

射影多様体の射影空間への埋め込みの構造について

高知大 理 遊佐 毅 (Takeshi Usa)

§0. 全体について

先月10月に京大で代数幾何学のシンポジウムがあり、そこで現在考察中の問題やいくつかの主結果について報告し、それに関して報告集が出る予定なので、今回は§1で主結果のうち、後の話で使うものを列挙し、§2において、それらの結果が射影多様体の射影空間への埋め込みの構造を調べる上でどのような意味をもつのかを簡単に復習し、§3において§1の具体例への適用について解説する。(§3が本論)

§1. 主結果について

まず記号の設定を行う。すべて $\mathbb{C}$ 上で考えることにする。

W : non-singular quasi projective variety

$\mathcal{L}$: line bundle (= invertible sheaf) on W (ample は仮定しない)

X : non-singular projective sub variety of W $\dim X = n > 0$

$j: X \hookrightarrow W$ canonical closed immersion

$\pi_{\mathcal{L}}^1 := J_W^1(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}^{-1}$ ($J_W^1(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の 1-jets の層 i.e. $W \times W$ の

対角集合 $\Delta(W)$ の定義 $\Gamma = \Gamma$ の層 $I_{\Delta} \subset \mathcal{O}_{W \times W}$ に

より $J_W^1(\mathcal{L}) = p_{1*}((\mathcal{O}_{W \times W}/I_{\Delta}^2) \otimes p_2^* \mathcal{L})$. ($i = 2$ の p_i は

i -th projection を表す.)

$\pi_{\mathcal{L}}^2 := \wedge^2 \pi_{\mathcal{L}}^1$, $\pi_{\mathcal{L}}^2(m) := \pi_{\mathcal{L}}^2 \otimes \mathcal{L}^m$ (以下 twist は $\pi_{\mathcal{L}}^2$

$\mathcal{L}$ に関する twist を表す)

(cf. [U-7], [U-5], [U-2], [U-1]),

(1.1) Main Theorem. $m \neq 0$, $g \geq 1$ ($\in \mathbb{Z}$) とし

4. 固定する.

(仮定) $H^0(W, \pi_W^2(m)) \rightarrow H^0(X, \pi_W^2(m) \otimes \mathcal{O}_X)$ 全射

$H^0(W, \pi_W^{2+1}(m)) \rightarrow H^0(X, \pi_W^{2+1}(m) \otimes \mathcal{O}_X)$ 全射

この時 $\phi \in H^0(X, \Omega_W^2(m) \otimes \mathcal{O}_X)$ と勝手な ϕ 固定する. この

時、以下の ϕ に関する 2 条件は同値となる.

(a) $\exists \psi^\# \in H^0(\Omega_W^2(m) \otimes \mathcal{O}_W/I_X^2)$ s.t. $\psi^\#|_X = \phi$

(b) $\exists \psi \in H^0(\Omega_W^2(m))$ s.t. $\psi|_X = \phi$

(1.2) Remark (7) 上の (仮定) は例えは次のような状況で成立する.

(1.2.1) $W = \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = \mathbb{P}$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ (tautological line bundle), $j: X \hookrightarrow \mathbb{P}$ arithmetically normal
 (i.e. $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ 全射 ($\forall m \in \mathbb{Z}$))

(1) ψ^* が得られなくても、そこから直接 ψ が得られるとは限らない。その場合には ψ^* を ψ modify する必要がある。

次の Corollary 2 は (1.2.1) の状況で考える。また記号をいくつか新しく導入しておく。

$$R := \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$$

$$S := \bigoplus_{m \geq 0} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) \cong \mathbb{C}[Z_0, \dots, Z_N],$$

$$J_+ := (Z_0, \dots, Z_N)S$$

$$L_\bullet: 0 \rightarrow L_{N-n} \xrightarrow{f_{N-n}} L_{N-n-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \xrightarrow{f_1} L_0 \rightarrow R \rightarrow 0$$

これは R の minimal graded S -free resolution. $\underbrace{\text{この}}_{\text{と等}} \psi: X \hookrightarrow \mathbb{P}$

が arithmetically normal であることから $L_0 = S$ に注意。

$$L_i = \bigoplus_{j=1}^{t_i} S(-t_{i,j})$$

$$t_i(m) := \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Tor}_i^S(R, S/J_+)_m = \text{"} t_{i,j} = m \text{ と} n \text{ する } j \text{ の個数"}$$

この $\langle m \rangle$ は次数 = m の部分を表す。この $t_i(m)$

は R の i -th syzygy の degree = m に対する Betti 数という

ことがある。もちろんトポロジーにおける本来の Betti 数と直接の関係はない。またより一般的な graded finite S -module M に対しても、 $b_2(m; M)$ を同様に定義することが出来る。

(cf [U-5])

(1.3) Corollary 以下の自然同型及び単射がある。

$$\begin{aligned} \text{Tor}_2^S(R, S/J_+)_\langle m \rangle &\cong \frac{H^0(X, \Omega_P^2(m) \otimes \mathcal{O}_X)}{I_m[H^0(P, \Omega_P^2(m))]} \stackrel{(1.1) \text{ Main Thm.}}{\cong} \frac{H^0(X, \Omega_P^2(m) \otimes \mathcal{O}_X)}{I_m[H^0(P, \Omega_P^2(m) \otimes \mathcal{O}_{P/I_X^2})]} \\ &\quad \searrow \delta = \bar{\delta}_{\text{LFT}} \\ &\quad H^1(X, \Omega_P^2(m) \otimes N_{X/P}^\vee) \end{aligned}$$

ここで $\delta = \bar{\delta}_{\text{LFT}}$ は以下 δ の short exact sequence から誘導されるものとする。 ($N_{X/P}^\vee = I_X/I_X^2$; X の P での co-normal bundle)

$$0 \rightarrow \Omega_P^2(m) \otimes N_{X/P}^\vee \rightarrow \Omega_P^2(m) \otimes \mathcal{O}_{P/I_X^2} \rightarrow \Omega_P^2(m) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

(1.4) Remark この (1.3) の Corollary からわかるように、

(1.1) Main Theorem の ψ^* や ψ などをもたぬ ϕ 即ち obstructed な section ϕ が幾何的に重要な情報をもたらしにくくなることを示す。

§2. 埋め込みの構造に関する問題 (cf. [U-3], [U-4], [U-6])

§0 で述べたように今回の話の本論は §3 である。

本来の目標である埋め込みの構造の考察に、§1 で提示した結果がどのように関わるのか簡単に復習しておく。以下では主に (1.2.1) の状況設定 で話を進める。

$L \in j: X \hookrightarrow P$ が induce する Hodge-Kähler class $\omega \in H^1(X, \Omega_X^1)$ によ、と定義され、 $H^*(\Omega_X^* \otimes N_{X/P}^V(*))$ に作用 ^射 Lefschetz operator とする。

即ち、 $L: H^2(X, \Omega_X^2 \otimes N_{X/P}^V(m)) \rightarrow H^{2H}(X, \Omega_X^{2H} \otimes N_{X/P}^V(m))$ 。この

Lefschetz 作用素と (1.1) Main Theorem の証明で用いられているいくつかの作用素の関係を調べることにより、(1.3) Corollary の $j=1$ の結果から $j(X) \leq P$ の定義方程式系に filtration を ^{(1.3) と (1.4) より} 与え、対応する $P = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ の closed subscheme の列 $X = W_n \subseteq W_{n-1} \subseteq \dots \subseteq W_0 \subseteq P$ を得る。一般にこの列は unique に定まるものでないが、少々奇妙な性質をいくつか持つ。そのいくつかを以下に列挙してみる。

性質 (i) $\tau := \dim_{\mathbb{C}} \text{Im} [L^n: H^0(N_{X/P}^V(*)) \rightarrow H^n(\Omega_X^n \otimes N_{X/P}^V(*))]$ とすると

$$0 \rightarrow \text{Im } N_{W_{n-1}/P}^V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow N_{X/P}^V \rightarrow N_{X/W_{n-1}}^V \rightarrow 0$$

$\swarrow \text{split}$
 $\parallel$
 $\mathcal{O}_X(-m_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_X(-m_t)$

(ii) $j(X)$ が complete intersection $\Leftrightarrow W_n \subseteq W_{n-1} = \cdots = W_0 = \mathbb{P}$

この場合、各 W_j は unique に定まる。

(iii) $W_p \subsetneq W_{p-1} \Leftrightarrow \exists$ special p -cycle ($\Leftrightarrow$ というのは少々細かい条件がそれぞれに付加されることで $\Rightarrow$ や $\Leftarrow$ が証明されることを示す)

ここで本来の目的である埋め込みの構造を研究する上で最初に問題となることを挙げてみよう。

(2.1) Problem 各 W_j が既約かつ被約で $\text{reg}(W_j) \geq X$ となるように選べるか？

(2.2) Remark 上の問題はかなり難しいと思われ、その理由は.. 例えは $j=n-1$ の場合に 正しいとすれば、

$$N_X^\vee = E \oplus \mathcal{O}_X(-m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(-m_e) \Rightarrow \exists W \subseteq P \text{ (subvariety)} \exists S_1, \dots, S_t \text{ (hyper-surface of } P) \text{ s.t. } X = S_1 \cap \cdots \cap S_t \cap W \text{ (transversal)}$$

ということも証明できてしまうからである。現段階では、

Lefschetz 作用素を用いて $S_1, \dots, S_t$ の部分は探し出すことができて、 $W \doteq W_{n-1}$ の次元の評価が一番の問題となることになってしまっている。これには X の syzygy から W の

を分離する手法が必要となる, その意味で syzygy の幾何的立場からのより深い研究が望まれる。

§ 3. Veronese 埋込みの syzygy

さて, § 1 の結果にもどり, これを具体的な例に適用することを見てみると, $(1, 2, 1)$ の典型的な例として $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ における e 次 Veronese 埋込み $j = \Phi_e: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = P$ かます思い浮ぶ。そこで次の問題を考えよう。

(3.1) Problem $j = \Phi_e: X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = P$ (e 次 Veronese)

における $t_2(m)$ を求めよ。

(3.2) Remark 意外なことに, これは現在でも 未解決 の問題なのである。表現論としても難しい問題を含んでいるとのことである (詳しくはお近くの専門家にお尋ね下さい)。知られている場合としては ① $g=1$ (Everybody knows!) ② $n=1$ (わりによく知られている … 以下の (3.3) 参考) ③ $e=2$ (determinantal ideal の結果等を使う cf. [J-P-W]) ④ M. Green の評価式 cf. [G])

以下の目標は (1.3) の結果を利用して ~~⑤ の H. Green の~~
~~評価をほんのわずかに改良することを目指す。~~^{*} だが $n=1$
 の場合に適用してみよう。

(3.3) Example (easy) $j = \mathbb{P}^e : X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^e(\mathbb{C}) = \mathbb{P}$

この時、 $j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(H) = \mathcal{O}_X(e)$ 。 ($\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(H)$, $\mathcal{O}_X(1)$ はそれぞれ
 $\mathbb{P}^e(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の tautological ample line bundle を表す)

このことから ⑦ $\Omega_{\mathbb{P}}^1 \otimes \mathcal{O}_X \cong \bigoplus^e \mathcal{O}_X(-(e+1))$;

⑧ $N_{X/\mathbb{P}}^{\vee} \cong \bigoplus^{e-1} \mathcal{O}_X(-(e+2))$ がわかる。 さて $h_g(m) > 0$

となつたとすると、理論の一般論で $1 \leq g \leq e-1 < e$ 。

また、(1.3) で与えた δ について $\text{Im } \delta \neq 0$ 。従つて

$H^0(\Omega_{\mathbb{P}}^g(mH) \otimes \mathcal{O}_X) \neq 0$ と $H^1(\Omega_{\mathbb{P}}^g(mH) \otimes N_{X/\mathbb{P}}^{\vee}) \neq 0$ 。 此

と ⑦, ⑧ から $me \geq g(e+1)$ と $me \leq -2 + g(e+1) +$
 $(e+2)$ 。 此らより m について解くと

$$g + \frac{g}{e} \leq m \leq g + \frac{g}{e} + 1 \quad (0 < g < e).$$

従つて $m = g + 1$ 。 以上より R の minimal
 graded S -free resolution は

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_{e-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \iota_{e-1} & & & & \downarrow \iota_2 & \downarrow \iota_1 & \downarrow \iota_0 \\ & & \bigoplus S(e) & & & & \bigoplus S(-3) & \bigoplus S(-2) & S \end{array}$$

(この形の resolution を 2-linear と呼ぶ)

ここで $e_j = e_j(z+1)$ であり、 $j+1$ 次の部分での exactness から

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & (L_2)_{<z+1>} & \rightarrow & (L_{2-1})_{<z+1>} & \rightarrow & \cdots \rightarrow (L_1)_{<z+1>} \rightarrow (L_0)_{<z+1>} \rightarrow R_{<z+1>} \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & \oplus S_{<0>} & & \oplus S_{<1>} & & \oplus S_{<z-1>} & & S_{<z+1>}
 \end{array}$$

各々の次元を計算すると

$$e_j = (-1)^j (e_j + e + 1) + (-1)^{z+1} \binom{e+z+1}{e} + \sum_{j=1}^{z-1} (-1)^{z+j+1} \binom{e+z-j}{e} e_j$$

となり漸化式を得る。

もちろん、他にも証明(計算)方法はあって、例えば次の概念を用いてもよい。

(3.4) Definition (cf. [M]) $P = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, F : coherent $\mathcal{O}_P$ -module

$$F \text{ is } k\text{-regular} \iff_{\text{def}} H^i(P, F((k-i)H)) = 0 \quad (\forall i > 0)$$

($\mathcal{O}_P(H)$ は P の tautological ample line bundle)

この "k-regularity" と minimal S -free resolution の間には次の関係

がある。

(3.5) Theorem (Eisenbud - Goto cf. [E-G]) F : coherent $\mathcal{O}_P$ -module

$M := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^0(P, F(m))$ が finite S -module ならば, $\mathcal{Z}$ である。
 する。以下は同値な条件である。

(i) F k -regular

(ii) $\forall \beta \geq 0$ について $\ell_\beta(m) > 0 \Rightarrow m \leq k + \beta$ が成立

従, $\mathcal{Z}$ Veronese 埋め込みのように $\ell_1 = \ell_1(2)$ の時には

resolution が 2-linear となる必要充分条件は $\mathcal{O}_X$ が

1-regular となる。一般の $n \geq 1$ に対する e 次 Veronese 埋

め込みでの $\mathcal{O}_X$ ($X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) の regularity は次で与えられる。

(3.6) Lemma $j = \overline{e} : X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = \mathbb{P}$ e 次 Veronese

埋め込み。この時 $\mathcal{O}_X$ の ($\mathcal{O}_P(H)$ に限る) regularity は

$$\left[\frac{(n+1)(e-1)}{e} \right] = n - \left[\frac{n}{e} \right] \quad ([] \text{ は Gauss 記号})$$

特に $n=1$ のとき, $\mathcal{Z}$ $\mathcal{Z}$ のとき 1-regular.

以上からも $n \geq 2$ の場合の minimal S -free resolution は

それほど単純ではないことがわかる。

さて (3.3) と同様のアイデアに基づいて $b_g(m) > 0$ とする m の bound を求めよう。以下 (3.1) の状況で考える。

(3.7) Lemma (797771)

$$H^0(X, \Omega_{\mathbb{P}}^2(H) \otimes \mathcal{O}_X) = 0$$

従って $b_g(m) > 0 \Rightarrow (g+1) \leq m$.

m の upper bound を求めるために $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(H)$ と $\mathcal{O}_X(1)$ ($X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の $\mathcal{O}_X$ の tautological ample line bundle) を使えば、 $\Omega_{\mathbb{P}}^2 \otimes N_{X/\mathbb{P}}^\vee$ の regularity を求めよう。(以下 $\Omega_{\mathbb{P}}^1|_X := \Omega_{\mathbb{P}}^1 \otimes \mathcal{O}_X$ と略す)

(3.8) Lemma F coherent $\mathcal{O}_X$ -module と $\mathcal{O}_X(1)$ について

k -regular とする。この時

$F \otimes \Omega_{\mathbb{P}}^1|_X$ は $(k+e+1)$ -regular for $\mathcal{O}_X(1)$

(3.9) Corollary

$g \geq 0$ に対して $\Omega_{\mathbb{P}}^2|_X$ は $g(e+1)$ -regular for $\mathcal{O}_X(1)$

(3.9) の証明の方針 g に関する帰納法. (3.8) から

$\Omega_{P|X}^1 \otimes \Omega_{P|X}^{g-1}$ は $g(e+1)$ -regular. 一斉.

$$\Omega_{P|X}^1 \otimes \Omega_{P|X}^{g-1} \xrightarrow{\wedge} \Omega_{P|X}^g$$

$\nwarrow$
 $\exists$ splitting

従, $0 = H^i(\Omega_{P|X}^1 \otimes \Omega_{P|X}^{g-1}(g(e+1)-i)) \iff H^i(\Omega_{P|X}^g(g(e+1)-i)) //$

(3.10) Proposition F : coherent $\mathcal{O}_X$ -module z^n k -regular for $\mathcal{O}_X(1)$

なる時 $F \otimes N_X^\vee$ は $(k+e+2)$ -regular for $\mathcal{O}_X(1)$.

(3.11) Corollary $l \geq (g+1)(e+1)$ ならば

$$H^1(N_X^\vee \otimes \Omega_{P|X}^2 \otimes \mathcal{O}_X(l)) = 0$$

従, $h_g(m) > 0$ ならば $\boxed{\text{strict}}$

$$(g+1) \leq m \leq (g+1) + \left\lfloor \frac{g}{e} \right\rfloor$$

$$(\leq (g+1) + 1 + \left\lfloor \frac{g}{e} \right\rfloor) \quad \text{Green's upper bound}^*$$

※(おわり) Green の評価式は Gauss 記号の処理をうまく行くと

上限を $(g+1) + \left\lfloor \frac{g-1}{e} \right\rfloor$ とできるの 現段階では "改良" にはならず、い

Reference.

- [E-G] D. Eisenbud : Linear free resolutions and minimal multiplicity,
and S. Goto J. Algebra 88, (1984), pp89-133.
- [G] M. L. Green : Koszul Cohomology and the Geometry of Projective
Varieties, J. Diff. Geom. 19, (1984), pp125-171.
- [J-P-W] T. Józefiak, : Resolutions of Determinantal Varieties and
P. Pragacz, Tensor Complexes associated with Symmetric
and J. Weyman and Antisymmetric Matrices, Astérisque, 87-88,
(1981), pp109-189.
- [M] D. Mumford : Lectures on Curves on an Algebraic Surface,
Annals of Math. Studies 59, Princeton U. Press,
Princeton (1966).
- [U-1] T. Usa : On Obstructions of Infinitesimal Lifting, (1984),
Proc. Japan Acad., 60, pp.179-180.
- [U-2] _____ : Obstructions of Infinitesimal Lifting, (1989),
Comm. Algebra, 17(10), pp.2469-2519.
- [U-3] _____ : Lefschetz Operators and the Existence of
Projective Equations, (1989), J. Math. Kyoto
Univ., 29(3), pp.515-528.
- [U-4] _____ : An Algebraic Cycle relating to a Section with
High Penetration, (1990), J. Math. Kyoto Univ.,
30(3), pp.517-522.
- [U-5] _____ : Syzygies and the Normal Bundle (Preprint).
- [U-6] _____ : Partial Structures of a System of Projective
Equations (Preprint).
- [U-7] _____ : Generalization of Theorems on Infinitesimal
Lifting (In preparation).