).

第 t 回において,

$$(2.2) \quad p_t^*(s_{t-1}) = 1 \quad \text{and} \quad p_t^*(h) = 0 \quad \text{for} \quad h \neq s_{t-1},$$

ここに, $t = \ell_1 + \dots + \ell_{r-1} + r$ and $1 \leq r \leq m$.

$\mathbf{S}$ の行動戦略を

$$(2.3) \quad q_t^*(s) = \frac{1}{n-t+1} \quad \text{for} \quad s \in I \setminus S_{t-1}, 1 \leq t \leq k+m.$$

と定義する.

次に, 関数 $\{f_a\}_{1 \leq a \leq m+1}$ を

$$(2.4) \quad f_a(x; y_1, \dots, y_a) = f_1(x; y_a) \{f_{a-1}(x; y_1, \dots, y_{a-1}) - f_{a-1}(x-1; y_1, \dots, y_{a-1})\},$$

$$(2.5) \quad f_1(x; y) = x^y,$$

と定義する.

$$(2.6) \quad v(n, k, 1) \equiv \frac{f_1(x; k)}{{}_n P_k},$$

とおく. さらに, $r = 2, \dots, m+1$ に対し,

$$(2.7) \quad v(n, k, r) = v(n, k, r-1) + \frac{1}{{}_n P_k} \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \sum_{\ell_2=0}^{k-\ell_1-1} \cdots \sum_{\ell_{r-1}=0}^{k-\ell_1-\dots-\ell_{r-2}-1} f_r(x; \ell_1+1, \ell_2, \dots, \ell_{r-1}, \ell_r-1),$$

とおく, ここに $\ell_1 + \dots + \ell_r = k$ である.

定理 2.1. $T = k+2$ とする. (2.1), (2.2) および (2.3) はそれぞれ $\mathbf{H}$ および $\mathbf{S}$ の最適戦略である. ゲームの値は $v(n, k, 3)$ である.

Proof: $\mathbf{H}$ が (2.1) と (2.2) で定義される行動戦略 p^* を用いるとせよ. $\mathbf{S}$ は行動戦略 q を用いるとせよ. 結果の列 (1.1) が起こる確率を次の補題の公式を使いながら計算できる. そして, 補題 2.2 から 2.6 より, マクシミン値が $v(n, k, 3)$ であることがわかる. 次に, $\mathbf{S}$ が (2.3) で定義される行動戦略 q^* を用い, $\mathbf{H}$ は純粋戦略 (2.8) を用いるとせよ. 補題 2.7 から 2.11 によりミニマックス値が $v(n, k, 3)$ 以下であることがわかる.

補題 2.2. 結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_k$ が起こる確率は $v(n, k, 1)$ である.

Proof:¹⁾

$$\begin{aligned}
 & \sum_{h_1=1}^n \frac{1}{n} \sum_{s_1 \in N_1} q(s_1) \sum_{h_2 \neq h_1} \frac{1}{n-1} \sum_{s_2 \in N_2} q(s_2|S_1) \cdots \sum_{h_k \notin H_{k-1}} \frac{1}{n-k+1} \sum_{s_k \in N_k} q(s_k|S_{k-1}) \\
 &= \sum_{s_1=1}^n q(s_1) \sum_{s_2 \neq s_1} q(s_2|s_1) \cdots \sum_{s_k \notin S_{k-1}} q(s_k|S_{k-1}) \sum_{h_1 \notin S_k} \frac{1}{n} \sum_{h_2 \notin D_1^0} \frac{1}{n-1} \cdots \sum_{h_k \notin D_{k-1}^0} \frac{1}{n-k+1} \\
 &= \sum_{s_1=1}^n q(s_1) \sum_{s_2 \neq s_1} q(s_2|s_1) \cdots \sum_{s_k \notin S_{k-1}} q(s_k|S_{k-1}) \frac{n-k}{n} \frac{n-k}{n-1} \cdots \frac{n-k}{n-k+1} \\
 &= \frac{(n-k)^k}{n P_k} = \frac{x^k}{n P_k} = \frac{f_1(x; k)}{n P_k} = v(n, k, 1).
 \end{aligned}$$

すべての $a, 0 \leq a \leq k-1$ に対し, $|D_a^0| = k$ であることに注意せよ. ■

補題 2.3. $t = i, \dots, j$ に対し, $\mathcal{O}_t = \mathcal{N}$ とせよ. このとき,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s_i \in N_i} \sum_{h_{i+1} \notin H_i} \sum_{s_{i+1} \in N_{i+1}} \cdots \sum_{h_j \notin H_{j-1}} \sum_{s_j \in N_j} \sum_{h_{j+1} \notin H_j} \\
 &= \sum_{s_i \notin H_i \cup S_{i-1}} \sum_{s_{i+1} \notin H_i \cup S_i} \cdots \sum_{s_j \notin H_i \cup S_{j-1}} \sum_{h_{i+1} \notin H_i \cup \{s_{i+1}, \dots, s_j\}} \cdots \sum_{h_j \notin H_{j-1} \cup \{s_j\}} \sum_{h_{j+1} \notin H_j}.
 \end{aligned}$$

補題 2.4. $t = i, \dots, j$ に対し, $\mathcal{O}_t = \mathcal{N}$ とせよ. $\mathcal{O}_{j+1} = \mathcal{F}$ であつたとすると,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{h_{i+1} \notin H_i \cup \{s_{i+1}, \dots, s_j\}} \cdots \sum_{h_j \notin H_{j-1} \cup \{s_j\}} \sum_{h_{j+1} \notin H_j} \left(\sum_{s_{j+1} \notin S_j} - \sum_{s_{j+1} \notin H_{j+1} \cup S_j} \right) \\
 &= \sum_{s_{j+1} \notin S_j} \sum_{h_{i+1} \notin H_i \cup \{s_{i+1}, \dots, s_j\}} \cdots \sum_{h_j \notin H_{j-1} \cup \{s_j\}} \sum_{h_{j+1} \notin H_j} \\
 & \quad - \sum_{s_{j+1} \notin H_{j+1} \cup S_j} \sum_{h_{i+1} \notin H_i \cup \{s_{i+1}, \dots, s_j\}} \cdots \sum_{h_j \notin H_{j-1} \cup \{s_{j+1}, s_j\}} \sum_{h_{j+1} \notin H_j \cup \{s_{j+1}\}}.
 \end{aligned}$$

補題 2.5. 結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_\ell \mathcal{F} \underbrace{\mathcal{N}\cdots\mathcal{N}}_{k-\ell}$ が起こる確率は $\frac{1}{n P_k} f_2(x; \ell_1 + 1, \ell_2 - 1)$ である, ここに $\ell = \ell_1$ (i.e., (1.1) において $m = 1$).

補題 2.6. $T = k + m$ とする. $\mathbf{H}$ が p^* を, $\mathbf{S}$ が q を用いたとき, 結果の列 (1.1) が起こる確率は $v(n, k, m+1)$ である.

$\mathbf{S}$ が (2.2) で定義される行動戦略 q^* を用い, $\mathbf{H}$ が次のように表わされる任意の純粋戦略を用いたとせよ.

¹⁾ 本報告で $q_t(s_t|S_{t-1})$ を $q(s_t|S_{t-1})$, あるいはより簡単に $q(s_t)$ と表わす.

$$(2.8) \quad \begin{cases} h_1, \dots, h_k & \text{for } \underbrace{\mathcal{N}\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_k; \\ h_1, \dots, h_{\ell+1}, h_{\ell+2}^\ell, \dots, h_{k+1}^\ell & \text{for } \underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_\ell \mathcal{F} \underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_{k-\ell}, 0 \leq \ell \leq k-1. \end{cases}$$

補題 2.7. $\mathbf{H}$ と $\mathbf{S}$ が上記の戦略を用いるとき、結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_k$ が起こる確率は $v(n, k, 1)$ である。

Proof:

$$\sum_{s_1 \in N_1} \frac{1}{n} \sum_{s_2 \in N_2} \frac{1}{n-1} \dots \sum_{s_k \in N_k} \frac{1}{n-k+1} = \frac{(n-k)^k}{nP_k}. \blacksquare$$

補題 2.8. 結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_\ell \mathcal{F} \underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_{k-\ell}$ が起こる確率は $\frac{1}{nP_k} f_2(x; \ell_1 + 1, \ell_2 - 1)$ 以下である、ここに $\ell = \ell_1$ and $\ell_2 = k - \ell$ である。

結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_{\ell_1} \mathcal{F} \underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_{\ell_2} \mathcal{F} \underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_{\ell_3}$ が起こったとせよ。

$$h_{t_1} = s_{L_1+1}, h_{t_2} = s_{L_2+2}, h_{r_1} = s_{L_1+1} \text{ and } h_{r_2} = s_{L_2+2},$$

であったとせよ、ここに

$$L_1 + 2 \leq t_1 \leq k + 2, L_2 + 3 \leq t_2 \leq k + 2, 1 \leq r_1 \leq L_1 + 1 \text{ and } 1 \leq r_2 \leq L_2 + 2.$$

補題 2.9. 結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_{\ell_1} \mathcal{F} \underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_{\ell_2} \mathcal{F} \underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_{\ell_3}$ が起こる確率は次の通りである：

(i) $L_1 + 2 \leq t_1 \leq L_2 + 2, L_1 + 2 \leq r_2 \leq L_2 + 2$ かつ $r_2 < t_1$ のとき.

$$\frac{1}{nP_k} x^{k+L_2-t_1-t_2+5} (x-1)^{L_1+t_1+t_2-r_1-r_2-L_2-2} (x-2)^{r_1+r_2-L_1-3}.$$

(ii) $L_1 + 2 \leq t_1 \leq L_2 + 2, L_1 + 2 \leq r_2 \leq L_2 + 2$ かつ $t_1 < r_2$ のとき.

$$\frac{1}{nP_k} x^{k+L_2-r_2-t_2+5} (x-1)^{L_1+r_2+t_2-r_1-t_1-L_2-2} (x-2)^{r_1+t_1-L_1-3}.$$

(iii) $L_1 + 2 \leq t_1 \leq L_2 + 2, 1 \leq r_2 \leq L_1 + 1$ かつ $r_1 < r_2$ のとき.

$$\frac{1}{nP_k} x^{k+L_1+L_2-t_1-t_2-r_2+6} (x-1)^{t_1+t_2+r_2-r_1-L_1-L_2-5} (x-2)^{r_1-1}.$$

(iv) $L_1 + 2 \leq r_2 \leq L_2 + 2$ かつ $L_2 + 3 \leq t_1 \leq k + 2$ のとき.

$$\frac{1}{nP_k} x^{k-t_2+3} (x-1)^{t_2-t_1+L_2-r_2+L_1-r_1+3} (x-2)^{t_1-L_2+r_2-L_1+r_1-6}.$$

(v) $1 \leq r_2 \leq L_1 + 1$ かつ $L_2 + 3 \leq t_1 \leq k + 2$ のとき.

$$\frac{1}{nP_k} x^{k-t_2-r_2+L_1+4} (x-1)^{t_2-t_1+r_2-r_1+L_2-L_1} (x-2)^{t_1-L_2+r_1-4}.$$

補題 2.10. $(L_1 + 2)$ 回と $(L_2 + 3)$ 回において、 $\mathbf{H}$ はそれぞれ s_{L_1+1} と s_{L_2+2} を選択すべきである。

Proof: 補題 2.9 において、すべての場合において、確率の式は $(\frac{x-1}{x})^{t_1+t_2}$ かまたは $(\frac{x-1}{x})^{t_2}(\frac{x-2}{x-1})^{t_1}$ を含んでいる。これらは t_1 と t_2 について減少関数である。 $\blacksquare$

補題 2.11. 結果の列 $\underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_{\ell_1} \mathcal{F} \underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_{\ell_2} \mathcal{F} \underbrace{\mathcal{N}\dots\mathcal{N}}_{\ell_3}$ が起こる確率は $\frac{1}{nP_k} f_3(x; \ell_1 + 1, \ell_2, \ell_3 - 1)$ 以下である。

3. VAR I と VAR III の分析

本節では $T = k + 1$ の場合に VAR I と VAR III を分析する。まず、 $\mathbf{H}$ の行動戦略を、第 t 回 ($1 \leq t \leq T$) において、

$$(3.1) \quad p_t^*(h) = \frac{1}{n-t+1} \quad \text{for } h \in I \setminus H_{t-1}.$$

と定義する。

次に $\mathbf{S}$ の行動戦略を

$$(3.2) \quad q_t^*(s) = \frac{1}{n-t+1} \quad \text{for } s \in I \setminus S_{t-1}.$$

と定義する。(3.2) は (2.3) と同じである。さらに、関数 $\{g_a\}_{1 \leq a \leq m+1}$ を

$$(3.3) \quad g_a(x; y_1, \dots, y_a) = g_1(x-1; y_a) \{g_{a-1}(x; y_1, \dots, y_{a-1}) - g_{a-1}(x-1; y_1, \dots, y_{a-1})\},$$

かつ

$$(3.4) \quad g_1(x; y) = x^y.$$

と定義する。

$$(3.5) \quad w(n, k, 1) \equiv \frac{g_1(x; k)}{{}_nP_k},$$

とおく。さらに、 $r = 2, \dots, m+1$ に対し、

$$(3.6) \quad w(n, k, r) = w(n, k, r-1) + \frac{1}{{}_nP_k} \frac{x-1}{x} \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \sum_{\ell_2=0}^{k-\ell_1-1} \cdots \sum_{\ell_{r-1}=0}^{k-\ell_1-\cdots-\ell_{r-2}-1} g_r(x; \ell_1+1, \ell_2, \dots, \ell_{r-1}, \ell_r-1),$$

ここに、 $\ell_1 + \cdots + \ell_r = k$ である。

定理 3.1. VAR I において、 $T = k + 1$ とせよ。(3.1) と (3.2) で与えられる p^* と q^* はそれぞれ $\mathbf{H}$ と $\mathbf{S}$ の最適戦略である。ゲームの値は

$$w(n, k, 2) = \frac{1}{{}_nP_k} g_1(x; k) + \frac{1}{{}_nP_k} \frac{x-1}{x} \sum_{\ell_1=0}^{k-1} g_2(x; \ell_1+1, \ell_2-1).$$

次に、VAR III を $T = k + 1$ の場合に考える。

定理 3.2. VAR III において $T = k + 1$ とする。(3.1) と (3.2) で与えられる p^* と q^* はそれぞれ $\mathbf{H}$ と $\mathbf{S}$ の最適戦略である。ゲームの値は $w(n, k, 2)$ である。

4. おわりに

n 個の箱、 k 個の locations、 $k + 1$ 回の、元の quiet accumulation game の値を $V(n, k)$ と表わす。

定理 4.1. $v(n, k, 2) \geq V(n, k) \geq w(n, k, 2)$.

Proof: VAR II での **S** の戦略集合は元の quiet accumulation game における **S** の戦略集合に含まれる。よって, $v(n, k, 2) \geq V(n, k)$. VAR III での **H** の戦略集合は元の quiet accumulation game における **H** の戦略集合に含まれる。よって, $V(n, k) \geq w(n, k, 2)$ を得る. ■

$$\begin{aligned} {}_nP_k\{v(n, k, 2) - w(n, k, 2)\} &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{\ell} \{f_2(x; \ell+1, \ell_2-1) - \frac{x-1}{x} g_2(x; \ell+1, \ell_2-1)\} \\ &= \frac{1}{x} \{(k-2x+2)x^{k+1} + (k+2x)(x-1)^{k+1}\}. \end{aligned}$$

定義より, $n \geq k$, i.e., $x \equiv n-k \geq 0$. $x=0$ ならば, **H** が勝つ確率は我々が考えるすべてのモデルにおいてゼロである. $x=1$ のときには, $v(n, k, 2) - w(n, k, 2) = (n-1)/n!$ となり, これは n が大きくなるとゼロに収束する. $k=2$ のときは, [5] より,

$$V(n, 2) = \frac{1}{{}_nP_3} \{x^3 + x^2 + \frac{2x^3 - x^2 - x + 1}{x+2}\}.$$

よって

$${}_nP_3\{v(n, 2, 2) - V(n, 2)\} = \frac{4x^2 - x - 1}{x+2} > 0,$$

かつ

$${}_nP_3\{V(n, 2) - w(n, 2, 2)\} = \frac{7x-3}{x+2} > 0.$$

References

- [1] S.Gal: *Search Games*, Math.in Sci. and Eng., 149, Academic Press, 1980.
- [2] Kikuta, K. and W.H.Ruckle: Accumulation Games I-Noisy Search. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.94, No.2, August 1997.
- [3] ———: Continuous Accumulation Games on Discrete Locations. August 1996.
- [4] W.H.Ruckle: *Geometric Games and their Applications*. Pitman, Boston, 1983.
- [5] Ruckle, W.H. and K.Kikuta: Quiet Accumulation Games. Working Paper No.176, Institute of Economic Research, Kobe university of Commerce, August 1999.
- [6] ———: Variations of Quiet Accumulation Games. Working Paper No.177, Institute of Economic Research, Kobe university of Commerce, August 1999.