

SIMULTANEOUS EXTENSIONS OF SELBERG AND BUZANO INEQUALITIES

Masatoshi Fujii

Osaka Kyoiku University

mfujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

Akemi Matsumoto

Nose senior high School

m@nose.osaka-c.ed.jp

Masaru Tominaga

Osaka Kyoiku University

tommy@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

ABSTRACT. 本稿では、次の通り Selberg 不等式と Buzano 不等式の同時拡張を与える: 直交条件 $\langle y_k, z_i \rangle = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2$) を満たす Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の y_1, y_2 と 0 でない元 $\{z_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ に対して

$$|\langle x, y_1 \rangle \langle x, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(y_1, y_2) \sum_i \frac{|\langle x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j \rangle|} \leq \mathcal{B}(y_1, y_2) \|x\|^2$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。但し、 $\mathcal{B}(y_1, y_2) := \frac{1}{2}(\|y_1\| \|y_2\| + |\langle y_1, y_2 \rangle|)$ である。
応用として、Heinz-Kato-Furuta 不等式の改良についても議論する。

1. はじめに

本稿において $\mathcal{H}$ を Hilbert space とする。[8] で K. and F. Kubo は、Bessel 不等式の拡張としての Selberg 不等式を発掘し、Geršgorin 定理を用いることにより簡潔にそれを証明した:

Selberg 不等式. $\mathcal{H}$ 上の 0 でない元 $\{z_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ に対して

$$(SI) \quad \sum_i \frac{|\langle x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j \rangle|} \leq \|x\|^2$$

が、任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

Selberg 不等式と Heinz-Kato-Furuta 不等式との同時拡張を与えるために [3] では、次の結果が導かれた:

Lemma A. $y \in \mathcal{H}$ が 0 でない元 $\{z_i; i = 1, 2, \dots, n\} \subset \mathcal{H}$ に対して $\langle y, z_i \rangle = 0$ を満たすとき

$$(1.1) \quad |\langle x, y \rangle|^2 + \sum_i \frac{|\langle x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j \rangle|} \|y\|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

これは、Schwarz 不等式と Selberg 不等式の同時拡張とみなせる。

次に Buzano 不等式 (BI) を提示する:

$$(BI) \quad |\langle x, y_1 \rangle \langle x, y_2 \rangle| \leq \frac{1}{2}(\|y_1\| \|y_2\| + |\langle y_1, y_2 \rangle|) \|x\|^2.$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A63.

Key words and phrases. Selberg inequality, Buzano inequality, Heinz-Kato-Furuta inequality and Furuta inequality.

これは、 $y_1 = y_2$ のとき Schwarz 不等式である。

本稿では、Selberg 不等式と Buzano 不等式の同時拡張として、Lemma A の拡張を導く。これを用いて、Heinz-Kato-Furuta 不等式の改良についても議論する。

2. SELBERG 不等式と BUZANO 不等式の同時拡張

初めに、Buzano 不等式とその等号条件を与える。簡素化のため、 $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ に対して、 $\mathcal{B}(y_1, y_2)$ を次のように定める：

$$\mathcal{B}(y_1, y_2) := \frac{1}{2}(\|y_1\| \|y_2\| + |\langle y_1, y_2 \rangle|).$$

Lemma 2.1. y_1, y_2 を $\mathcal{H}$ の元とする。このとき、次の (BI) が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ：

$$|\langle x, y_1 \rangle \langle x, y_2 \rangle| \leq \mathcal{B}(y_1, y_2) \|x\|^2.$$

更に、 $\{y_1, y_2\}$ が線形独立ならば、(BI) の等号が $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ必要十分条件は、 $x = a(\|y_2\| y_1 + e^{i\theta} \|y_1\| y_2)$ となるスカラー a が存在することである。但し、 $\theta = \arg \langle y_1, y_2 \rangle$ とする。また、 $\{y_1, y_2\}$ が線形従属ならば、(BI) の等号が $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ必要十分条件は、 $x = ay_1$ となるスカラー a が存在することである。

Proof. 不等式 (BI) の証明を確認する。 $\|x\| = 1$ を仮定する。このとき

$$\begin{aligned} |\langle y_1, x \rangle \langle x, y_2 \rangle| &= \left| \left\langle \langle y_1, x \rangle x - \frac{1}{2} y_1, y_2 \right\rangle + \frac{1}{2} \langle y_1, y_2 \rangle \right| \\ &\leq \left| \left\langle \langle y_1, x \rangle x - \frac{1}{2} y_1, y_2 \right\rangle \right| + \frac{1}{2} |\langle y_1, y_2 \rangle| \\ &\leq \left\| \langle y_1, x \rangle x - \frac{1}{2} y_1 \right\| \|y_2\| + \frac{1}{2} |\langle y_1, y_2 \rangle| \\ &= \frac{1}{2} \|y_1\| \|y_2\| + \frac{1}{2} |\langle y_1, y_2 \rangle| \\ &= \mathcal{B}(y_1, y_2). \end{aligned}$$

さて $\{y_1, y_2\}$ が線形独立であると仮定する。ここで、(BI) の等号が成り立つ必要十分条件は、上記不等式の等号が成り立つことである。その一つ目 (resp. 二つ目) の不等式の等号が成り立つための必要十分条件は

$$\arg \langle 2 \langle y_1, x \rangle x - y_1, y_2 \rangle = \arg \langle y_1, y_2 \rangle := \theta$$

(resp. 次を満たすスカラー k が存在することである：

$$ky_2 = 2 \langle y_1, x \rangle x - y_1).$$

故に、 $\arg k = \theta$ と

$$|k| \|y_2\| = \|2 \langle y_1, x \rangle x - y_1\| = \|y_1\|$$

つまり、 $k = \frac{\|y_1\|}{\|y_2\|} e^{i\theta}$ となることである。

次に、元 x をあるスカラー a, b に対して $x = ay_1 + by_2$ とする。 $ky_2 = 2 \langle y_1, x \rangle x - y_1 = 2b \langle y_1, x \rangle y_2 + 2a \langle y_1, x \rangle y_1 - y_1$ そして $\{y_1, y_2\}$ が線形独立であるから、

$$2a \langle y_1, x \rangle = 1, \quad 2b \langle y_1, x \rangle = k,$$

よって、 $b = ak$ である。それゆえ $x = a(y_1 + ky_2)$ 、つまり、ある c と $\theta = \arg \langle y_1, y_2 \rangle$ に対して $x = c(\|y_2\| y_1 + e^{i\theta} \|y_1\| y_2)$ となる。

逆は、 $x = \|y_2\| y_1 + e^{i\theta} \|y_1\| y_2$ ($\theta = \arg \langle y_1, y_2 \rangle$) ならば、不等式 (BI) での等号が成り立つことから容易にわかる。実際に、次の等式が確認できる:

$$|\langle y_1, x \rangle \langle x, y_2 \rangle| = 4\mathcal{B}(y_1, y_2)^2 \|y_1\| \|y_2\|,$$

$$\|x\|^2 = 4\mathcal{B}(y_1, y_2) \|y_1\| \|y_2\|.$$

$\{y_1, y_2\}$ が線形従属である場合は、明らかである。 □

次に、Selberg 不等式の等号条件について確認する ([2, Theorem 2] 参照):

Lemma 2.2. $\{z_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ を互いに直行しない $\mathcal{H}$ の 0 でない元とする。このとき、等式

$$\sum_i \frac{|\langle x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j \rangle|} = \|x\|^2$$

が $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ必要十分条件は、任意の i, j に対して $\langle a_i z_i, a_j z_j \rangle \geq 0$ 、 $|a_i| = |a_j|$ となるスカラー $a_1, \dots, a_n$ に対して $x = \sum a_i z_i$ を満たすものが存在することである。

次に、Selberg 不等式と Buzano 不等式の同時拡張について考察する。

Theorem 2.3. $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ が与えられた 0 でない元 $\{z_i; i = 1, 2, \dots, n\} \subset \mathcal{H}$ に対して $\langle y_k, z_i \rangle = 0$ ($k = 1, 2$) を満たすとき

$$(2.1) \quad |\langle x, y_1 \rangle \langle x, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(y_1, y_2) \sum_i \frac{|\langle x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j \rangle|} \leq \mathcal{B}(y_1, y_2) \|x\|^2$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

更に、この不等式において等号が成り立つ必要十分条件は、 x_1 (resp. x_2) が Lemma 2.1 (resp. Lemma 2.2) での (BI) (resp. (SI)) の等号条件を満たし $x = x_1 \oplus x_2$ となることである。

Proof. $a_i := \frac{\langle x, z_i \rangle}{\sum_j |\langle z_i, z_j \rangle|}$, $u := x - \sum_i a_i z_i$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \left\| x - \sum_i a_i z_i \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_i \bar{a}_i \langle x, z_i \rangle + \left\| \sum_i a_i z_i \right\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 - 2 \sum_i \frac{|\langle x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j \rangle|} + \sum_{i,j} |a_i| |a_j| |\langle z_i, z_j \rangle| \\ &\leq \|x\|^2 - 2 \sum_i \frac{|\langle x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j \rangle|} + \sum_i |a_i|^2 \sum_j |\langle z_i, z_j \rangle| \end{aligned}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_i \frac{|\langle x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j \rangle|}.$$

両辺に $\mathcal{B}(y_1, y_2)$ を乗じると、Buzano 不等式により

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(y_1, y_2) \left(\|x\|^2 - \sum_i \frac{|\langle x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle z_i, z_j \rangle|} \right) &\geq \mathcal{B}(y_1, y_2) \|u\|^2 \\ &\geq |\langle u, y_1 \rangle \langle u, y_2 \rangle| = |\langle x, y_1 \rangle \langle x, y_2 \rangle|, \end{aligned}$$

よって、不等式 (2.1) が得られる。

等号条件は、Lemmas 2.1 と 2.2 により明らかである。 $\square$

3. 一般化

古田 [6, Theorem 2] は、次の Selberg 不等式の拡張を示した： T を $\mathcal{H}$ 上の作用素、その核を $\ker(T)$ とする。このとき、与えられた $z_i \notin \ker(T^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) に対して

$$(3.1) \quad \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i \rangle|}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j \rangle|} \leq \| |T|^\alpha x \|^2$$

が、任意の $x \in \mathcal{H}$ と $\alpha \in [0, 1]$ に対して成り立つ。

Corollary 3.1. $T = U|T|$ を $\mathcal{H}$ 上の作用素 T の極分解とし、 $z_i \notin \ker(T^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)、 $\alpha \in [0, 1]$ とする。このとき、 $\langle U|T|^{1-\alpha} y_k, z_i \rangle = 0$ ($k = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n$) であれば

$$(3.2) \quad |\langle |T|^\alpha x, y_1 \rangle \langle |T|^\alpha x, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(y_1, y_2) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j \rangle|} \leq \mathcal{B}(y_1, y_2) \| |T|^\alpha x \|^2$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

Proof. Theorem 2.3 において x, z_i をそれぞれ $|T|^\alpha x, |T|^{1-\alpha} U^* z_i$ に置き換えればよい。このとき、直交条件は満たされる。 $\square$

次に、(3.1) に関して別の改良を提案する：

Corollary 3.2. $T = U|T|$ を $\mathcal{H}$ 上の作用素 T の極分解とし、 $z_i \notin \ker(T^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)、 $\alpha, \beta \geq 0$ は、 $\alpha + \beta \geq 1 \geq \alpha$ と満たすとする。このとき、 $k = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n$ に対して $\langle |T^*|^{\beta+1-\alpha} y_k, z_i \rangle = 0$ ならば

$$\begin{aligned} &|\langle |T|^{\alpha+\beta-1} x, y_1 \rangle \langle |T|^{\alpha+\beta-1} x, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j \rangle|} \\ &\leq \mathcal{B}(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \| |T|^\alpha x \|^2. \end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。特に、 $\alpha \in [0, 1]$ に対して $\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} y_k, z_i \rangle = 0$ ($k = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n$) ならば

$$|\langle Tx, y_1 \rangle \langle Tx, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(|T^*|^{(1-\alpha)} y_1, |T^*|^{1-\alpha} y_2) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j \rangle|}$$

$$\leq \mathcal{B}(|T^*|^{1-\alpha}y_1, |T^*|^{1-\alpha}y_2) \| |T|^\alpha x \|^2$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

Proof. Theorem 2.3 において x, z_i, y_k をそれぞれ $|T|^\alpha x, |T|^{1-\alpha}U^*z_i, U^*|T|^\beta y_k$ に置き換えればよい。直交条件は、次により満たされる：

$$\langle |T^*|^\beta y_k, |T^*|^{1-\alpha}z_i \rangle = \langle |T^*|^{\beta+1-\alpha}y_k, z_i \rangle = 0.$$

□

Corollary 3.3. $T = U|T|$ を $\mathcal{H}$ 上の作用素 T の極分解とし、 $z_i \notin \ker(T)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)、 $\alpha, \beta \geq 0$ は、 $\alpha + \beta \geq 1$ と満たすとする。このとき、 $\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}z_i, y_k \rangle = 0$ ($k = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n$) ならば、

$$\begin{aligned} & |\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y_1 \rangle \langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \sum_i \frac{|\langle |T|^{2\alpha}x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T|^{2\alpha}z_i, z_j \rangle|} \\ & \leq \mathcal{B}(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \| |T|^\alpha x \|^2 \end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

Proof. Theorem 2.3 において x, z_i, y_k をそれぞれ $U|T|^\alpha x, U|T|^\alpha z_i, |T^*|^\beta y_k$ に置き換えればよい。直交条件が満たされ、その結果、不等式が得られる。□

4. EXTENSIONS OF HEINZ-KATO-FURUTA 不等式

[6] で古田は、Heinz-Kato 不等式を拡張し、次の不等式を示した：

Heiz-Kato-Furuta 不等式. A と B を $\mathcal{H}$ 上の正作用素とする。 T が $T^*T \leq A^2$ と $TT^* \leq B^2$ を満たすとき、

$$|\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y \rangle| \leq \|A^\alpha x\| \|B^\beta y\|$$

が任意の $x, y \in \mathcal{H}$ と $\alpha + \beta \geq 1$ を満たす $\alpha, \beta \in [0, 1]$ に対して成り立つ。加えて、 A と B が逆作用素ならば、条件 $\alpha + \beta \geq 1$ を必要としない。

更に、この不等式は、Selberg 不等式に絡んで様々な拡張がなされている。本章では、前章の結果を適用することにより、Heinz-Kato-Furuta 不等式の新たな拡張を提示したい。そのために次の補題を用意する：

Lemma 4.1. ある $B \geq 0$ が $TT^* \leq B^2$ を満たしているならば、 $\beta \in [0, 1]$ に対して

$$\mathcal{B}(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \leq \|B^\beta y_1\| \|B^\beta y_2\|$$

が任意の $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

Proof. Löwner-Heinz 不等式により

$$|T^*|^{2\beta} \leq B^{2\beta} \quad \text{for } \beta \in [0, 1]$$

なので、 $\| |T^*|^\beta y \| \leq \|B^\beta y\|$ が任意の $y \in \mathcal{H}$ に対して満たされる。よって、

$$\mathcal{B}(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \leq \| |T^*|^\beta y_1 \| \| |T^*|^\beta y_2 \| \leq \|B^\beta y_1\| \|B^\beta y_2\|.$$

□

初めに、次の結果は、Corollary 3.1 と Löwner-Heinz 不等式から導かれる:

Corollary 4.2. $T = U|T|$ を $\mathcal{H}$ 上の作用素 T の極分解とし、 $z_i \notin \ker(T^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)、 $\alpha \in [0, 1]$ とする。正作用素 A が $T^*T \leq A^2$ を満たし、 $k = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n$ に対して $\langle U|T|^{1-\alpha}y_k, z_i \rangle = 0$ ならば、

$$(4.1) \quad |\langle |T|^\alpha x, y_1 \rangle \langle |T|^\alpha x, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(y_1, y_2) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j \rangle|} \leq \mathcal{B}(y_1, y_2) \|A^\alpha x\|^2$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

更に、次の不等式は、Corollary 3.2 と Lemma 4.1 から導かれる:

Corollary 4.3. $T = U|T|$ を $\mathcal{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。 $z_i \notin \ker(T^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)、 $\alpha, \beta \in [0, 1]$ は $\alpha + \beta \geq 1$ を満たすとする。作用素 $A, B \geq 0$ が $T^*T \leq A^2$ と $TT^* \leq B^2$ を満たし、 $k = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n$ に対して $\langle |T^*|^{\beta+1-\alpha}y_k, z_i \rangle = 0$ ならば、

$$\begin{aligned} & |\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y_1 \rangle \langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j \rangle|} \\ & \leq \|B^\beta y_1\| \|B^\beta y_2\| \|A^\alpha x\|^2 \end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。特に、 $\alpha \in [0, 1]$ に対して $\langle |T^*|^{2(1-\alpha)}y_k, z_i \rangle = 0$ ならば、

$$\begin{aligned} & |\langle Tx, y_1 \rangle \langle Tx, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(|T^*|^{(1-\alpha)}y_1, |T^*|^{1-\alpha}y_2) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_i, z_j \rangle|} \\ & \leq \|B^{1-\alpha}y_1\| \|B^{1-\alpha}y_2\| \|A^\alpha x\|^2 \end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

更に、次の不等式は、Corollary 3.3 と Lemma 4.1 から導かれる:

Corollary 4.4. $T = U|T|$ を $\mathcal{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。 $z_i \notin \ker(T^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)、 $\alpha, \beta \geq 0$ は $\alpha + \beta \geq 1$ と満たすとする。作用素 $A, B \geq 0$ が $T^*T \leq A^2$ と $TT^* \leq B^2$ を満たし、 $k = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n$ に対して $\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}z_i, y_k \rangle = 0$ ならば、

$$\begin{aligned} & |\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y_1 \rangle \langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \sum_i \frac{|\langle |T|^{2\alpha}x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T|^{2\alpha}z_i, z_j \rangle|} \\ & \leq \|B^\beta y_1\| \|B^\beta y_2\| \|A^\alpha x\|^2 \end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

5. FURUTA 不等式の応用

Heinz-Kato-Furuta 不等式の更なる拡張を与えるために、次の Furuta 不等式 ([4], [1], [5], [7]) を適用する:

Furuta 不等式. $A \geq B \geq 0$ ならば、任意の $r \geq 0$ に対して

$$(A^r A^p A^r)^{1/q} \geq (A^r B^p A^r)^{1/q},$$

$$(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq (B^r B^p B^r)^{1/q}$$

が、 $(1+2r)q \geq p+2r$ を満たす $p \geq 0$ と $q \geq 1$ に対して成り立つ。

次の結果は、Corollary 3.2 の更なる拡張である:

Theorem 5.1. A, B を $\mathcal{H}$ 上の正作用素とし、 T を $T^*T \leq A^2$ を満たす作用素とする。このとき、任意の $r, s \geq 0$ に対して

$$(5.1) \quad \begin{aligned} & |\langle T|T|^{(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta-1}x, y_1 \rangle \langle T|T|^{(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta-1}x, y_2 \rangle| \\ & + B(|T^*|^{(1+2s)\beta}y_1, |T^*|^{(1+2s)\beta}y_2) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha-2r\alpha)}z_i, z_j \rangle|} \\ & \leq B(|T^*|^{(1+2s)\beta}y_1, |T^*|^{(1+2s)\beta}y_2) \left\langle (|T|^{2r} A^{2p} |T|^{2r})^{\frac{(1+2r)\alpha}{p+2r}} x, x \right\rangle \end{aligned}$$

が任意の $p, q \geq 1$ 、 $(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta \geq 1 \geq (1+2r)\alpha$ を満たす $\alpha, \beta \in [0, 1]$ 、 $z_i \notin \ker(T^*)$ と $\langle |T^*|^{(1+2s)\beta+1-(1+2r)\alpha}y_k, z_i \rangle = 0$ を満たす $x, y_k, z_i \in \mathcal{H}$ ($k = 1, 2, i = 1, \dots, n$) に対して成り立つ。

Proof. Corollary 3.2 において、 α (resp. β) を $\alpha_1 = (1+2r)\alpha$ (resp. $\beta_1 = (1+2s)\beta$) に置き換えることにより

$$\begin{aligned} & |\langle T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1}x, y_1 \rangle \langle T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1}x, y_2 \rangle| + B(|T^*|^{\beta_1}y_1, |T^*|^{\beta_1}y_2) \sum_i \frac{|\langle Tx, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T^*|^{2(1-\alpha_1)}z_i, z_j \rangle|} \\ & \leq B(|T^*|^{\beta_1}y_1, |T^*|^{\beta_1}y_2) \langle |T|^{2\alpha_1}x, x \rangle \end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。次に、 $|T|^2 \leq A^2$ と $q = \frac{p+2r}{(1+2r)\alpha}$ に対して、Furuta 不等式を適用することにより

$$|T|^{2\alpha_1} = |T|^{2(1+2r)\alpha} \leq (|T|^{2r} A^{2p} |T|^{2r})^{\frac{(1+2r)\alpha}{p+2r}}.$$

これらより、不等式 (5.1) が得られる。 $\square$

同様に、Corollary 3.3 により次の更なる拡張が導かれる:

Theorem 5.2. A, B を $\mathcal{H}$ 上の正作用素とし、 T を $T^*T \leq A^2$ を満たす作用素とする。このとき、任意の $r, s \geq 0$ に対して

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & |\langle T|T|^{(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta-1}x, y_1 \rangle \langle T|T|^{(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta-1}x, y_2 \rangle| \\ & + B(|T^*|^{(1+2s)\beta}y_1, |T^*|^{(1+2s)\beta}y_2) \sum_i \frac{|\langle |T|^{2(1+2r)\alpha}x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T|^{2(1+2r)\alpha}z_i, z_j \rangle|} \\ & \leq B(|T^*|^{(1+2s)\beta}y_1, |T^*|^{(1+2s)\beta}y_2) \left\langle (|T|^{2r} A^{2p} |T|^{2r})^{\frac{(1+2r)\alpha}{p+2r}} x, x \right\rangle \end{aligned}$$

が任意の $p, q \geq 1$, $(1+2r)\alpha + (1+2s)\beta \geq 1$ を満たす $\alpha, \beta \in [0, 1]$ 、 $z_i \notin \ker(T)$ と $\langle T|T|^{(1+2r)\alpha+(1+2s)\beta-1}z_i, y_k \rangle = 0$ を満たす $x, y_k, z_j \in \mathcal{H}$ ($k = 1, 2, i = 1, \dots, n$) に対して成り立つ。

Proof. Corollary 3.3 において、 α (resp. β) を $\alpha_1 = (1+2r)\alpha$ (resp. $\beta_1 = (1+2s)\beta$) に置き換えることにより

$$\begin{aligned} & |\langle T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1}x, y_1 \rangle \langle T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1}x, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(|T^*|^{\beta_1}y_1, |T^*|^{\beta_1}y_2) \sum_i \frac{|\langle |T|^{2\alpha_1}x, z_i \rangle|^2}{\sum_j |\langle |T|^{2\alpha_1}z_i, z_j \rangle|} \\ & \leq \mathcal{B}(|T^*|^{\beta_1}y_1, |T^*|^{\beta_1}y_2) \langle |T|^{2\alpha_1}x, x \rangle. \end{aligned}$$

$|T|^2 \leq A^2$ に対して、Furuta 不等式を適用することにより

$$|T|^{2\alpha_1} = |T|^{2(1+2r)\alpha} \leq (|T|^{2r} A^{2p} |T|^{2r})^{\frac{(1+2r)\alpha}{+2r}}.$$

これらより、不等式 (5.2) が得られる。 □

REFERENCES

- [1] M. Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator theory **23**(1990), 67–72.
- [2] M. Fujii, K. Kubo and S. Otani, *A graph theoretic observation on the Selberg inequality*, Math. Japon., **35**(1990), 381–385.
- [3] M. Fujii and R. Nakamoto, *Simultaneous extensions of Selberg inequality and Heinz-Kato-Furuta inequality*, Nihonkai Math. J. **9**(1998), 219–225.
- [4] T. Furuta, *$A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$* , Proc. Amer. Math. Soc., **101**(1987), 85–88.
- [5] T. Furuta, *Elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad., **65**(1989), 126.
- [6] T. Furuta, *When does the equality of a generalized Selberg inequality hold?*, Nihonkai Math. J. **2**(1991), 25–29.
- [7] E. Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon., **33**(1988), 883–886.
- [8] K. Kubo and F. Kubo, *Diagonal matrix dominates a positive semidefinite matrix and Selberg's inequality*, preprint.