

無限遠に 2 個の素点を持つ、平面代数曲線について。

杉江 徹 (阪大理)

宮西 正宜 (阪大理)

以下、 k は標数 0 の代数的閉体とする。
 f を、 k 係数の、二変数 X, Y の多項式とすると、Abhyankar-Moh [1] によって、次の定理が証明された。

定理 $f=0$ によって定義される、 $A_k^2 = \text{Spec } k[X, Y]$ 上の curve が、 A_k^1 に同型であれば、 A_k^2 の座標を適当にとりかえて、 $C = \{f=0\}$ を、 X 軸に選ぶことができる。

さて、 C には、 $f=0$ によって定義される A_k^2 上の curve が、 $G_m = \text{Spec } k[X, X^{-1}]$ に同型になる場合を考える。すなわち 次の定理を証明するのが目標である。

定理 f を、 X, Y = 変数の、 k 係数の多項式とし、 $\lambda \in k$ に対し、 C_λ を $f=\lambda$ によって定義される、 A_k^2 上の curve とする。

A_k^2 の座標を適当にとりかえて、 f が、

$$f = c(X^d Y^e - 1) \quad (d, e) = 1, \quad c \in k^*$$

と表わせるためには、次の 2 条件が成り立つ
ことが必要十分である。

1) A^2 上の pencil $\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の general member

は G_m に同型。特に curve $\{f=0\}$ は G_m に同型。

2) $\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ のすべての member は connected."

一般に $f=0$ が G_m に同型でも $\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の
general member は G_m に同型には限ら
ない。(例 $f = X^2 Y^2 + 2XY^2 + Y^2 + 2XY + 1$)

また $\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の general member が G_m に同型
であっても $\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ のすべての member が
連結であるとは限らない。

$$(\text{例}) \quad f = Y(XY + 1) + 1$$

$\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ が連結でない member を含む場合、
及び定理の解析的証明について H. Saitō [4]
を参照。

§ 1. pencil についての補題.

この § で、以下に必要な pencil についての補題を、いくつか示しておく。

V を k 上定義されている non-singular な proj. surface, Λ を V の上の 既約 な linear pencil と general member は rational curve とし、 B を Λ の ordinary base pt. 全体 とする。即ち、infinitely near base pt. は 含めない、また、 B の各点 は Λ の general member の one place pt. とする。

Δ を Λ の red. member とし、 Δ が $\Delta = \sum_{i=1}^r n_i D_i$ と表わされているとする。

“定義” 次の条件が、みたされる時、 Λ の red. member Δ を linear と定義する。

- (i) $D_i \subset \mathbb{P}_k^1$
- (ii) 相異なる i, j に対し、 (D_i, D_j) は 0 か 1。
- (iii) i, j, k が互いに相異なるとき、 D_i, D_j, D_k は、一点で交わらない。
- (iv) Δ の weighted graph は linear chain である。(cyclic chain を含まない。)

✕

以上の仮定の下に、次の補題が成り立つ。

"Lemma 1"

Δ を Λ の red member とする。もし $D_i \cap B \neq \emptyset$ とする Δ の任意の component D_i に対し、 $(D_i^2) \leq -1$ であれば、 Δ は $D_j \cap B = \emptyset$ とする exceptional component (第一種例外曲線) を含む。

"Lemma 2"

D_0 を Λ の linear red member とし、 Δ は $\Delta = \sum_{i=0}^r n_i D_i$ ($n_i > 0$) と表わされているとする。ここで、次の三つの条件を仮定する。

(i) $D_0 \cap B = \{P\}$, P は D_i ($i \neq 0$) に含まれない。

(ii) $(D_0^2) = p > 0$.

D_0 は Δ の terminal component ではない。(i.e. $\text{Supp}(\Delta)$ の $\neq \emptyset$ 以上の component が D_0 と交わる。)

(iii) $(D_i^2) < 0$ ($1 \leq i \leq r$)

特に、 $D_i \cap B = \emptyset$ であれば $(D_i^2) < -1$ 。

以上のことを仮定すると Δ における D_0 の

multiplicity $n_0 = 1$, $(C, D_0) = p+1$.

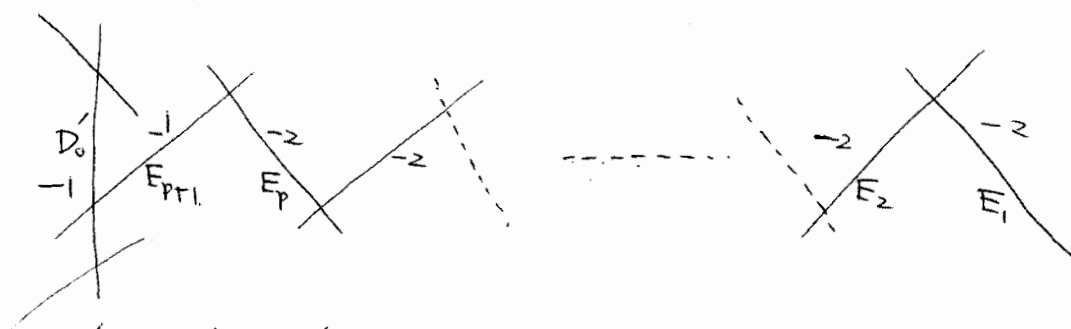
Proof.)

$C \in \Lambda$ の general member とし.

$e = (C, D_0) = i(C, D_0; P)$ とおく。

$P_0 = P$, $P_1, \dots, P_p \in P$ の infinitely near pt of D_0 の上の点とする。

但し P_i は P_{i-1} の infinitely near pt of order one である。 $\sigma: V' \rightarrow V$ を $P_0, P_1, \dots, P_p \in$ center とする blowing up の composition とする。 $\sigma^{-1}(\text{Supp } \Delta)$ の configuration は次の図のようになる。



Λ', C', D'_0 は Λ, C, D_0 の proper transform. Δ' は Δ に対応する Λ' の member とし, E_i ($1 \leq i \leq p+1$) は P_{i-1} を blowing up した時に出てくる excep. curve の proper transform とする。

もし C' が E_{p+1} と交わらなければ, E_{p+1} は明ら

かに Δ' の component になる。そこで D_0 を contract すれば Δ' の $\equiv$ 本の component が一点で交わる二つになつて、矛盾である。よつて C' は E_{p+1} と交わる。同様に lemma 1 を使つて E_{p+1} は Δ', C' 以外の component でもないことがわかり、 E_{p+1} は Λ' の quasi-section になる。 Λ の base pt P は Λ の general member の one place pt であるとして仮定しているから $n_0 = (D_0', E_{p+1}) = 1$

Q. E. D.

以下 $\Delta \in \Lambda$ の linear reducible member Δ を $w.g.$ 以下のように与えられていると仮定する。

$$G \xrightarrow[p]{D_1} M \xrightarrow[q]{D_2} H$$

但し $p = (D_1^2)$, $q = (D_2^2)$, D_1, D_2 の Δ における multiplicity を n_1, n_2 とする。また G, M, H の $w.g.$ は 以下のようにする。

$$G: \underbrace{\overset{-2}{\circ} \cdots \overset{-2}{\circ}}_{\alpha_1 - 1} \xrightarrow{-(d_2+2)} \underbrace{\overset{-2}{\circ} \cdots \overset{-2}{\circ}}_{\alpha_3 - 1} \xrightarrow{-(d_{2r-2}+2)} \underbrace{\overset{-2}{\circ} \cdots \overset{-2}{\circ}}_{\alpha_{2r-1} - 1}$$

7

$$M: \begin{array}{ccccccc} -(\beta_1+1) & -2 & -2 & -(\beta_2+2) & -2 & -2 & -(\beta_{2s-1}+2) & -2 & -2 & -(\beta_{2s}+1) \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \beta_2-1 & & & & & & & & \beta_{2s}-1 & \end{array}$$

$$H: \begin{array}{ccccccc} -(\gamma_1+1) & -2 & -2 & -(\gamma_2+2) & -2 & -2 & -(\gamma_{2t-1}+2) & -2 & -2 & -(\gamma_{2t}+1) \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \gamma_2-1 & & & & & & \gamma_{2t-1}-1 & & \gamma_{2t}-1 & \end{array}$$

Lemma 2 を使って、次の二つの補題を証明できる。

"Lemma 3"

$B = \{P_1, P_2\}$ $P_i \in D_i$ ($i=1, 2$). かつ P_i は Δ の D_i 以外の component には含まれていないとする。また $n_1 \neq 1$, $n_2 \neq 1$, かつ $p \leq 0$ か $q \leq 0$ のいずれかが成り立つと仮定する。すると次の事が成り立つ。

(1) $p \geq 0$ かつ $q \leq 0$ ならば $q \geq 0$

以下 $q \geq 0$, $p \leq 0$ と仮定する。

(2) $p < 0$ かつ $q \geq 0$ とすると $H = \emptyset$

(3) $p = 0$, $q \geq 0$ とすると $G = \emptyset$ 或 $H = \emptyset$."

"Lemma 4"

$B = \{P_2\}$, $P_2 \in D_2$, P_2 は Δ の D_2 以外の component には含まれていないとし、 $n_2 \neq 1$ と仮定する。すると次の事が成り立つ。

- (1) $p < 0$
- (2) $p \leq -2$ とすると $q \geq 0$, $H = \phi$
- (3) $p = -1$ とすると $H = \phi$ か. 又は V から non-singular projective surface W への contraction $\phi: V \rightarrow W$ が存在し, $P_+ \wedge$ は $P_+(C)$ と $P_+(\Delta)$ によって張られる. 但し $P_+(\Delta)$ は 次のような W の g をもつ.

$$\begin{array}{c} q' \\ \text{---} \\ P(D_2) \end{array} \vdash 1$$

H は 上と同じ W の g をし, $q' = q+1$. 又は $q' = q + d_1 + 1$.

§ 2. Change of embedding $A_k^2 \hookrightarrow P_k^2$

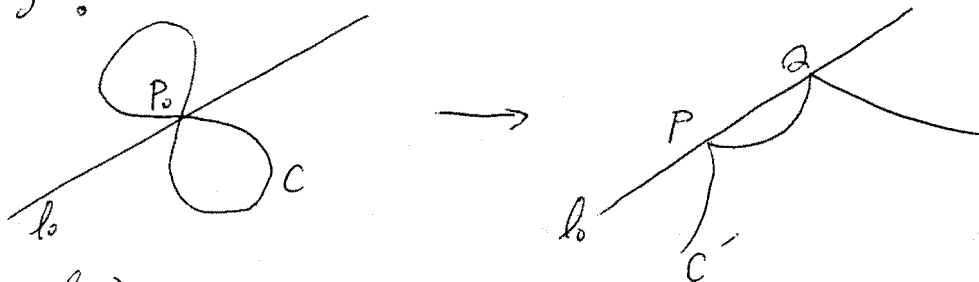
以後 定理の条件を仮定する. 即ち f を 各係数の二変数の多項式, $\forall t \in k$ に対し C_t を $f = \alpha$ によって定義される A_k^2 上の curve とすると 次の二条件が成り立っていると仮定する.

- 1) A_k^2 上の pencil $\{C_t\}_{t \in k}$ の general member は G_m に同型.
- 2) $\{C_t\}_{t \in k}$ のすべての member は 連結.

A^2 の $\mathbb{P}^2$ への embedding $\tau: A^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ を一つ fix し, A^2 を $\mathbb{P}^2$ の subset と identify して考える. $l_0 = \mathbb{P}^2 - A^2$ とおく. C_0 を $\{C_t\}_{t \in \mathbb{A}^1}$ の general member とし, C_0 の $\mathbb{P}^2$ における closure を C とする.

"Lemma 5"

いま, もし $C \cap l_0 = \{ \text{一点 } P_0 \}$ (集合として) とすると, ある $\mathbb{P}^2$ の birational transformation ρ が存在して, ρ の A^2 への restriction は A^2 の automorphism を induce し, $C' = \rho(C)$ を C の proper transform とすると, $C' \cap l_0 = \{ \text{二点} \}$ となる.



Proof).

$d = (C, l_0)$, $\mu = \text{mult}_{P_0} C$, $\Lambda = \langle C, dl_0 \rangle \in C$ と dl_0 によって張られる $\mathbb{P}^2$ 上の linear pencil, $V_0 = \mathbb{P}^2$, $\sigma_1: V_1 \rightarrow V_0$ は P_0 の blowing up, $l_0^{(1)} = \sigma_1^*(l_0)$, $l_1 = \sigma_1^{-1}(P_0)$, $C^{(1)} = \sigma_1^*(C)$, $\Lambda^{(1)} \in \Lambda$ の σ_1 による.

proper transform と $K' < \dots$

まず $d > \mu$ が成り立つ。

(I). $C''' \cap l_1 = \{P_1, P_1'\}, P_1 \neq P_1'$

$P_1 = l_0'' \cap l_1$ とするが、

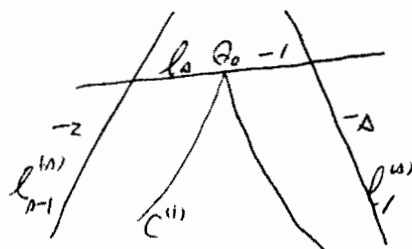
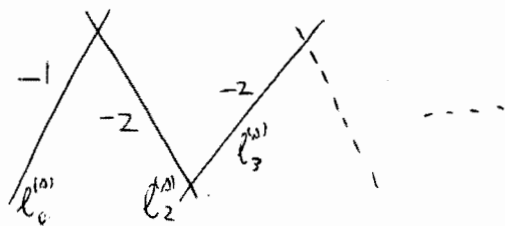
又は $\beta \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ が存在

して $\beta|_{\mathbb{A}^2} \in \text{Aut}(\mathbb{A}^2)$, かつ $C' = \beta(C)$ とおくと

$(C', l_0) = d' < d$ が成り立つ。

(I) の略証)

$C''' \cap l_1 = \{P_1\}$ と仮定すると、まず $d > \mu$ より、 $P_1 = l_0'' \cap l_1$ 。ここを $z^1, \sigma; V_S \rightarrow V_1$ と点 $P_1, P_2, \dots, P_{s-1}$ を center とする blowing up の composition と定義する。但し、 P_i は P_{i-1} の infinitely near pt で、 l_1 の z^i 上の点 ($2 \leq i \leq s$), s は $C^{(s)} = \sigma^s(C)$ が P_s となる最小の自然数とする。 $\sigma^{-1}(l_0'' \cup l_1)$ は、次のような configuration E もつ。



S の決め方と Lemma 1 を使って、次のことがわかる。

- $C^{(s)} \cap \ell_i^{(s)} = \emptyset$ ($0 \leq i \leq s-1$)
- $\text{mult}_{P_i} C^{(s)} = \mu_i$ とおくと, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{s-1}$,
 $\mu = (s-1)\mu_1$.
- $C^{(s)} \cap \ell_s = \{\text{一点 } Q_0\}$. (集合として.)

次に, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{s-1}$ なる blowing up の列を次のように定義する。

まず, τ_1 を Q_0 の blowing up

とし, $C^{(s+1)} = \tau_1^*(C^{(s)})$, $E_1 = \tau_1^{-1}(Q_0)$

等とおくと、次の事が、

成り立つ。

- $C^{(s+1)} \cap \ell_s^{(s+1)} = \emptyset$, $C^{(s+1)} \cap E_1 = \{\text{一点 } Q_1\}$
- $(C^{(s+1)}, E_1) = \text{mult}_{Q_0} C^{(s)} = (\ell_s, C^{(s)}) = \mu_1$

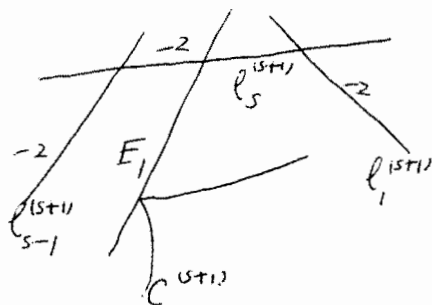
以下, τ_i ($1 \leq i \leq s-2$) まで同様に定義されて

いるとすると、やはり次の事が成り立つ。

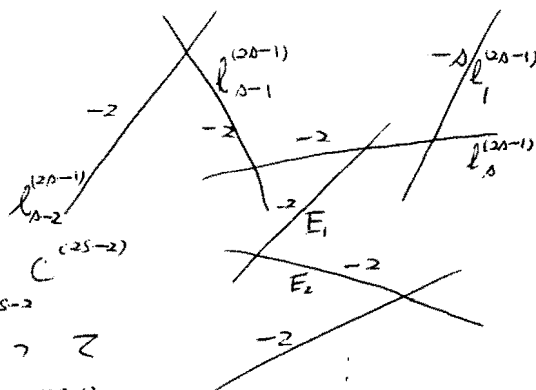
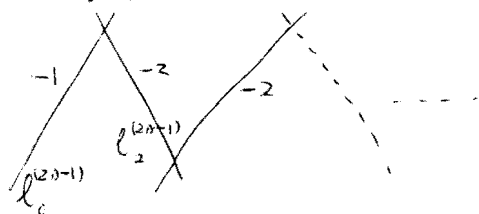
- $C^{(s+i)} \cap E_{i-1}^{(s+i)} = \emptyset$, $C^{(s+i)} \cap E_i = \{\text{一点 } Q_i\}$
- $(C^{(s+i)}, E_i) = \text{mult}_{Q_{i-1}} C^{(s+i-1)} = (C^{(s+i-1)}, E_{i-1}) = \mu_1$

そこで, τ_{i+1} を Q_i の blowing up とする。

$\tau = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{s-1}$ とおくと, $(\sigma, \tau)^{-1}(\ell_0 \cup C)$ の



configuration は次のようになる。



$$\begin{aligned} \text{すなわち } (C^{(2s-1)}, E_{s-1}^{(2s-1)}) &= \text{mult}_{P_{s-2}} C^{(2s-1)} \\ &= (C^{(2s-2)}, E_{s-2}^{(2s-2)}) = \mu_1 \text{ であり } \overline{C} \text{ として} \end{aligned}$$

いふ。 $\overline{C} = \overline{C}'$, $\overline{C} = \overline{C}''$, $l_0^{(2s-1)}$,

$l_2^{(2s-1)}, \dots, l_s^{(2s-1)}, E_1^{(2s-1)}, \dots, E_{s-2}^{(2s-1)}, l_1, \overline{C}$

は n 個の contract である。 contraction

を $\alpha: V^{(2s-1)} \rightarrow W$; $\beta = \alpha \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ とおく。 β の A^2 への restriction は A^2 の automorphism を induce する。

また $W - \alpha(E_{s-1}^{(2s-1)}) = A^2$, $(\alpha(E_{s-1}^{(2s-1)}))^2 = 1$ であるから

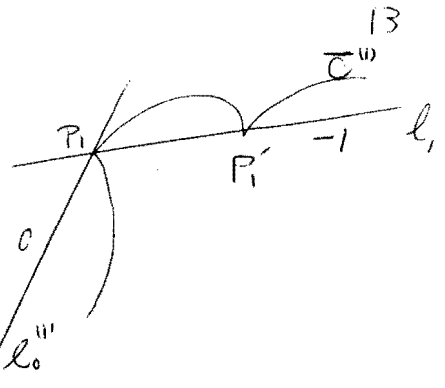
$W = \mathbb{P}^2$ になる。即ち $\beta \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ 。 $C' = \beta'(C)$ とおくと, $(C, l_0) = \mu_1 = \frac{\mu}{s-1} < d$ となり、(I) が証明された。

すなわち $\overline{C} = \overline{C}'$ 。 $(C, l_0) = d$ に関する induction による結局、ある $\mathbb{P}^2$ の birational transformation

P_1 が存在し、 $P_1|_{A^2} \in \text{Aut}(A^2)$ であり、 $P_1'(C) = \overline{C}$ とおいて $\overline{C}$ に対して上と同様に $\overline{C}''$ を考えると

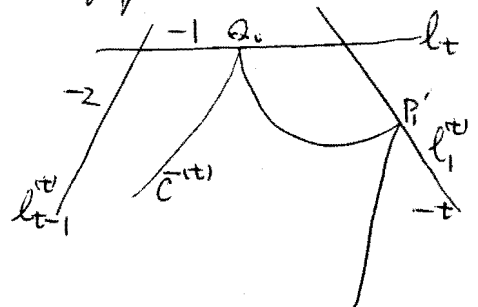
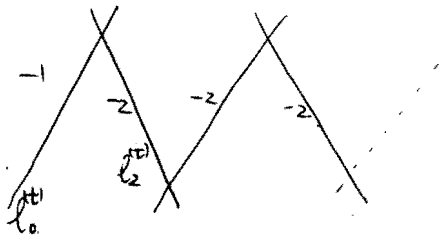
$\overline{C}''$ は l_1 と異なる 2 点 P_1, P_1' で交わることを示した。 ($P_1 = l_0'' \cap l_1$ とおく。)

$P_1, \dots, P_{t-1} \in P_t$ の infinitely
 near pt z l_1 の上の点,
 但し P_i は P_{i-1} の infinitely
 near pt of order one ($2 \leq i \leq t-1$) l_0'''



とする。 $\sigma_i \in P_{i-1}$ の blowing up とし、 $\sigma \in \sigma_2$
 $\sigma_3, \dots, \sigma_t$ の合成 $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \dots \circ \sigma_t$ とおく。 また
 t は $C^{(t)} = \sigma^{-1}(C''')$ が $P_t = l_1^{(t)} \cap l_t$ と交る 最小
 の整数とする。

$\sigma^{-1}(l_0''' \cup l_1 \cup C''')$ は 次の configuration をもつ。



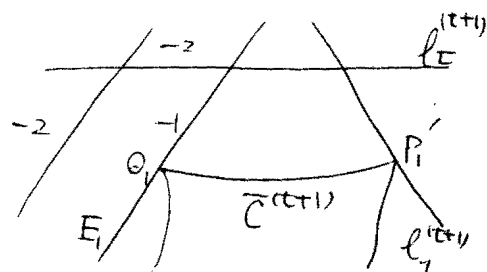
t の選び方と, Lemma 1 及び $C^{(t)}$ が $\sigma^{-1}(l_0''' \cup l_1)$ の
 上に two place を持つことから 次の事が成
 り立つ。

- (1) $C^{(t)} \cap l_t = \{ \text{一点} \}$, これを Q_0 とおく。
- (2) $Q_0 \notin l_{t-1}, l_1^{(t)}$

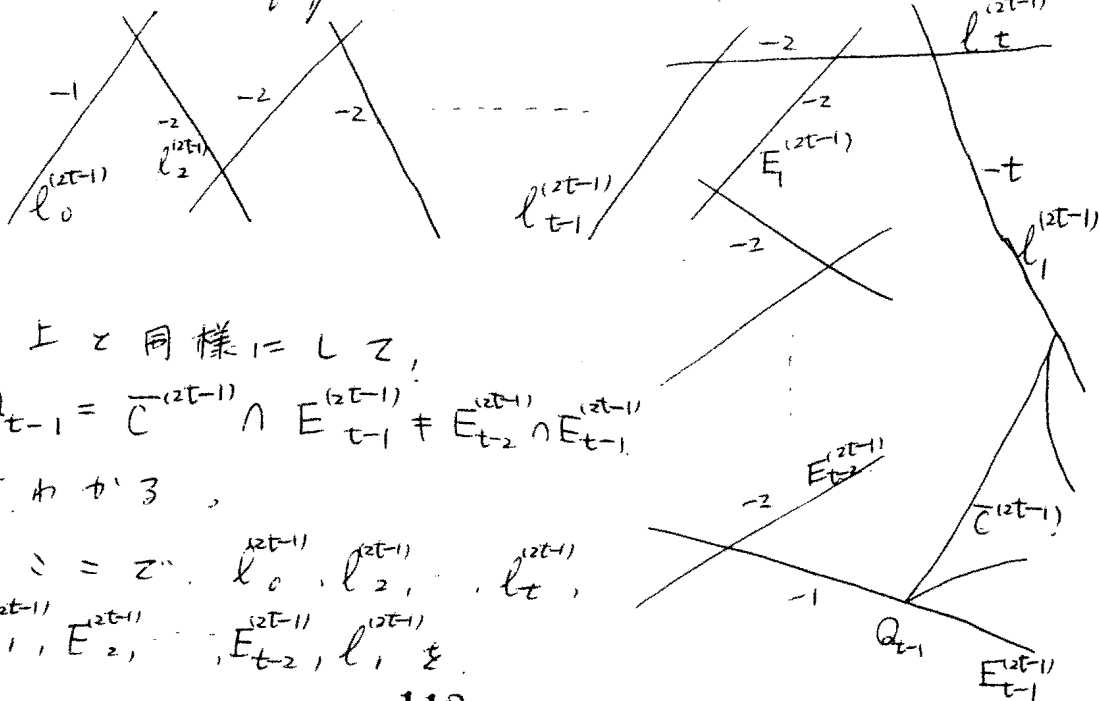
= = = 再び blowing up の sequence τ_1, τ_2
 $\dots, \tau_s$ を 次のように定義する。まず、

$z_1: V_{t+1} \rightarrow V_t$ を Q_0 の blowing up とする Lemma 1 を使って $Q_1 = E_1 \cap \overline{C}^{(t+1)} \neq \emptyset$ がわかる。

$z_2: V_{t+2} \rightarrow V_{t+1}$ を Q_1 の blowing up と定義する。



以下 同様にして $z_i: V_{t+i} \rightarrow V_{t+i-1}$ ($1 \leq i \leq t-2$) を定義すれば E とする。やはり Lemma 1 を使って $Q_i = E_i \cap \overline{C}^{(t+i)} \neq \emptyset$ がわかる。そこで $z_{t+1}: V_{t+t+1} \rightarrow V_{t+t}$ を Q_t の blowing up と定義する。 $z = z_1, \dots, z_{t+1}$ とおくと $(\sigma_1, \sigma \circ z)^{-1}(\text{bl } \overline{C})$ は次の configuration をもつ。



上と同様にして $Q_{t-1} = \overline{C}^{(2t-1)} \cap E_{t-1}^{(2t-1)} \neq \emptyset$ がわかる。

$z = z_1, \dots, z_{t+1}$ とおくと $(\sigma_1, \sigma \circ z)^{-1}(\text{bl } \overline{C})$ は次の configuration をもつ。

この順に contract し、この contraction を $\gamma: V_{2t-1} \rightarrow Z$ とする。 $Z = \gamma(E_{t-1}^{(2t-1)}) = \mathbb{A}^2$ 故、
 $Z = \mathbb{P}^2$ に移る。従って $\rho_1 = \gamma \circ \sigma_1^{-1} \circ \sigma_1^{-1}$ とおくと
 $\rho_1 \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ で、 $\rho_1|_{\mathbb{A}^2}$ は $\mathbb{A}^2$ の automorphism に移る。
 $\rho_1(C) = C'$ とすると $C' \cap l_0 = \{\text{two distinct pts}\}$
 と移る。よって $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$ とおけばよい。

Q.E.D.

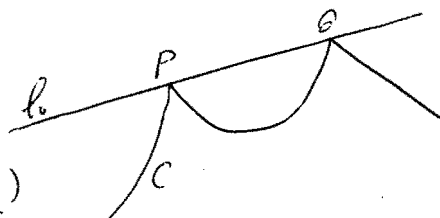
§3 定理の証明

Lemma 5 によって、 C と無限遠直線 l_0 が相異なる 2 点で交わるような embedding $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ が存在することが証明された。以後、そのような embedding を一つ固定して考える。但し、ここで C は $\{C_t\}_{t \in k}$ の general member C の $\mathbb{P}^2$ における closure である。

$$C \cap l_0 = \{P, Q\}$$

$$d_0 = i(C, l_0; P), \quad e_0 = i(C, l_0, Q)$$

$\Lambda = \langle C, (d_0 + e_0)l_0 \rangle$ とおく。一般に、 $d_0 \leq e_0$ と仮定しておいてよい。



"Lemma 6".

$d_0 = \text{mult}_P C$, $e_0 = \text{mult}_Q C$ か。成り立つ。

Proof 1.

$\text{mult}_P C = \mu$, $\text{mult}_Q C = \nu$ とおく。 $P, Q \in$ blowing up C , h a proper transform $\in C''$, l_0'' , exceptional curve $\in E_1, F_1$ とする。すると,

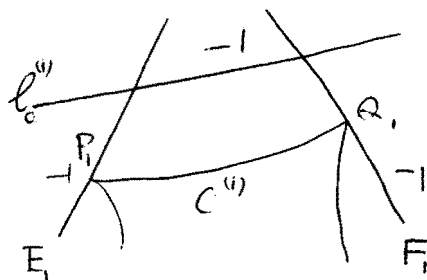
$$C'' \sim (d_0 + e_0) l_0'' + (d_0 + e_0 - \mu) E_1 + (d_0 + e_0 - \nu) F_1$$

従って, E_1, F_1 は linear pencil Λ の proper transform の l_0'' と Λ の member の component に属する。

Lemma 1 から, $d_0 = \mu$, $e_0 = \nu$ であることがわかる。

Q.E.D.

$\Sigma = \Sigma'$, $P_1 = C''' \cap E_1$,
 $Q_1 = C''' \cap F_1$, $\mu_1 = \text{mult}_{P_1} C'''$,
 $\nu_1 = \text{mult}_{Q_1} C'''$ とおく。同いようにして、次の事がわかる。



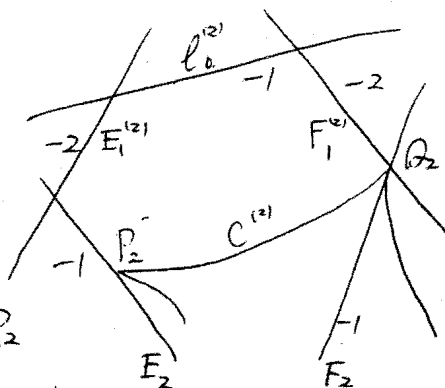
"Lemma 7"

$d_0 = 1$, or $e_0 > d_0 = \mu_1 \geq \nu_1$ が成り立つ。

以下, $d_0 = 1$ の case は 同様にして より簡

単に証明できるの z 。 $c_0 > d_0 = H_1 \geq \nu_1$, $d_0 \neq 1$ の case を考える。

まず, P_1, Q_1 を blowing up
すると, 右の Γ の
configuration を得る。



そして, $P_2, P_3, \dots, P_{t+1}$ を P_2

の infinitely near pt z : $C^{(2)}$ の上の点,

値し P_i は P_{i-1} の order 1 の infinitely near pt と

し, 七巧板のように選ぶ。即ち $\text{mult}_{P_i} C^{(i)} = H_i$ と

1 になる, $d_0 = H_1 = H_2 = \dots = H_t > H_{t+1}$ をみたす。

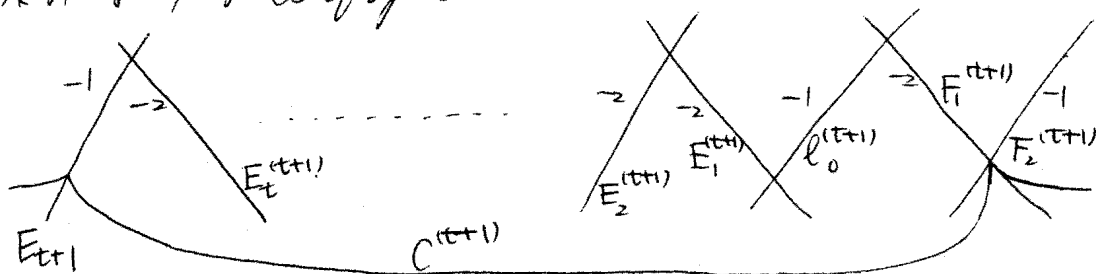
すると, 次の lemma が成り立つ。

"Lemma 8"

$$c_0 - t d_0 > 0$$

Proof)

$P_2, P_3, \dots, P_t$ を 順に blowing up していくと
次の Γ の configuration をもつことがわかる。



しかた。

$$C^{(t+1)} \sim (d_0 + e_0) l_0^{(t+1)} + d_0 F_1^{(t+1)} + (d_0 - 1) F_2^{(t+1)} + \sum_{i=1}^{t+1} (e_0 - i + 1) E_i^{(t+1)}$$

C は Λ の general member として 113 から、

$e_0 - td_0 \geq 0$ であるか。いま $e_0 - td_0 = 0$ と仮定する。 Λ' は linear pencil Λ の proper transform とすると、 E_{t+1} は Λ' の quasi-section になるか。 Λ' の general member から E_{t+1} の E は one place pt と $e_0 = 1$ となるから、 $(C^{(t+1)}, E_{t+1}) = 1 = \mu_t = d_0 = 1$ となる。 $d_0 > 1$ と仮定していることは矛盾する。よって $e_0 - td_0 > 0$ である。

LG, E, D

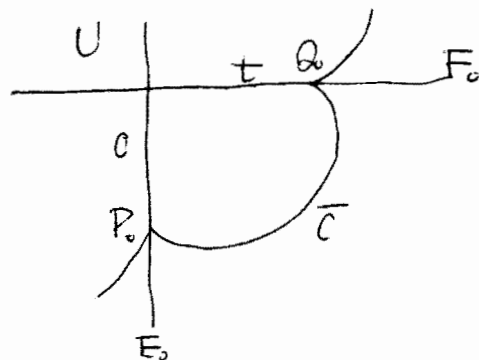
Lemma 8 の configuration π : $F_2^{(t+1)}, l_0^{(t+1)}, E_1^{(t+1)}, E_2^{(t+1)}, \dots, E_t^{(t+1)}$, π の直に contract する。得られる surface πU , Λ の proper transform $\pi \Lambda$ とおく。次の事が成り立っている。

(1) $\pi \Lambda = \langle \bar{C}, d_0 F_0 + (e_0 - td_0) E_0 \rangle$
 $e_0 - td_0 > 0$

(2) $(E_0)^2 = 0$, $(F_0)^2 = 0$, $(E_0, F_0) = 1$

(3) $(\bar{C}, E_0) = d_0 P_0$, $(\bar{C}, F_0) = e_0 Q_0$

$P_0 \neq F_0$, $Q_0 \neq E_0$



$$\begin{aligned}
 (4) \quad d_1 &= \text{mult}_{P_0} \bar{c} = \mu_{t+1} < d_0 \\
 e_1 &= \text{mult}_{Q_0} \bar{c} = \nu_1 < e_0 \\
 e_0 &> d_0 > e_1.
 \end{aligned}$$

$\bar{c} = z$. $(d_0, d_1), (e_0, e_1)$ のそれぞれへの pair について、ユークリッド互除法を行おう。

$$d_0 = p_1 d_1 + d_2 \quad 0 < d_2 < d_1$$

$$d_1 = p_2 d_2 + d_3 \quad 0 < d_3 < d_2$$

$$\dots$$

$$d_{m-2} = p_{m-1} d_{m-1} + d_m \quad 0 < d_m < d_{m-1}$$

$$d_{m-1} = p_m d_m \quad 1 < p_m.$$

$$e_0 = q_1 e_1 + e_2 \quad 0 < e_2 < e_1$$

$$e_1 = q_2 e_2 + e_3 \quad 0 < e_3 < e_2$$

$$\dots$$

$$e_{n-2} = q_{n-1} e_{n-1} + e_n \quad 0 < e_n < e_{n-1}$$

$$e_{n-1} = q_n e_n \quad 1 < q_n.$$

次に $a_i, a(i; \gamma), b_i, b(i; \gamma)$ を inductive に次のように定義する。

$$a_0 = c_0 - t d_0$$

$$a(1, j) = j(a_0 - d_1) \quad (1 \leq j \leq p_1)$$

$$a(2, j) = a_0 + j(a(1, p_1) - d_2) \quad (1 \leq j \leq p_2)$$

$$a(i, j) = a(i-2, p_{i-2}) + j(a(i-1, p_{i-1}) - d_i) \quad (1 \leq j \leq p_i)$$

$$b_0 = d_0$$

$$b(1, j) = j(b_0 - e_1) \quad (1 \leq j \leq q_1)$$

$$b(2, j) = b_0 + j(b(1, q_1) - e_2) \quad (1 \leq j \leq q_2)$$

$$b(i, j) = b(i-2, q_{i-2}) + j(b(i-1, q_{i-1}) - e_i) \quad (1 \leq j \leq q_i)$$

$\Sigma = \Sigma'$ かつ P_0 の infinitely near pt で $\bar{C}$ の上の点を $p_1 + p_2 + \dots + p_m$ 回 blowing up する。次いで Q_0 の infinitely near pt で $\bar{C}$ の上にある点を $q_1 + q_2 + \dots + q_n$ 回 blowing up する。得られ F : blowing up の composition と $\rho: W \rightarrow U$ とする。 $\rho^{-1}(E_0 \cup F_0)$ の W 上は次のようになる。但し E_0, F_0 の proper transform を 同じ記号 E_0, F_0 で表わしてある。

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \underset{E_0}{\circ} \xrightarrow{\beta} \underset{F_0}{\circ} \rightarrow \mathcal{F}$$

$\mathcal{E}$ の $w.g$ は 次のページのようにする。 $\mathcal{F}$ の $w.g$ も同様である。すなわち α, β は

$$\alpha = -(r_i + 1) \quad \text{if } m > 1$$

$$\alpha = -r_i \quad \text{if } m = 1$$

$$\beta = t - (q_i + 1) \quad \text{if } n > 1$$

$$\beta = t - q_i \quad \text{if } n = 1$$

$\tilde{\Lambda}$ の ρ による proper transform を $\tilde{\Lambda}$ とする。
単純な計算によって W の上で

$$C \sim a_0 E_0 + b_0 F_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} a(i, j) E(i, j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{q_i} b(i, j) F(i, j)$$

が成り立つことがわかる。

$\tilde{C}$ は $\tilde{\Lambda}$ の general member 故, $a(i, j) \geq 0, b(i, j) \geq 0$ 。
上の式の右辺を $\tilde{\Delta}$ とおく。すなわち、一般に上の
ような blowing up の composition を Euclidean
transformation と呼ぶ。これは、
Miyazaki [3] を参照。

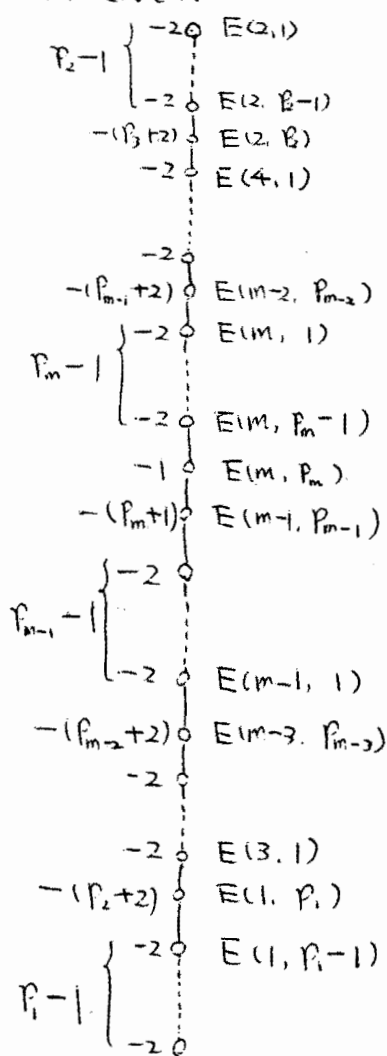
"Lemma 9"

$$a(m, p_m) d_m = d_0 \cdot a(1, 1), \quad b(n, q_n) e_n = e_0 \cdot b(1, 1)$$

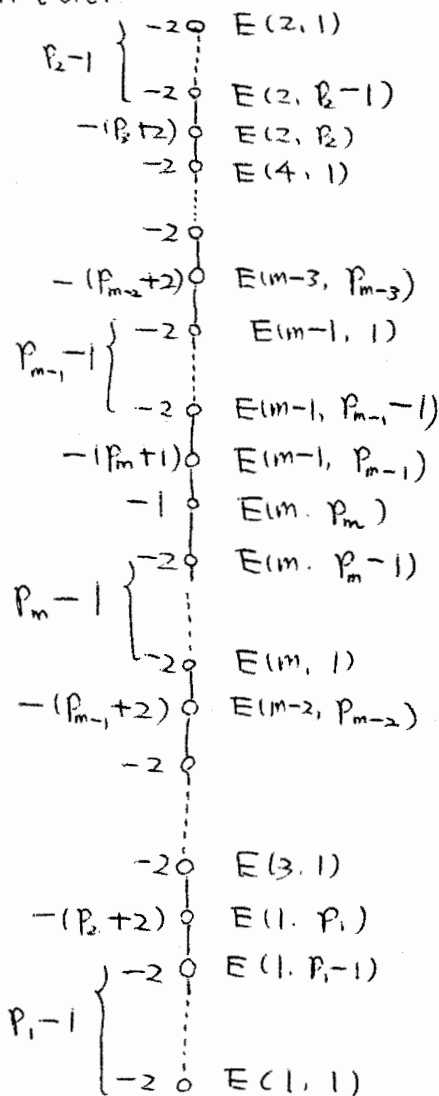
$$a(m, p_m) \neq 1, \quad b(n, q_n) \neq 1$$

The weighted graph of E

(1) m : even



(2) n : odd



$E(2, 1)$ から E_0 と結ぶのさ。

C' は $E(m, P_m)$ と交わること、他の component とは交わらない。
 $(C', E(m, P_m)) = d_m$

"Lemma 10"

$$a(1,1)=0, \quad b(1,1)=0$$

従って, $a(m, p_m)=0, \quad b(n, q_n)=0$ となり.

$E(m, p_m), F(n, q_n)$ は $\tilde{\Lambda}$ の quasi-section になる.

(Proof)

$a(1,1)>0, \quad b(1,1)>0$ と仮定する。まず 次のことを示す。

$$(1) \quad a(i,j)>0, \quad \forall(i,j) \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq p_i$$

$$b(i,j)>0, \quad \forall(i,j) \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq q_i$$

$$(2) \quad a(m, p_m) \neq 1, \quad b(n, q_n) \neq 1$$

(3) B を $\tilde{\Lambda}$ の base pt の集合とすると

$$B = \{\tilde{P}, \tilde{Q}\} \quad \text{但し} \quad \tilde{P} = \tilde{C} \cap E(m, p_m), \quad \tilde{Q} = \tilde{C} \cap F(n, q_n)$$

で $\tilde{P}, \tilde{Q}$ はそれぞれ $E(m, p_m), F(n, q_n)$ 以外

の $\tilde{\Delta}$ の component に属さない。

Lemma 1 より F_0 は exceptional component ではない。従って $F_0, F(2,1), \dots, F(2, q_2-1)$ は contract (contraction を τ_1 とする。 $(\tau_1(E_0))^2 = -(p_1+1)$ $\tau_1(F(2, q_2))^2 = -(q_2+1)$ 。従って $\tau_1(E_0)$ は exceptional component ではない。 $\tau_1(E_0), \tau_1(E(2,1)), \tau_1(E(2,2)), \dots, \tau_1(E(2, p_2-1))$ は contract する。

contraction を z_2 とする と $(z_2 \cdot z_1(F(z_2, q_2)))^2 = p_2 - (q_2 + 1)$
 $(z_2 \cdot z_1(E(z_2, p_2)))^2 = -(p_2 + 1)$. よって $z_2 \cdot z_1(F(z_2, q_2))$ が
 exceptional comp でなければならぬ。以下
 contraction を繰り返して $E(m, p_m)$ と $F(n, q_n)$ の
 間にある curve で $E(m, p_m), F(n, q_n)$ 以外の
 exceptional comp を contract できる限り contract
 する。この contraction の composition を $\tau: W \rightarrow Z$
 とする。 $\tau(\Delta)$ の w, q は次のようになる。

$$G \xrightarrow[p_0]{p_0} M \xrightarrow[q_0]{q_0} H$$

$E(m, p_m) \qquad F(n, q_n)$

もし $p \leq 0$ または $q \leq 0$. 何故やら、 p
 $p > 0, q > 0$ とすると $M = \emptyset$ でなければなら
 ない。よって $\tau = 3$ が contraction で $\tau = 2$ は m, n
 even の時 $E(m, p_{m-1}), F(n, q_{n-1})$ の いずれか一方
 が最後に contract されていく、 $F(n, q_{n-1})$ が
 最後に contract されていくと $q = 0$ となっ
 て矛盾を生じる。よって $p \leq 0$ または $q \leq 0$.
 以上で、Lemma 3 の条件をみたす situation を
 得た。よって Lemma 3 により $G = \emptyset$ または
 $H = \emptyset$ でなければいけない。これは明らかに

矛盾。よって $a(1,1)=0$ 。また $b(1,1)=0$;
 以下 $b \neq 0$ とする。 $a(1,1)=0$, $b(1,1) > 0$ とすると,
 Lemma 3, 4 を使って, 矛盾を得る。従って
 結局 $a(1,1)=0$, $b(1,1)=0$ とする。 □

以上で, linear pencil $\tilde{\Lambda}$ は, base pt ε もつ
 ていいこと, および $\tilde{\Lambda}$ の general member が
 $E(m, p_m)$, $F(n, q_n)$ の上に one place pt ε もつ事
 から $E(m, p_m)$, $F(n, q_n)$ が $\tilde{\Lambda}$ の section になっ
 ていることがわかった。

φ を linear pencil $\tilde{\Lambda}$ に associate する morphism
 $\varphi: W \rightarrow \mathbb{P}^1$ とする。今までの construction から
 $W - (E_0 \cup F_0 \cup (\cup E(i, j)) \cup (\cup F(i, j))) = X \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$
 は明らかである。

"Lemma 11".

上に定義した fibration φ は, $\varphi^{-1}(Q) \cap X$ が
 reducible になる fibre を唯一つもつ。しかも
 $\varphi^{-1}(Q) \cap X$ は, 2本の irreducible component から
 なる。

Proof

$Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{P}_k^1$ を, $\varphi^{-1}(Q_i) \cap X$ が *reducible* になる点全体とし, $\varphi^{-1}(Q_i) \cap X$ の *irreducible component* の数を n_i とする。 $Q_{s+1}, \dots, Q_t \in \mathbb{P}^1$ を, $\varphi^{-1}(Q_i)$ が *reducible* になるか, $\varphi^{-1}(Q_i) \cap U$ が *irred* になる点全体, $Q_{\infty} = \varphi(\tilde{\Delta})$ とおく。 $\varphi^{-1}(Q_1), \dots, \varphi^{-1}(Q_{\infty})$ が, φ の *reducible fibre* 全体である。 $X = (\bigcup_{i=1}^t \varphi^{-1}(Q_i) \cap X) = \text{Spec } B$ とおくと, B^*/k^* は *rank* が $n_1 + \dots + n_s + (t-s)$ の *free* $\mathbb{Z}$ module になる。 他方

$\varphi|_{\varphi^{-1}(\mathbb{P}_k^1 - \{Q_1, \dots, Q_t, Q_{\infty}\})}: \varphi^{-1}(\mathbb{P}_k^1 - \{Q_1, \dots, Q_t, Q_{\infty}\}) \rightarrow \mathbb{P}_k^1 - \{Q_1, \dots, Q_t, Q_{\infty}\}$ は $\mathbb{P}^1$ bundle である。

$$\begin{aligned} \text{Spec } B &= \varphi^{-1}(\mathbb{P}_k^1 - \{Q_1, \dots, Q_t, Q_{\infty}\}) = (E(m, p_m) \cup F(n, q_n)) \\ &= A_* \times \{\mathbb{P}_k^1 - \{Q_1, \dots, Q_t, Q_{\infty}\}\} \end{aligned}$$

よって B^*/k^* は *rank* が $1+t$ の *free* $\mathbb{Z}$ module になる。 よって $n_1 + n_2 + \dots + n_s + (t-s) = 1+t$ である。 $n_i \geq 2$ であるから $s = 1$, $n_1 = 2$ 。

12 E D

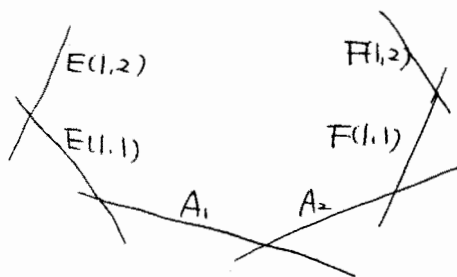
$\mathcal{E} = \mathbb{Z}^n$, $E(1, 1)$, $E(1, 2)$, $\dots$ を含む $\tilde{\Lambda}$ の member を Γ_1 , $F(1, 1)$, $F(1, 2)$, $\dots$ を含む $\tilde{\Lambda}$ の member を Γ_2 とする。

$P_1 \neq P_2$ とすると P_1, P_2 のいずれか一方は $(\text{Supp } P_i) \cap X$ が irreducible になる。いま $(\text{Supp } P_1) \cap X$ が irred. であるとし X と交わる P_1 の component を A とする。 A は section $F(u, v)$ と交わるから P_1 の component としての multiplicity $= 1$ である。すると $\text{Supp } P_1$ は A 以外に exceptional curve of the first を含まねばならないから、これは矛盾である。よって $P_1 = P_2$ 。

$P = P_1 = P_2$ とおくと $(\text{Supp } P) \cap X$ は reducible である。何故から、もし $(\text{Supp } P) \cap X$ が irred. とすると Lemma 11 によって $\exists Q \in P$ が存在し $\varphi'(Q) = L_1 \cup L_2$ となる。 L_1, L_2 は無限遠に one place pt をもつ irred. non-singular rat curve で、一点で transversal に交わっているから L_1, L_2 をそれぞれ X 軸、 Y 軸に選ぶことができる。(Miyanishi [2] を参照。) しかも、 L_1, L_2 は section と交わるから multiplicity は 1 である。よって $\varphi'(Q) \cap X$ は $XY = 0$ によって定義される。 P の component で X と交わるものを A とすると $A \cap X$ は $XY - C = 0, C \in k$

によって、定義されることになり、pencil $\tilde{\Pi}$ の member P の complement としての A の multiplicity が 1 になってしまい、これは、前と同様、矛盾である。よって $(\text{Supp } P) \cap X$ は reducible。

$(\text{Supp } P) \cap X = A_1 \cup A_2$ とおくと、 A_1, A_2 は最初、仮定 (2) を使うと結局 $E(1,1), F(1,1)$ と交わり、しかも $(A_1, A_2) = 1$ であることがわかる。



よって A_1, A_2 を y 軸, x 軸に選ぶことができ、 A_1, A_2 の multiplicity をそれぞれ d, e とすると、 $P \cap X$ は $x^d y^e = 0$ によって定義される。 $P \cap X$ は最初に考えた、 $X = \mathbb{A}_k^2$ 上の pencil $\{C_t\}_{t \in k}$ の π -member であるから、その member $\{f=0\}$ は $f = c(x^d y^e - 1) = 0$ によって定義されることになった。但し、 $c \in k$ とする。 $(d, e) = 1$ は、明らか。

定理の証明了。

Remark. 実は L の d, e は最初の intersection multiplicity d, e と一致する $= e \cdot d$. 確か
3.

References

- [1] S. S. Abhyankar and T. T. Moh ; Embeddings of the line in the plane, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 276 (1975)
- [2] M. Miyanishi ; An algebraic characterization of the affine plane, *Journal of Mathematics of Kyoto University* Vol. 15. No. 1, 1975.
- [3] M. Miyanishi ; Analytic irreducibility of certain curves on a non-singular affine rational surfaces, *Proc. Internat. Sympos. on Algebraic Geometry, Kyoto, 1977*
- [4] M. Saito ; Fonctions entières qui se réduisent à certains polynômes (I), *Osaka Journal of Math.* 1972.