

$\Pi + \Pi'$ の持上げとその応用

東大・理 伊原康隆

C : 有限体 F_q 上の代数曲線で完備非特異絶対既約, 種数 g .

$\Pi, \Pi' \subset C \times C$: C の g 乗字像のグラフとその転置 (transpose),

$\Pi + \Pi'$ は C 上の因子とみる.

問題 $(C, \Pi + \Pi')$ の標数 0 への持上げを考えること.

動機 (i) モジュラー関数との関係 (とくに志村曲線), (ii) C の不分離が $\mathbb{A}^1$ 被覆の整数論との関係.

(i) についてはここでは触れない (cf. [1]). (ii) についてはこれから述べる. $g \leq 1$ のときは, 和 $\Pi + \Pi'$ をとらなくても, (C, Π) (C, Π') 各々が標数 0 への持上げを有し, とくに C が ordinary elliptic curve のときそれらは本質的に一意的で C のいわゆる canonical lifting を与えている (Deuring). 我々が主に考えるのは $g \geq 2$ のときで, このとき (C, Π) 等は個々には標数 0 にあがらず, $(C, \Pi + \Pi')$ を考えて初めて持上げる場合が生ずるのである.

まず持上げの正確な定義から. 一般に $A \in \mathbb{F}_q$ を剰余体とする局所環とあるとき,

定義 三対 $(C, C'; J)$ が $(C, C'; \Pi + \Pi')$ の A 上への持上げ
 とは, $C, C': A$ 上の proper smooth schemes で $C \otimes_A \mathbb{F}_q = C' \otimes_A \mathbb{F}_q =$
 C , $J: C \times_A C'$ の A 平坦かつ既約な閉部分 scheme で
 $J \otimes_A \mathbb{F}_q = \Pi + \Pi'$ ($C \times C$ の中で).

$g \geq 2$ のとき J の既約性は自動的に出る. $C' = C$, $J = J$
 のとき, (C, J) は $(C, \Pi + \Pi')$ の 対称な持上げ と呼ぶ.

与えられた C, A に対して $(C, C'; J)$ が存在するとは
 限らない. (存在の問題については後に述べる.) ここではまず
 A を 標数 0 の 離散付値環とし, A 上への持上げ $(C, C'; J)$
 が存在したと仮定してその帰結について論じる. A から
 複素数体 $\mathbb{C}$ の中への埋めこみ $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$ を一つ選び,
 C, C', J を複素化して得られる $\mathbb{C}$ 上の代数曲線の三対

$$(C, C'; J) \otimes_A \mathbb{C} = (R, R'; \overline{R}_0) \quad \overline{R}_0 \subset R \times R'$$

を考える. $R, R' \in$ (種数 g の) コンパクト・リーマン面とみよう.

$\Pi + \Pi'$ の特異点の集合は明らかに $\Pi \cap \Pi'$ で, $\Pi \cap \Pi'$ の各点は
 $\Pi + \Pi'$ の通常二重点であり, また射影 $\Pi \xrightarrow{\sim} C$ によって
 $\Pi \cap \Pi'$ は C の $\mathbb{F}_{q^2}$ -有理点の集合と 1対1 に対応すること
 に注意する. Reduction $\otimes_A \mathbb{F}_q$ を通して $\overline{R}_0$ の特異点集合 $\text{Sing}(\overline{R}_0)$
 と $\Pi \cap \Pi'$ を比べることにより, 容易に次のことがわかる.

$\overline{R}_0$ の特異点はすべて通常二重点で, $\otimes_A \mathbb{F}_q$ によって $\Pi \cap \Pi'$ の
 部分集合, 従って C の $\mathbb{F}_{q^2}$ 有理点の集合のある部分集合と 1対1

に対応する。 $\text{Sing}(\overline{R}_0)$ と対応しない C の $\mathbb{F}_q$ 有理点を
(この持ち方に属する) 特殊素点 (special points) と呼ぶ。 一方,
 $\overline{R}_0$ を正規化して得らる開リーマン面を R_0 と書き,

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & \varphi & \\ & \swarrow & \searrow \\ R & & R' \end{array}$$

を $\overline{R}_0$ の射影から生ずる有限被覆写像 (一般には分岐する) とする。
 R_0 の任意の点 P_0 をとり, $P_0, P = \varphi(P_0), P' = \varphi'(P_0)$ を基点とする。
 R_0, R, R' の基本群をそれぞれ $\pi_1(R_0), \pi_1(R), \pi_1(R')$, φ, φ' の
誘導する基本群間の準同型 (単射とは限らない) を

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} & \Phi & \\ & \swarrow & \searrow \\ \pi_1(R) & & \pi_1(R') \end{array}$$

と書く。 Γ を, Φ, Φ' で定まる融合部分群つき自由積とする。

$$(3) \quad \Gamma = \pi_1(R) *_{\pi_1(R_0)} \pi_1(R').$$

Γ の構造は, $A, (c, c'; J), \varepsilon: A \hookrightarrow \mathbb{C}$ 等のとおり方には依存するが,
 $P_0 \in R_0$ のとり方には依存しない。

定理 1 $K = \mathbb{F}_q(C)$ を C の $\mathbb{F}_q$ 上の関数体とし, M_K は
 C のすべての特殊素点で完全分解するような K の不分岐ガロ
 Γ 拡大のうち最大のものとすると, M_K の Galois 群は Γ の
profinite completion と同型である。 $\text{Gal}(M_K) \cong \overline{\Gamma}$.

これは, φ, φ' が不分岐の場合に得られていた以前の結果 ([1] §4) の拡張である。この定理を Grothendieck の比較定理 ([2] Exp X) と比べると, Grothendieck に於ては C の持上げ $\mathcal{C}$ (のみ) を用いて K の最大不分岐が $\mathcal{O}_A$ 拡大 L の $\overline{\mathbb{F}_q} \cdot K$ 上の Galois 群 $\text{Gal}(L/\overline{\mathbb{F}_q} \cdot K)$ と $\pi_1(\mathcal{R})$ と比較しているが, これは p と素な部分の同型を引起す全射準同型 $\pi_1(\mathcal{R}) \rightarrow \text{Gal}(L/\overline{\mathbb{F}_q} \cdot K)$ の存在を保証するもの。この二つの群はそれ自体として同型であるから, 完全な比較定理ではない。(この代わり $\pi_1(\mathcal{R})$ の構造はよく知られている)。一方我々の結果は同型定理になっているが, Γ の計算は容易でない。また, 不分岐拡大の中で, 与えられた有限個の素数が完全分所するところだけに制限するのも, 代数体の不分岐拡大に於ては無限素数が常に“完全分所”している事にかんがみると, むしろ自然な制限ではなかろうか。

さて, 特殊素数の個数を H とおくと:

- 命題 (i) $H \geq (g-1)(g-1)$ であり, 等号が成立する為の必要十分条件は φ, φ' が共に不分岐なること
- (ii) $H = (g-1)(g-1)$ のとき, $\Gamma, \overline{\Gamma}$ は共に無限群, 従って M/K は無限次拡大になる。
- (iii) $H > (g-1)(g-1)$ のとき, Φ, Φ' は全射で

$$(4) \quad \Gamma \cong \pi(\mathcal{R}) / (K\alpha\Phi)(K\alpha\Phi').$$

予想 $H > (g-1)(g-1)$ のとき Γ は有限, 従って M/K は有限次拡大?

より一般に, 三つのリーマン面と有限被覆写像の系 (1) に対して, φ, φ' がある意味で"独立" (例えば $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ の定数体の $\mathcal{R}$ への引き戻しの共通部分はある定数体 $\mathbb{C}$ しかない, 等) で Φ, Φ' が全射なら Γ は有限であろうか?

$(\mathcal{C}, \mathcal{C}'; \mathcal{J})$ が, $PSL_2(\mathbb{R}) \times PGL_2(F_p)$ ($\mathbb{R}$: 実数体, $F_p: p$ 素数, $N_{F_p} = p$) の格子部分群 $\tilde{\Gamma}$ に対応する志村曲線の合同関係式 (cf. [1] p. 6) の場合は, 上記予想は正しい. この場合, $\tilde{\Gamma}$ は Margulis により arithmetic となり, $E \in \tilde{\Gamma}$ の parabolic 及び "torsion elements" で生成される正規部分群とすると, $\Gamma \cong \tilde{\Gamma}/E$ となり, 更に, $H > (g-1)(g-1)$ となるための必要十分条件は $E \neq \{1\}$. この場合 E は $\tilde{\Gamma}$ の中心には含まれないから, 再び Margulis によって $\Gamma \cong \tilde{\Gamma}/E$ は有限群になるのである. 尚, $H = (g-1)(g-1)$ を満たす三対 $(\mathcal{C}, \mathcal{C}'; \mathcal{J})$ はすべて $PSL_2(\mathbb{R}) \times PGL_2(F_p)$ の格子部分群 $\tilde{\Gamma}$ と対応する (従って $\Gamma \cong \tilde{\Gamma}$) ことも予想されるが $H > (g-1)(g-1)$ のときは, 少なくとも $g=0$ では, 反例がある.

定理の証明のポイントは, Grothendieck の比較定理の証明における Abhyankar's lemma の代わりに次のレマを用いるところにある。

補助定理 (三木-伊原 [3]) $\mathcal{R} \supset \mathbb{Q}_p$ を, p -進体 $\mathbb{Q}_p$ を含み p -進付値の延長によって完備な離散付値体で $\mathbb{Q}_p$ 上代数的な素元を含むものとする (例えば 有理数体 $\mathbb{Q}_p(x_1, \dots, x_n)$ の自然な p -進付値による完備化). $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ を有限次拡大とする. もし, $\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ の中への付値体としての同型写像 $\sigma: \mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{R}$ が存在して 剰余体の p^r 乗写像 ($r > 0$) を引き起こし, しかも $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}$ の中への同型写像 $\tilde{\sigma}: \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}$ で $\mathcal{M}^{\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{R} = \mathcal{M}$ を満たすもの $\tilde{\sigma}$ への延長を許すならば, $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 $\mathbb{Q}_p'$ が存在して $\mathcal{M} \cdot \mathbb{Q}_p' / \mathcal{R} \cdot \mathbb{Q}_p'$ は不分岐となる。

尚, 定理を現在へ形に一般化するに際しては, Γ を φ と φ' の mapping cylinders の自然な融合和の基本群と見ることが基本的役割を果たした。この事を示唆して下さったトポロジーの森田茂之氏に感謝の意を表したい。

次に $g \geq 2$ とし, 対 $(C, \Pi + \Pi')$ の対称な持上げについて論ずる。 C の $\mathbb{F}_{q^2}$ 有理点からなる (ある) 集合 G で, $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q$ の共役で全体として変のらぬものを一つとって固定し, (C, J) としてはその special points の集合が与えられた G に含まれるようなもののみを考える。 G に含まれる $\mathbb{F}_q$ 上 1 次な n_1 2 次の点の集合を各々 G_1, G_2 と記し, G_2 における $\mathbb{F}_q$ 共役類 $\sim$ で表す。 $|G_1| = H_1, |G_2| = 2H_2$ (従って $|G| = H_1 + 2H_2$) と記す。

C, G に対して定まる二つの不変量 $m, r \in \mathbb{Z}, \geq 0$ を定義する。

$$U = \left\{ \xi \mid \begin{array}{l} \xi: C \text{ 上の } g+1 \text{ 重正則微分で, } \xi = \xi_1 \otimes \xi_2^{\otimes g} \text{ と分解} \\ \text{するとき } \gamma^f(\xi_1) = 0 \end{array} \right\}$$

(ただし γ は Cartier 作用素, $g = p^f, p$: 素数) とおくと, U は

$\mathbb{F}_q$ 上 $2(g-1)(g-1)$ 次のベクトル空間である。各 $Q \in G$ に対して Q における局所-変換変数 t_Q (C 上の関数) を選ぶ;

各 $\xi \in U$ に対して C 上の関数 $\xi / (dt_Q)^{\otimes (g+1)}$ が Q でとる値

は $(\xi / (dt_Q)^{\otimes (g+1)})_Q$, その Q の剰余体 $k_Q (= \mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathbb{F}_{q^2})$ から $\mathbb{F}_q$

への trace を $\text{tr}_{k_Q/\mathbb{F}_q} (\xi / (dt_Q)^{\otimes (g+1)})_Q$ で表わし, U から $\mathbb{F}_q^{H_1+H_2}$ の中への $\mathbb{F}_q$ 線型写像

$$\lambda: U \rightarrow \xi \longrightarrow \left(\text{tr}_{k_Q/\mathbb{F}_q} \left(\xi / (dt_Q)^{\otimes (g+1)} \right)_Q \right)_{Q \in G_1 \cup (G_2/\sim)} \in \mathbb{F}_q^{H_1+H_2}$$

を考える。 (Q は $G_1 \cup (G_2/\sim)$ の上を動く)。 t_Q のとり方を定めて

も、 λ は $F_q^{H_1+H_2}$ の自己同型による変換しか受けないから、

$$(5) \quad m = \dim_{F_q}(\text{Coker } \lambda), \quad r = \dim_{F_q}(\text{Ker } \lambda)$$

はともに C, σ のみで定まる不変量で明らかに

$$(6) \quad m - r = H_1 + H_2 - 2(q-1)(q-1).$$

さて F_q を剰余体とする完備なネーター的局所 $W(F_q)$ 環全体のなす圏 A を考える ($W(F_q)$ は F_q 上の Witt vectors のなす環). 圏 A の対象 A に対して $(C, \pi + \pi')$ の A 上への対称な持ち上がり (c, j) の A 同型類全体のつくる集合を対応させる関手 $f: A \rightarrow \{\text{Sets}\}$ を考えると

定理2 関手 f は、ある $A^* \in A$, $(c^*, j^*) \in f(A^*)$ によって表現可能で、 A^* は上記 m, r を用いて次のように表される.

$$A^* = W(F_q)[[t_1, \dots, t_m]] / (F_1, \dots, F_r),$$

$F_i \in (M^2, p)$ ($i=1, \dots, r$). ここに M は $W(F_q)[[t_1, \dots, t_m]]$ の最大イデアル. (F_i たちは互いに“独立”とは限らない. すべて 0 になる こともある.)

系1 $r=0$ なら $(C, \pi + \pi')$ は任意の $A \in A$ の上に (例えば $A = W(F_q)$) 持上がる. 更に $m=0$ ならそれは一意的.

例えは $g=g=2$ のとき, 同型を除いて C は 20 個存在するが, $G \in C$ のすべての $\mathbb{F}_q$ 有理点の集合にとるとき, そのうち 13 個の C に対して上記系の値定 $r=0$ が満ちており従って $(C, \pi + \pi')$ は 標数 0 に (対称な) 持ち上がる。

しかし $r=0$ が成立するのは (6) によって $H_1 + H_2 \geq 2(g-1)(g-1)$ の場合に限りており, 重要な場合 $|G| = (g-1)(g-1)$ などには含まれない。そこで, この場合には C の自己同型群を有効に用いる事も試みられている (伴原 [4]). [4] に於て

$|G| = (g-1)(g-1)$ の場合にも 標数 0 に持ち上げられるための criterion と 実例がいくつか計算されている。

$\text{Spec } A^*$ は $(C, \pi + \pi')$ の (対称な) 局所的変形 moduli space と見なせるが, 実例として例えは次のような環が (各々特定の p に対して) A^* と 1-2 出でくる。

$$A^* = \mathbb{Z}_p[[t_1, t_2, t_3, t_4]], \quad \mathbb{Z}_p, \quad \mathbb{Z}_p/(p^2), \\ \mathbb{F}_p[[t_1, t_2, t_3]]. \quad (\text{吉村曲線の } \bar{C} \text{ から, 多分, } \mathbb{Z}_p[[t_p]] \text{ など出でくる})$$

系 2 $H_1 + H_2 \geq 2(g-1)(g-1)$ なら, $(C, \pi + \pi')$ は 標数 0 への 対称な持ち上げを有するか, または $\mathbb{F}_q[[t]]$ 上への自明でない変形をもつ。

尚 $(C, \pi + \pi')$ の持上げは, ある種の p 進的微分変換と 1対1 に対応することでもわかっている ([7]) が, この理論は今ところ, 持上がるための必要条件を出すことと, 最初の二段階の infinitesimal liftings ($A = \mathbb{Z}/p^2, \mathbb{Z}/p^3$ 上への持上げ) をすべて求める事などには役に立つが 標準 0 に近上がるための簡単な十分条件は与えないので, ここでは省略した。

最後になったが, 古川吉弘氏の修士論文(東大. 1980)で, $g=2$ の場合の持上げの問題がやはり自己同型を有効に用いて扱われていて [4] にはなにか十分条件が得られていること, 及び堀川氏が $g=2$ の場合 Kummer surface を用いた議論をされた事(未出版)を付記したい。

- [1] Y. Ihara Congruence relations and Shimura curves
I (AMS Proc Symp. Pure Math 33 Vol 2), II (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, IA 25-3 (1979))
- [2] A. Grothendieck Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)
Springer Lecture Notes 224 (1971)
- [3] Y. Ihara-H. Miki Criteria related to potential unramifiedness
and reduction of unramified coverings of curves
J. Fac. Sci. Univ Tokyo IA 22 (1975)

