

# 解析的差分方程式について

富山大理 田中專一郎 (Sen-ichiro Tanaka)

## § 1. 序論 差分方程式

$$(1.1) \quad \Delta y(x) = f(x, y(x)) \quad (\Delta y(x) \equiv y(x+1) - y(x))$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad f(x, y(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{pmatrix}$$

において  $f(x, y)$  は  $X_0 \times Y_0$

$$X_0 : |x| > R_0, \quad Y_0 : \|y\| < r_0 \quad (\|y\| = \max_i |y_i|)$$

で正則で

$$(1.2) \quad f_i(x, y) = \sum_{|k| \geq 1} a_{k_0 k_1 \dots k_n}^{(i)} x^{-k_0} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

のように展開されるものとする。こゝに  $|k|$  は

$$|k| = k_0 + k_1 + \dots + k_n$$

を表す。  $m$  は  $m \geq 2$  の整数とする。さらに

$$(1.3) \quad |k| < m \text{ のとき } a_{0k_1 \dots k_n}^{(i)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$|k| = m$  のとき

$$(1.4) \quad a_{0k_1 \dots k_n}^{(i)} \begin{cases} \neq 0 & (k_i = m) \\ = 0 & (k_i < m) \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$(1.5) \quad a_{10 \dots 0}^{(i)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

を仮定する。このとき (1.1) は

$$(1.6) \quad y \approx g_1 x^{-\frac{1}{m}} + g_2 x^{-\frac{2}{m}} + \dots + g_n x^{-\frac{n}{m}} + \dots$$

の形の形式解をもつ。

$x^{\frac{1}{m}}$  のリーマン面の中  $p$  枚目を

$$\Delta_p : (2p-1)\pi < \arg x < (2p+1)\pi$$

とする。このとき正の実軸を含む  $\Delta_p$  の部分領域

$$\Gamma_p : |x| > R, \quad \gamma_{1p} < \arg x < \gamma_{2p}$$

において (1.1) は正則な漸近解

$$(1.7) \quad y \approx g_1 x^{-\frac{1}{m}} + g_2 x^{-\frac{2}{m}} + \dots + g_n x^{-\frac{n}{m}} + \dots$$

をもつことを証明する。こゝに、 $R$ ,  $\gamma_{1p}$  および  $\gamma_{2p}$  は証明の中で決定される。

§2. 新変項に関する差分方程式 差分方程式 (1.1) の中

に

$$g_i \sim g_1^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_2^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \dots + g_N^{(i)} x^{-\frac{N}{m}} + \dots$$

( $i=1, 2, \dots, n$ )

を形式的に代入すれば

$$(2.1) \quad a_{00\dots m0\dots 0}^{(i)} (g_1^{(i)})^m + a_{10\dots 0}^{(i)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$(2.2) \quad m a_{00\dots 0m0\dots 0}^{(i)} (g_1^{(i)})^{m-1} g_N^{(i)} + P_N^{(i)}(a_k, g_1, \dots, g_{N+1}) = 0$$

( $i=1, 2, \dots, n, N=2, 3, \dots$ )

が成立する。ここで  $P_N^{(i)}$  は  $a_{k_0 k_1 \dots k_n}^{(i)}, g_l^{(i)}$  ( $i=1, 2, \dots, n; l=1, 2, \dots, N-1$ ) の多項式である。

$$(2.3) \quad C_{i1} e^{i\alpha_{i1}} = a_{10\dots 0}^{(i)} \quad (C_{i1} > 0),$$

$$(2.4) \quad C_{i2} e^{i\alpha_{i2}} = a_{00\dots m\dots 0}^{(i)} \quad (C_{i2} > 0),$$

$$(2.5) \quad C_{i3} = \sqrt{C_{i1} / C_{i2}},$$

$$(2.6) \quad \varphi_i = \alpha_{i1} - \alpha_{i2} + \pi$$

( $i=1, 2, \dots, n$ )

と表わす (2.1) の

$$(2.7) \quad g_{1\nu}^{(i)} = C_{i3} e^{i \frac{2\nu\pi + \varphi_i}{m}} \quad (\nu=0, 1, 2, \dots, m-1)$$

を用いる。すると (2.2) の (2.1) は

$$(2.8) \quad g_i \approx g_{1\nu}^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_2^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \dots + g_N^{(i)} x^{-\frac{N}{m}} + \dots$$

の形の形式解を得る。

$$(2.9) \quad \begin{cases} p_N^{(i)} = g_{1N}^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_{2N}^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \dots + g_{N-1N}^{(i)} x^{-\frac{N-1}{m}}, \\ z = z + p_N \end{cases}$$

と置く。このとき、 $z$  に関する差分方程式は

$$(2.10) \quad \Delta z = f(x, z + p_N) - \Delta p_N$$

と  $z_0 = 1$  を

$$(2.11) \quad f_i(x, z + p_N) = f_i(x, p_N) + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_i(x, p_N)}{\partial y_s} z_s + \psi_{iN}(x^{\frac{1}{m}}, z)$$

( $i=1, 2, \dots, n$ )

がある。すると

$$(2.12) \quad \psi_{iN}(x^{\frac{1}{m}}) = f_i(x, p_N) - \Delta p_N^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

と表す。 (2.10) は

$$(2.13) \quad \Delta z_0 = \psi_{0N}(x^{\frac{1}{m}}) + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_0(x, p_N)}{\partial y_s} z_s + \psi_{0N}(x^{\frac{1}{m}}, z)$$

( $i=1, 2, \dots, n$ )

$$x = r e^{i\theta} \text{ と置く。 すると } x^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\theta}{m}}. \quad x^{\frac{1}{m}} \text{ の } 1-$$

マシンの  $p$  枚目を

$$\Delta p : (2p-1)\pi < \theta < (2p+1)\pi \quad (p=0, 1, 2, \dots, m-1)$$

と置く。 1/2 以上大きい  $R_1$ , 1/2 小さい  $r_1$  を  $\alpha$

$$D_p : |x| > R_1, \quad x \in \Delta_p,$$

$$E_p : |x| > R_1, \quad x \in \Delta_p, \quad \|z\| < r_1$$

と表すは、  $x^{1+\frac{N-1}{m}} \psi_N(x^{\frac{1}{m}})$  と表す  $\frac{\partial f_i(x, P_N)}{\partial g_s}$  は  $D_p$  で正則

$$(2.14) \quad \frac{\partial f_i(x, P_N)}{\partial g_s} = \sum k_s a_{k_0 k_1 \dots k_n}^{(i)} (P_N^{(1)})^{k_1} \dots (P_N^{(s)})^{k_{s-1}} \dots (P_N^{(n)})^{k_n},$$

$$(2.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_i(x, P_N)}{\partial g_i} = m a_{0 \dots 0 m \dots 0}^{(i)} (g_i^{(i)})^{m-1} x^{-\frac{m-1}{m}} + O(x^{-1}), \\ \frac{\partial f_i(x, P_N)}{\partial g_s} = O(x^{-1}) \quad (s \neq i) \end{cases}$$

が成立する。 すると  $\psi_N(x^{\frac{1}{m}}, z)$  は  $E_p$  で正則

$$(2.16) \quad \psi_N(x^{\frac{1}{m}}, z) = O(\|z\|^2).$$

§3. 漸近解の存在. この節では, (2.13) が  $D_p$  に含まれる  
ある領域  $T_{pN}$  において

$$(3.1) \quad \|z\| \leq \frac{M_N}{|x|^{\frac{N}{m}}}$$

を満たす正則な解をもつことの証明を中心にあげる. ことに  
 $M_N$  は適当に整数が正数とする. 簡単のため, (2.13) で  
 $N$  を省略して

$$(3.2) \quad \Delta Z_i = C_i(x^{\frac{1}{m}}) + \sum_s \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_s} Z_s + \psi_i(x^{\frac{1}{m}}, Z) \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

と仮定。  $\Delta Z_i = Z_i(x+1) - Z_i(x)$  なる  $Z_i$  が (3.2) は

$$(3.3) \quad Z_i(x+1) = \left(1 + \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_i}\right) Z_i \\ + C_i(x^{\frac{1}{m}}) + \sum_{s \neq i} \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_s} Z_s + \psi_i(x^{\frac{1}{m}}, Z) \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

と仮定。  $Z_i = u_i x^{-\frac{N}{m}}$

$$(3.4) \quad Z_i = u_i x^{-\frac{N}{m}} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

と仮定。 (3.3) に代入すれば  $u_i$  に関する差分方程式

$$(3.5) \quad (1+x^{-1})^{-\frac{N}{m}} u_i(x+1) = \left(1 + \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_i}\right) u_i(x) \\ + x^{\frac{N}{m}} C_i(x^{\frac{1}{m}}) + \sum_{s \neq i} \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_s} u_s(x) + x^{\frac{N}{m}} \psi_i(x^{\frac{1}{m}}, u(x) x^{-\frac{N}{m}})$$

(3.5) の  $O_p$  のある領域  $\Gamma_{p, N}$  において  $\|u\| \leq M_N$  とする正則な解を  $u_i$  とする。  $u_i$  は  $u_i$  の関数空間  $U_N$  の基底を  $u_i$  とする。  $u_i$  の基底 (3.5) を基底  $i \sim$  次  $N$  次元

$$(3.6) \quad \bar{u}_i(x) = T_i(u(x)) \\ = \left\{ (1+x^{-1})^{-\frac{N}{m}} u_i(x+1) - \sum_{s \neq i} \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_s} u_s - x^{\frac{N}{m}} C_i(x^{\frac{1}{m}}) \right\}$$

$$= x^{\frac{N}{m}} \psi_i(x^{\frac{1}{m}}, x x^{-\frac{N}{m}}) \left\{ \left( 1 + \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_i} \right)^{-1} \right. \\ \left. (i=1, 2, \dots, n) \right.$$

と考へる。すなわち  $M_N$  は適当に大とせしとき、

$$x \in T_{PN} \quad \text{すなわち} \quad \|u(x)\| \leq M_N \quad \text{および} \quad \|\bar{u}(x)\| \leq M_N$$

とすると、この性質の  $\gamma$  がある。

こゝで  $\gamma$  の準備をしておく。(2.15) より

$$(3.7) \quad (1+x^{-1})^{-\frac{N}{m}} \left( 1 + \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_i} \right)^{-1} = 1 - m a_{00 \dots m-0}^{(i)} (g_{10})^{m-1} x^{-\frac{m-1}{m}} + \dots$$

すなわち (2.4), (2.7) より

$$m a_{00 \dots m-0}^{(i)} (g_{10})^{m-1} = m c_{12} c_{13} e^{m-1} i^{\frac{(m-1)}{m}} (2\sqrt{\pi} + \varphi_i + \frac{m}{m-1} \alpha_{i2})$$

すなわち  $\gamma$  は

$$c_i = m c_{12} c_{13} e^{m-1}, \quad \lambda_i = \varphi_i + \frac{m}{m-1} \alpha_{i2}$$

と表はす。すなわち  $x^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}} e^{i \frac{\theta}{m}}$  であり (3.7) の左辺は

$$1 - c_i r^{-\frac{m-1}{m}} e^{-i \frac{(m-1)}{m} (\theta - (2\sqrt{\pi} + \lambda_i))} + \dots$$

と表はす。すなわち  $\gamma$  の値は

$$(3.8) \quad \left| (1+x^{-1})^{-\frac{N}{m}} \left( 1 + \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_i} \right)^{-1} \right|^{-1}$$

$$= 1 - \left[ C_i \cos \left\{ \left( \frac{m-1}{m} \right) (\theta - (2\nu\pi + \lambda_i)) \right\} - F_i(r^{-\frac{1}{m}}) \right] r^{-\frac{m-1}{m}}$$

となる。こゝに  $F_i(r^{-\frac{1}{m}}) = O(r^{-\frac{1}{m}})$ .

次の Lemma を準備する。

Lemma    任意の整数  $A$  と  $m (\geq 2)$  および任意の実数  $\lambda$   
(ただし,  $m=2$  のときは  $\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{1}{2}$  が整数である場合を除く)  
に對して不等式

$$(3.9) \quad -A - \frac{1}{4} < \frac{m-1}{m} \left\{ \nu - \left( p - \frac{\lambda}{2\pi} \right) \right\} < -A + \frac{1}{4}$$

を満たす整数  $\nu$  ( $0 \leq \nu \leq m-1$ ) と  $A$  が存在する。

証明

$$I_1 = \left\{ \frac{1}{4} - \left( \frac{m-1}{m} \right) \left( p - \frac{\lambda}{2\pi} \right) \right\} m,$$

$$I_2 = - \left\{ \frac{1}{4} + \left( \frac{m-1}{m} \right) \left( p - \frac{\lambda}{2\pi} \right) \right\} m$$

とおくは

$$I_1 - I_2 = \frac{m}{2}$$

が成立つ。こゝから

$$(3.10) \quad -\frac{1}{4} + \left( \frac{m-1}{m} \right) \left( p - \frac{\lambda}{2\pi} \right) < k < \frac{1}{4} - \left( \frac{m-1}{m} \right) \left( p - \frac{\lambda}{2\pi} \right)$$

を満たす整数  $k$  に對し

$$(3.11) \quad k = Bm + \nu$$

を満たす整数  $B$  および  $\nu$  ( $0 \leq \nu \leq m-1$ ) を選ぶ。 (3.11) を

(3.10) に代入すれば

$$-\frac{1}{4} - \left(\frac{m-1}{m}\right) \left\{ \nu - \left(p - \frac{\lambda}{2\pi}\right) \right\} < B + \nu$$

$$< \frac{1}{4} - \left(\frac{m-1}{m}\right) \left\{ \nu - \left(p - \frac{\lambda}{2\pi}\right) \right\}$$

が成立つ。こゝで  $A = B + \nu$  とおけば (3.9) が成立つことがわかる。■

$\Delta p$  ( $p = 0, 1, \dots, m-1$ ) に含まれる領域  $\Gamma_{pN}$  で (3.5) の有界な正則解の存在を示すには 形式解

$$f_i \approx g_{1N}^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_{2N}^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \dots + g_{NN}^{(i)} x^{-\frac{N}{m}} + \dots$$

の中の  $g_{iN}^{(i)}$  の  $\nu$  は  $p$  に関係して選ばなければならないことに注意する。また  $\lambda = \lambda_i$  は  $i$  に関係するので  $\nu$  ( $A$  も同様) は  $i$  に関係する。こゝから

$$-A_i - \frac{1}{4} < \frac{m-1}{m} \left( \nu_i - \left(p - \frac{\lambda_i}{2\pi}\right) \right) < -A_i + \frac{1}{4}$$

とおく。十分小さい  $\varepsilon$  とすれば

$$(3.12) \quad 2A_i\pi - \frac{\pi}{2} + \varepsilon < \frac{m-1}{m} (2p\pi - (2\nu_i\pi + \lambda_i)) < 2A_i\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

が成立つ。このとき

$$\left(\frac{m}{m-1}\right) \left(2A_i\pi - \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) + 2\nu_i\pi + \lambda_i$$

$$< 2p\pi < \left(\frac{m}{m-1}\right) \left(2A_i\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + 2V_i\pi + \lambda_i$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

2) 3) 4)

$$r_{ip} = \max_i \left[ \left(\frac{m}{m-1}\right) \left(2A_i\pi - \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) + 2V_i\pi + \lambda_i \right],$$

$$r_{2p} = \min_i \left[ \left(\frac{m}{m-1}\right) \left(2A_i\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + 2V_i\pi + \lambda_i \right]$$

と仮定は

$$r_{ip} < 2p\pi < r_{2p}$$

が成り立つ。  $i \in \mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$

$$\Delta_p' = \{x; r_{ip} < \Theta < r_{2p}\} \quad (\Theta = \arg x)$$

の (A) 3) と仮定は

$$2A_i\pi - \frac{\pi}{2} + \varepsilon < \frac{m-1}{m} \left( \Theta - (2V_i\pi + \lambda_i) \right) < 2A_i\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

$x \in \Delta_p'$  のとき

$$(3.13) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \leq \cos \left[ \left(\frac{m-1}{m}\right) \left( \Theta - (2V_i\pi + \lambda_i) \right) \right].$$

十分大きい正数  $R_N$  により

$$\Gamma_{pN} : |x| > R_N, \quad x \in \Delta_p'$$

とあるは  $x \in T_{pN}$  のとき

$$\begin{aligned} & \left| (1+x^{-1})^{\frac{N}{m}} \left( 1 + \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_i} \right) \right|^{-1} \\ & \leq 1 - \left( C_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) - F_i(x^{-\frac{1}{m}}) \right) r^{-\frac{m-1}{m}} \\ & \leq 1 - \frac{C_i}{2} r^{-\frac{m-1}{m}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \\ & \leq 1 - C r^{-\frac{m-1}{m}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \end{aligned}$$

が成立する。  $\therefore$   $C = \frac{1}{2} \max C_i$  である。  $-\bar{A}$

$$x^{\frac{N}{m}} C_i(x) \left( 1 + \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_i} \right)^{-1} = O(r^{-\frac{m-1}{m}}),$$

$$x^{\frac{N}{m}} \psi_i(x^{\frac{1}{m}}, \mu x^{-\frac{N}{m}}) \left( 1 + \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_i} \right)^{-1} = O(r^{-1}) \quad (N > m),$$

$$\sum_{s \neq i} \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_s} \left( 1 + \frac{\partial f_i(x, P)}{\partial y_i} \right)^{-1} = O(r^{-1})$$

であるのより十分大きい  $M_N$  をとり

$$\|u(x)\| \leq M_N \quad (x \in T_{pN})$$

のとき (3.6) より

$$\|\bar{u}(x)\| \leq M_N \quad (x \in T_{pN})$$

さらに  $\bar{u}$  に対して  $T_{pN}$  を含む  $R_N$  上十分大きい  $r$  を

おくとおとある。

従って (3.4) は  $T_{pN}$  上

$$\|u(x)\| \leq M_N$$

を満たす正則解をもつことが示されたので,  $\Gamma_{pN}$  は

$$\|Z_N\| \leq M_N |x|^{-\frac{N}{m}}$$

を満たす (3.3) の正則解の存在がいえる。またこのような解はただ一つであることが証明されるので

$$\Gamma_p = \bigcup_{N=m+1}^{\infty} \Gamma_{pN}$$

と書くことにしよう。  $\Gamma_p$  ( $p=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) において (1.1) の解析的漸近解

$$(3.14) \quad y_i \approx g_{1\nu}^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_{2\nu}^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \dots + g_{N\nu}^{(i)} x^{-\frac{N}{m}} + \dots$$

$$(\nu=1, 2, \dots, n)$$

の存在が示される。ここで  $\nu = (\nu_i)$  であり  $\nu_i$  は  $p$  に関する整数で選ばれてゐるので (3.14) は

$$(3.15) \quad y_i \approx g_{1\nu}^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_{2\nu}^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \dots + g_{N\nu}^{(i)} x^{-\frac{N}{m}} + \dots$$

$$(\nu=1, 2, \dots, n)$$

と書く方がよいであろう。また上の  $\Gamma_p$  は

$$\Gamma_p = \{x; |x| > R \quad (R = \inf_{N \geq m+1} R_N), \arg x \in \Delta'_p\}$$

である。