

乱流間欠性の対数安定分布理論について

気象研究所 毛利英明 (Hideaki Mouri)
Meteorological Research Institute

1. はじめに

慣性域や散逸域のスケールで乱流が間欠性を示すことは良く知られている. とくに Kolmogorov [1] の古典理論においては単位質量あたりのエネルギー散逸率 ε が空間的に一様であると仮定するのに対し, 現実の乱流におけるエネルギー散逸は小さな領域に集中している. こうした小スケール間欠性は長年にわたり研究されてきたが, 最終的な理解には現在も至っていない.

エネルギー散逸率 ε を記述する統計学的な理論を得ることは, 間欠性に関する研究の主要な目標である. とくに慣性域には特徴的なスケールが存在しないから, 域内のスケール r で粗視化したエネルギー散逸率 ε_r は普遍的な冪則に従うと考えられる:

$$\langle \varepsilon_r^m \rangle \propto r^{\tau_m}. \quad (1a)$$

ここで $\langle \cdot \rangle$ は空間平均. 散逸率 ε が常に正であることに対応し, 冪指数 τ_m は粗視化領域の次元 D について以下の不等式を充たす [2]:

$$\frac{d\tau_m}{dm} > -D \quad \text{at } m > 0. \quad (1b)$$

間欠性に関しては第 2 章で述べる条件のもと以下の漸近式も成立する [3]:

$$\frac{\tau_m}{m} \rightarrow -D \quad \text{as } m \rightarrow +\infty. \quad (1c)$$

エネルギー散逸率を記述する統計学的理論は, こうした制限との整合性に基づいて構成される. Kida [4] は慣性域で $\ln \varepsilon_r$ が加算について不変な安定分布 [5] に従うと考えた. この対数安定分布理論は $\ln \varepsilon_r$ の分布函数自体が自己相似性を示す点で興味深い. しかしながら不等式 (1b) とは整合していない.

対数安定分布と同じ自己相似性が Kolmogorov の古典理論 [1] つまり $\tau_m = 0$ においても成立する. この古典理論は不等式 (1b) とも整合している. 本研究では安定分布の全集合から Kolmogorov 理論の拡張と看做せる部分集合を切り出し, 慣性域におけるエネルギー散逸率を記述する整合的な理論を構成することを試みる.

2. 基本設定

乱流の 1 次元測線においてエネルギー散逸率 ε を粗視化する ($D = 1$). 点 x を中心とする長さ r の区間を考えて

$$\varepsilon_r(x) = \frac{1}{r} \int_{|x_* - x| \leq r/2} \varepsilon(x_*) dx_*. \quad (2a)$$

慣性域の上端スケールを R とし慣性域において確率変数 $\chi_r(x)$ を定義する:

$$\chi_r(x) = \ln \left[\frac{r\varepsilon_r(x)}{R\varepsilon_R(x)} \right] \leq 0 \quad \text{at } r \leq R. \quad (2b)$$

散逸率 ε が常に正で粗視化領域が互いに包含するから $r\varepsilon_r$ は r の増加函数. 従って $\langle (r\varepsilon_r)^m \rangle \propto r^{m+\tau_m}$ も $m > 0$ において r の増加函数である. 結局 $m + \tau_m > 0$ だから不等式 (1b) が得られる [2]. また間欠性について $r\varepsilon_r/R\varepsilon_R$ の値が 0 と 1 の間で任意の値を取り得ると仮定すれば [3], 強い散逸が起こるのは孤立した点となるから $m \rightarrow +\infty$ に対して $\langle (r\varepsilon_r)^m \rangle^{1/m} \rightarrow \text{constant}$ つまり $(m + \tau_m)/m \rightarrow 0$ だから漸近式 (1c) が得られる.

3. エネルギー散逸率の冪則

慣性域について以下の条件を設定する: (i) 任意の組 r_1, r_2 に対し $\varepsilon_{r_1}/\varepsilon_{r_2}$ は r_1/r_2 だけに依存; (ii) 任意の組 $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_N \leq R$ に対し $\varepsilon_{r_1}/\varepsilon_{r_2}, \varepsilon_{r_2}/\varepsilon_{r_3}, \dots, \varepsilon_{r_{N-1}}/\varepsilon_{r_N}$ は互いに独立; (iii) 任意の組 r_1, r_2 に対し定数 $C_{r_1, r_2} > 0$ が存在し $C\chi_{r_1}$ と χ_{r_2} の分布は同じ ($C\chi_{r_1} \triangleq \chi_{r_2}$). これらの条件から次式の確率変数 χ_* は指数 α の安定分布に従う:

$$\chi_r \triangleq [\ln(R/r)]^{1/\alpha} \chi_* \quad \text{with } 0 < \alpha \leq 2. \quad (3)$$

ここで条件 (i) と (ii) および定義式 (2b) は確率変数 χ_r を時刻パラメータ $t = \ln(R/r) \geq 0$ に関する加算過程 [5] と看做するための条件に相当する. 条件 (iii) は加算過程が狭義安定となる必要充分条件であり, 狭義安定分布の定義から式 (3) が得られる.

狭義安定分布は 3 個のパラメータ α, θ ($|\theta| \leq \alpha$ for $0 < \alpha < 1$ and $|\theta| \leq 2 - \alpha$ for $1 < \alpha \leq 2$), $\lambda > 0$ を用いて記述される. 特性函数は $\alpha = 1$ 以外の場合に

$$\langle \exp(i\chi_* \xi) \rangle = \exp \left(-\lambda |\xi|^\alpha e^{i\pi\theta\xi/2|\xi|} \right). \quad (4)$$

本研究では $\chi_* \leq 0$ を実現する $0 < \alpha < 1$ と $\theta = \alpha$ に限定して議論する. これらの値を特性函数の式 (4) に代入して逆 Fourier 変換すれば分布函数 f は

$$f(\chi_*) = \begin{cases} 0 & \text{at } \chi_* \geq 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(-\lambda)^{n-1} \Gamma(n\alpha + 1) \sin(n\pi\alpha)}{\pi n! |\chi_*|^{n\alpha+1}} & \text{at } \chi_* < 0. \end{cases} \quad (5)$$

ここで Γ は Gamma 函数. モーメント $\langle \varepsilon_r^m / \varepsilon_R^m \rangle$ を得るには式 (2b) と式 (3) を特性函数の式 (4) に代入して変数を ξ から $-im$ に解析接続する:

$$\left\langle \frac{\varepsilon_r^m}{\varepsilon_R^m} \right\rangle = (r/R)^{-m+m\alpha\lambda \exp(\pi\alpha)} \quad \text{at } m \geq 0. \quad (6)$$

分布函数の式 (5) で極限 $\chi_* \rightarrow -\infty$ において $f(\chi_*) \propto |\chi_*|^{-(\alpha+1)}$ となるから $\langle \exp(m\chi_*) \rangle$ は $m < 0$ で発散する. 解析接続が出来ないから $\langle \varepsilon_r^m / \varepsilon_R^m \rangle$ は $m < 0$ で存在しない. 数値計算や実験で報告される負次数モーメントは各種の雑音に由来する可能性がある.

最後に条件 (iv) として慣性域の上端スケール R における散逸率 ε_R が空間的に一様であると仮定する. この散逸率を $\varepsilon_R = \langle \varepsilon \rangle$ と書けば式 (6) の左辺は $\langle \varepsilon_r^m \rangle / \langle \varepsilon \rangle^m$ と書き換えられる. とくに $m = 1$ の場合は左辺が $\langle \varepsilon_r \rangle / \langle \varepsilon \rangle = 1$ だから右辺において r/R の冪指数が $-1 + \lambda \exp(\pi\alpha) = 0$ となる. 結局パラメータ λ を消去できて

$$\frac{\langle \varepsilon_r^m \rangle}{\langle \varepsilon \rangle^m} = (r/R)^{-m+m^\alpha}, \quad (7a)$$

つまり

$$\tau_m = -m + m^\alpha \quad \text{with } 0 < \alpha < 1 \text{ at } m \geq 0. \quad (7b)$$

この冪則は $\ln \varepsilon_r$ の分布が自己相似で不等式 (1b) と整合するのに必要充分である. また漸近式 (1c) とも整合している. 間欠性は指数 α の値で決まる. とくに極限 $\alpha \rightarrow 1$ において Kolmogorov [1] の古典理論 $\tau_m = 0$ が再現できる. 粗視化を球体など 3 次元的な領域で行う $D = 3$ の場合は r/R を r^3/R^3 に書き換えて議論すれば良く $\tau_m = -3m + 3m^\alpha$ が得られる.

4. 速度差の冪則

速度の 2 点間の差 $\delta u_r = u(x+r) - u(x)$ についても慣性域で普遍的な冪則が存在すると期待できる:

$$\langle |\delta u_r^m| \rangle \propto r^{\zeta_m} \quad \text{at } m \geq 0. \quad (8a)$$

速度差の絶対値 $|\delta u_r|$ を考えることに注意されたい [7]. 場が特異点を持たないための必要条件として [6]

$$\frac{d\zeta_m}{dm} \geq 0. \quad (8b)$$

Kolmogorov [7] は速度差の冪指数 ζ_m とエネルギー散逸率 ε_r の冪指数 τ_m との間に以下の関係を提案した:

$$\langle |\delta u_r^m| \rangle \propto \langle (r\varepsilon_r)^{m/3} \rangle \quad \text{and} \quad \zeta_m = \tau_{m/3} + \frac{m}{3}. \quad (9)$$

速度 u として相対位置ベクトル r に平行な縦速度を考える. 縦速度差が大きく伸縮が顕著な領域では, エネルギー散逸も顕著である. 縦速度に垂直な横速度は, 散逸率と密接には関係しないから考えない [8]. 冪指数 τ_m の式 (7b) を式 (9) に代入して

$$\zeta_m = \left(\frac{m}{3}\right)^\alpha \quad \text{with } 0 < \alpha < 1 \text{ at } m \geq 0. \quad (10)$$

冪指数 ζ_m は不等式 (8b) と整合している. また極限 $\alpha \rightarrow 1$ で Kolmogorov [1] の古典理論 $\zeta_m = m/3$ が再現できる.

なお $D = 3$ における冪指数 $\tau_m = -3m + 3m^\alpha$ を式 (9) を代入すると $\zeta_m = -2n/3 + 3(m/3)^\alpha$ が得られるが, 極限 $m \rightarrow +\infty$ では減少して負になる. この病的な振舞は $\tau_m/m \rightarrow -3$ に由来するが, こちらは漸近式 (1c) と整合している. 冪指数 τ_m と ζ_m とを結合する式 (9) は 3 次元領域で粗視化した散逸率には適用できないと考えられる.

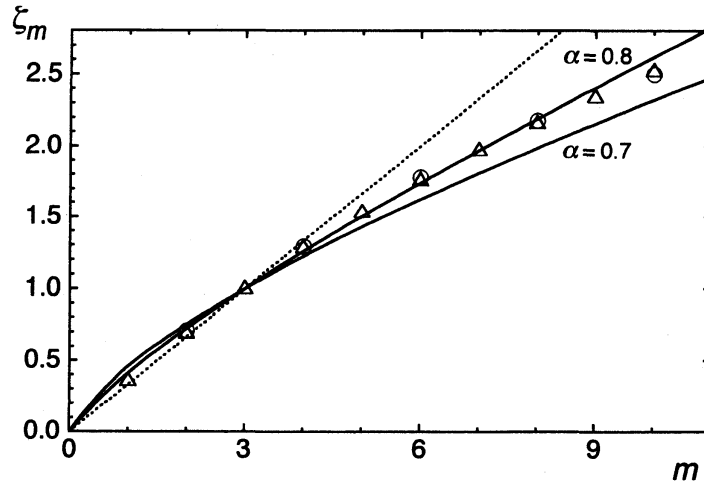


図 1: 対数安定分布理論 [式 (10)] と数値計算 [9, 10] における速度差の冪指数 ζ_m の比較. 点線は Kolmogorov [1] の古典理論 $\zeta_m = m/3$.

5. 数値計算との比較

速度差の冪指数 ζ_m について本研究から得られた理論式 (10) と数値計算 [9, 10] から得られた結果とを図 1 で比較する. 指数 α の値が 0.7–0.8 である場合に理論が数値計算の結果を良く再現することが解る.

ここで理論を構成する際に乱流を理想化したことを強調しておきたい. 乱流が慣性域スケールの中で一様かつ独立とする条件 (i) と (ii) は Reynolds 数が高く広い慣性域が形成される場合には良い近似だが, 現在の数値計算や実験では達成されていない. 慣性域の上端スケールにおける散逸率 ε_R が空間的に一様であるとする条件 (iv) も達成されておらず, 現実の乱流は十分に発達した場合も大スケールで顕著な変動を示す [11]. 理想化に基づく理論が現実の乱流における間欠性を完全に再現することは期待できない. しかし将来得られる筈の高 Reynolds 数における数値計算データや実験データでは, 理論との一致が良くなる筈である. 大容量データが取得できれば, 揺らぐ散逸率 ε_R の各々の値に対し冪則を評価することも可能な筈である. 大スケール揺らぎには或る種の普遍性が見出されており [12], 揺らぎの効果を理論に組み込むことも不可能ではない.

6. 多重フラクタル理論との比較

間欠性の研究では多重フラクタル理論が現在の主流である [6]. この理論を統計学的に構成する際にも本研究で用いた条件 (i), (ii), (iv) を使う. しかし相似性に関する条件 (iii) を適用する代わりに $\ln(\varepsilon_r/\varepsilon_R) = \sum_{n=1}^{N-1} \ln(\varepsilon_{r_n}/\varepsilon_{r_{n+1}})$ に対して大偏差原理を適用する ($r = r_1 < r_2 < \dots < r_N = R$). 大偏差原理は統計学における極限理論だから $\ln \varepsilon_r$ の分布は自己相似でなく極限 $r \rightarrow 0$ で何らかの

分布に漸近するのに過ぎない. このように多重フラクタル理論は対数安定分布理論とは異なる理論である. 実際, 大偏差原理は安定分布一般には適用できないことが知られている.

多重フラクタル理論で大偏差原理を用いる際には, 大スケールから小スケールへの平均エネルギー輸送の過程で間欠性が生じると考える [6]. しかしエネルギー輸送は局所的には大スケール側から小スケール側だけでなく小スケール側から大スケール側にも起こるから, むしろ慣性域の各スケールは互いに作用し, 対数安定分布で記述されるような自己相似な状態に落ち着くと考えの方が自然な筈である.

謝辞

研究会で有益な議論やコメントをいただいた皆様に感謝いたします. 本研究は科研費 25340018 の助成を受けました.

参考文献

- [1] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 301 (1941).
- [2] E. A. Novikov, J. Appl. Math. Mech. **35**, 231 (1971).
- [3] E. A. Novikov, Phys. Rev. E **50**, R3303 (1994).
- [4] S. Kida, J. Phys. Soc. Japan **60**, 5 (1991); **61**, 4671 (1992).
- [5] 佐藤健一, 加法過程 (紀伊國屋書店, 1990).
- [6] U. Frisch, *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [7] A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. **13**, 82 (1962).
- [8] H. Mouri, A. Hori, Y. Kawashima, Phys. Fluids **19**, 055101 (2007).
- [9] T. Gotoh, D. Fukayama, and T. Nakano, Phys. Fluids, **14**, 1065 (2002).
- [10] R. Benzi, L. Biferale, R. Fisher, D. Q. Lamb, and F. Toschi, J. Fluid Mech. **653**, 221 (2010).
- [11] H. Mouri, A. Hori, and M. Takaoka, Phys. Fluids **21**, 065107 (2009).
- [12] H. Mouri, A. Hori, Y. Kawashima, and K. Hashimoto, Phys. Fluids **23**, 125110 (2011).