

$B I B$ design の不存証明について

創価大 経済 池田貞雄

カルガリ大 小川潤次郎

序 対称 $B I B D (v=b, r=k, \lambda)$ の場合には、その結合行列 N は正方形行列で、 $NN' \sim I_v$ (有理合同: $\sim$) に対して Hasse の定理を適用した判定条件

$$|NN'| \sim 1, \quad \chi_p(NN') = +1 \quad (\text{すべての素数 } p \text{ に対して})$$

が得られているが、この条件はかなり強いものであると思われる。

非対称な場合には、しかし、対称な場合に類した判定条件と等しくことは、少なくとも Hasse の定理を用いようとする立場からは非常に困難である。筆者らは、これまで多くのいろいろな方法で試みたが、すべて identity に終り、まだ結果的には何も得られていない。

この報告では、これまで試みしてきた方法のうちで、代表的なものいくつかを紹介して、前章の轍としたい。また、 $\lambda=1$ の場合には、ブロッカー・アソシエーショニを利用して不存を示

明の方向があることと述べている。

1. 結合行列を用いる方法 (I)

BIBD(v, k, b, r, λ) の結合行列 $N_{v \times b}$ を用いて

$$(1.1) \quad P = \begin{bmatrix} N & P I_v \\ I_b & N' \end{bmatrix} \quad \overline{v+b} \times \overline{v+b}$$

と作る、と、

$$P P' = \begin{bmatrix} N N' + P' I_v & (1+P) N \\ (1+P) N' & I_b + N N' \end{bmatrix}$$

となり、 $P = (r - \lambda - 1)/2$ のときこれは

$$(1.2) \quad P P' \sim \begin{bmatrix} (rk + P^2) I_v + \lambda G_v & 0 \\ 0 & I_b + \frac{\lambda k^2}{rk + P^2} G_b \end{bmatrix}.$$

$P P' \sim I_{v+b}$ に House の定理を用いて

$$(1.3) \quad \begin{cases} (rk + P^2) \left(1 + \frac{\lambda k^2}{rk + P^2}\right) \sim 1 \\ \left(rk + P^2, 1 + \frac{\lambda k^2}{rk + P^2}\right)_P (r, rk + P^2)_P (v, rk + P^2)_P \left(1 + \frac{\lambda k^2}{rk + P^2}\right)_P \\ (v, 1 + \frac{\lambda k^2}{rk + P^2})_P = +1 \end{cases}$$

が得られるが、これは $vr = bk$, $\lambda(v-1) = r(k-1)$ の下で恒等的に成立する。

この方法の変型として、各組の ϕ が加えられる。もしもば、(1.1) の N' が $G_{b,v}$ に置きかえられるとどうなるか、ある。

は、 N の替りにいくつかの rows を落した行列を用いたら？
 P の ν 行を落して $(\nu+1) \times (\nu+1)$ 行列に、Hasse Theorem の Hasse-Minkowski の p -invariant に関する条件を適用したらどうなるか、等々である。しかし、これはすべて identity になる。

2. 結合行列を用いる方法 (II)

N の row-space (rational field $\mathbb{Q}$) の基底補完の ν 個の $b-\nu$ 個の線形独立な rational vectors を選り、それらと行とを $(\nu+1) \times b$ 型行列とするとする。

$$(2.1) \quad P = \begin{bmatrix} N \\ S \end{bmatrix}$$

とすると、

$$(2.2) \quad PP' = \begin{bmatrix} NN' & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad Q = SS'.$$

したがって、

$$(2.3) \quad \begin{cases} |Q| = |NN'| = (2\pi)^{\nu} |k|, \\ \zeta_p(Q) = (\gamma, \gamma)_p (\gamma, |NN'|)_p \zeta_p(NN'). \end{cases}$$

(2.1) の N のところには、 t と 2 は ν 個の $(\nu+1) \times b$ 行列

$$M = \begin{bmatrix} J'_b \\ N_2 \end{bmatrix}, \quad (N_2 \text{ は } N \text{ の } \nu+1 \sim \nu \text{ 行の submatrix})$$

を入れて

$$(2.4) \quad P = \begin{bmatrix} M \\ S \end{bmatrix}$$

12 27 17 条件

$$(2.5) \quad C_p(PP') = +1(1, -1)_p$$

と 10 17 43.

$$MM' = \begin{bmatrix} b & \lambda J_{u_2} \\ \lambda J_{u_2} & (\lambda\lambda)I_{u_2} + \lambda G_{u_2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & (\lambda\lambda)I_{u_2} + (\lambda - \frac{\lambda^2}{b})G_{u_2} \end{bmatrix},$$

$$PP' = \begin{bmatrix} MM' & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

54. (2.5) は, $g \equiv \lambda\lambda + (u-2)(\lambda - \frac{\lambda^2}{b})$ と あり

$$(b, (\lambda\lambda)^{u-3}g)_p (b, 1Q1)_p ((\lambda\lambda)^{u-3}g, 1Q1)_p (-1, b)_p C_p((\lambda\lambda)I_{u_2} + (\lambda - \frac{\lambda^2}{b})G_{u_2}) \cdot C_p(Q)$$

$$\equiv (b, (\lambda\lambda)^{u-1}g)_p (b, (\lambda\lambda)^{u-1}k)_p ((\lambda\lambda)^{u-1}g, (\lambda\lambda)^{u-1}k)_p (-1, b)_p$$

$$(2.6) \quad (\lambda\lambda)_p^{\frac{(u-2)(u-3)}{2}} (-1, g)_p (u-2, g)_p (u-2, \lambda\lambda)_p (g, \lambda\lambda)_p^{u-3} (-1, (\lambda\lambda)^{u-1}k)_p \\ (-1, \lambda\lambda)_p^{\frac{u(u-1)}{2}} (-1, \lambda k)_p (u, \lambda k)_p (u, \lambda\lambda)_p (\lambda k, \lambda\lambda)_p^{u-1} = +1$$

となる。これは identity であることが示される。

この方法についてもいろいろな変型が考えられる。たとえば、(2.1) の N の右か左に、 $b \neq 1$ 列、 $[J_m]$ の $m \times 1$ 列と加える。

$$P = \begin{bmatrix} J_m & N \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

に $C_p(PP') = +1$ を適用するに注意する。

$$P = \begin{bmatrix} J_m & Q \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \left(\begin{array}{l} Q \text{ は } N \text{ の row-space } Q \text{ の vector } \\ N \text{ との inner product } \end{array} \right)$$

の形のものを考えることもできる。しかし、これは必ずしも

identity となる。

3. $\lambda = 1$ の場合 (I)

この場合には、^{上記}(I), (II) で扱った方法以外に、7.12.2 の association を利用する方法が考えられる。すなわち

$$(3.1) \quad \begin{cases} NN' = (n-1)I_n + G_0 \\ N'N = kI_b + A_1 = nkA_0^* + (n-1)A_1^* \end{cases}$$

N の row space の orth. compl. は A_2^* の中の vector が張る space である。また A_2^* の row (or column) space にも属している。したがって、(2.1) の右の部分には、その space の basis vector を選ぶことができる。前節 (II) の方法と同じように、(2.1) の N のいくつかの rows を A_1^* の中の vectors で置き換えることを考える。

(3.1) から

$$(3.2) \quad NA_1^* = N - \frac{n}{b}G_{0,b}$$

N の最後の $n-m$ rows からとれる submatrix を N_m , A_1^* の (最初 ^{又は任意}) m 個の rows の $n \times b$ 行列を C_m とし

$$(3.3) \quad P = \begin{bmatrix} N_m \\ C_m \\ I \end{bmatrix}$$

とすると、

$$(3.4) \quad PP' = \begin{bmatrix} N_m N_m' & N_m C_m' & 0 \\ C_m N_m' & C_m C_m' & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}$$

ここで, $C_m C_m'$ の部分は, 7 "ロ" の関係のはっきりしている,
 とことは, 2 に 1 -st associates (SLB) の 2 個の 7 "ロ" に
 対応する A_2^* の rows の中から C_m と選べば, 計算可能. また
 $N_m C_m'$ の部分は, 適当な 7 "ロ" と処理の配列をとれば, (3.4)
 からわかる.

詳細は省略するが, $m=1$ の場合に A_1^* の第 1 列と C_m と
 すると, $d_1 = \gamma_0 - \frac{\gamma_{11}}{1-\gamma} + \frac{\gamma_{11}}{(1-\gamma)(1-k-1)}$, $\gamma_{11} = \alpha^2(k-1) + \beta^2(vk)$, $\gamma_{11} = (\alpha(k-1) - \beta(vk))^2$,
 $\gamma_0 = \frac{k(k-1)}{v}$, $\alpha = 1-\beta$, $\beta = \frac{k}{v}$ と
 (3.5) $\left\{ \begin{array}{l} d_1, 1-k(vk-1)(1-k) \sim 1, \\ (d_1, (1-\gamma)^{-\frac{v-1}{2}}(1-k-1))_p (-1, d_1)_p (-1, 1-\gamma)_p \frac{v(v-1)}{2} (-1, 1-k)_p (v, 1-k)_p (v, 1-\gamma)_p \\ (1-k, 1-\gamma)_p^{u-1} (-1, 1-\gamma)_p \frac{(v-1)(v-2)}{2} (-1, 1-k-2)_p (v-1, 1-k-1)_p (v-1, 1-\gamma)_p \\ (1-k-1, 1-\gamma)_p^{u-2} = +1, \end{array} \right.$

から得られる. $m=2$ のときも, C_m と適当にすると

(3.6) $\left\{ \begin{array}{l} d_1 d_2, 1-k(1-k-2) \sim 1, \\ (d_1 d_2, (1-\gamma)^{-\frac{v-1}{2}}(1-k-2))_p (-1, d_1 d_2)_p (d_1, d_2)_p (-1, 1-\gamma)_p \frac{v(v-1)}{2} (-1, 1-k)_p \\ (v, 1-k)_p (v, 1-\gamma)_p (1-k, 1-\gamma)_p^{u-1} (-1, 1-\gamma)_p \frac{(v-2)(v-3)}{2} (-1, 1-k-2)_p (v-2, 1-k-2)_p \\ (v-2, 1-\gamma)_p (1-k-2, 1-\gamma)_p^{u-3} = +1, \end{array} \right.$

ここで

$$\gamma_0 = \frac{k(k-1)}{v}, \gamma_1 = \frac{(k-1)(1-k-1)}{v(1-\gamma)}, \alpha = \frac{v-k}{v}, \beta = \frac{k}{v}$$

$$\gamma_{11} = (k-2)\alpha^2 + (vk)\beta^2, \gamma_{12} = -(2k-3)\alpha\beta + (v-2k+1)\beta^2, \gamma_{22} = (k-1)\alpha^2 + (vk-1)\beta^2$$

$$\gamma_{11} = [(k-2)\alpha - (vk)\beta]^2, \gamma_{12} = [(k-2)\alpha - (vk)\beta][(k-1)\alpha - (vk-1)\beta]$$

$$\gamma_{22} = [(k-1)\alpha - (vk-1)\beta]^2$$

$$f_{11} = \gamma_0 - \frac{\gamma_{11}}{1-1} + \frac{\gamma_{11}}{(1-1)(k-2)}, \quad f_{12} = \gamma_1 - \frac{\gamma_{12}}{1-1} + \frac{\gamma_{12}}{(1-1)(k-2)},$$

$$f_{22} = \gamma_0 - \frac{\gamma_{22}}{1-1} - \frac{\gamma_{22}}{1-1} + \frac{\gamma_{22}}{(1-1)(k-2)}$$

$$d_1 = f_{11}, \quad d_2 = f_{22} - \frac{f_{12}^2}{f_{11}}.$$

これらは、共に identity のようである。 $m \geq 3$ の場合は、 C_m の $2m$ と $A_1^{\#}$ の中からうまくとると、 P の singular になる。(1)。

この方法にも、いろいろの変型が出来ることは明らかであるが、多分すべて identity であると思われる。

4. $\lambda=1$ の場合 (II)

$BIBD(\lambda=1)$ に付随したいくつかの association schemes が考えられるが、これらが不存在法則に利用できないかという問題がある。

$BIBD(\lambda=1)$ に付随した association scheme とは、 v 個の点 j に各 r 個のものがある。

1°) この $BIBD$ には $\binom{v}{2}$ 個の処理対があり、1 個ずつ配列されていくから、 $m=b$, $n=\binom{k}{2}$ とハミルトンとある GD 型 association が、(1)-block 内の処理対は 1-st associates と (2) 得られる。

2°) $b \cdot \binom{k}{2}$ 個の処理対は、 b 個の SLB association の 1-st associates は b -block 内の処理対は互に 1-st, 2nd

associates な Γ 内の処理対は $\mathbb{Z}$ に 2-nd, Γ 内の処理対は $\mathbb{Z}$ に 3-nd associates とする。3-class association が定義される。

このように、処理対に関する association や、あるいは $(\frac{b}{2})$ 内の Γ 内の処理対に関する association scheme がいかに考えられる。

さて、これらの association を利用する方法として、任意の処理対 ϕ にある処理対の集合 D_ϕ を対応させ、その正交の結合行列 N の性質を調べることを考えられる。経験的に言えは、このような N は singular な場合が多い。しかし、
2. Hasse diagram は N によりできるか? つぎの結果は多少役立つ。

Lemma m -associate class をもつ SPBIBD の結合行列 N のスペクトル分解は

$$NN' = f_0 A_0^{\#} + \sum_{i \in I} f_i A_i^{\#}, \quad (I \subset \{1, 2, \dots, m\})$$

であり、行列 N が正規 ($NN' = N'N$) ならば、

$$(*) \quad \prod_{i \in I} f_i^{A_i} \sim 1,$$

$$(**) \quad \rho(NN' + \sum_{i \in I} A_i^{\#}) = (1, 1)_\rho \quad (\text{この条件は } \rho \text{ により})$$

が成立する。

時間の余裕があれば、若干の例を報告する。