

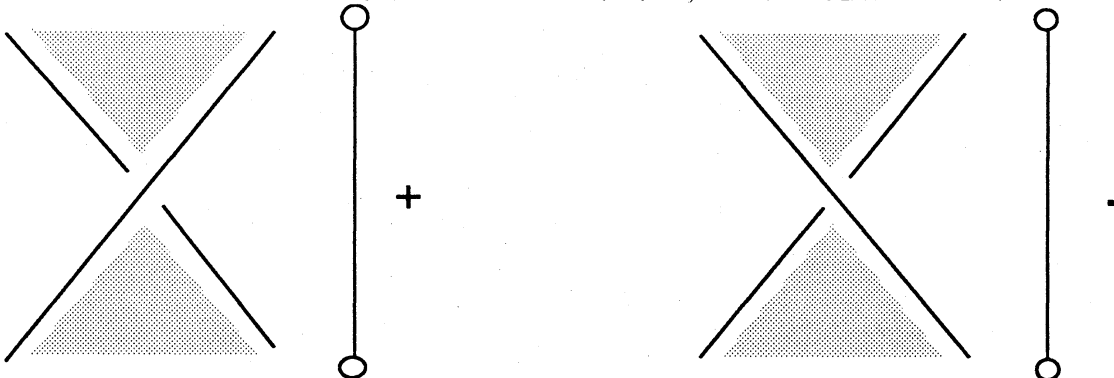
# Generalized Spin Models

Kenichi Kawagoe (川越謙一)     Akihiro Munemasa (宗政昭弘)  
Yasuo Watatani (綿谷安男)

## 1 Introduction

Spin model の概念は Jones [3] によって導入され、その partition function から絡み目の不変量ができることが示された。この講演では、向きのついた絡み目についてこの操作を精密化することを考える。まず spin model からどのようにして向きのない絡み目の不変量ができるかを復習しよう。

向きのない絡み目の diagram  $L$  に対して符号付きグラフを次のように構成する。絡み目の diagram で囲まれた領域を黒と白で塗分ける。このとき、非有界な領域を白で塗り、隣り合った領域は違う色になるようにする。グラフの頂点としては黒く塗られた領域をとり、辺としては絡み目の交差をとる。辺の符号  $+$ ,  $-$  は次の規則によって定める。



今、 $X$  を  $n$  個の元からなる有限集合とし、 $w_+, w_-$  を  $X \times X$  上の複素数値関数とする。 $(a, b)$  成分が  $w_{\pm}(a, b)$  で与えられる行列を  $W_{\pm}$  と書き、 $\circ$  は行列の Hadamard 積を意味する。 $(X, w_+, w_-)$  が spin model とは

- (i)  $W_+$  と  $W_-$  は対称行列である。
- (ii)  $W_+ \circ W_- = J$ .
- (iii)  $W_+ W_- = |X|I$ .
- (iv) 任意の  $a, b, c \in X$  に対して

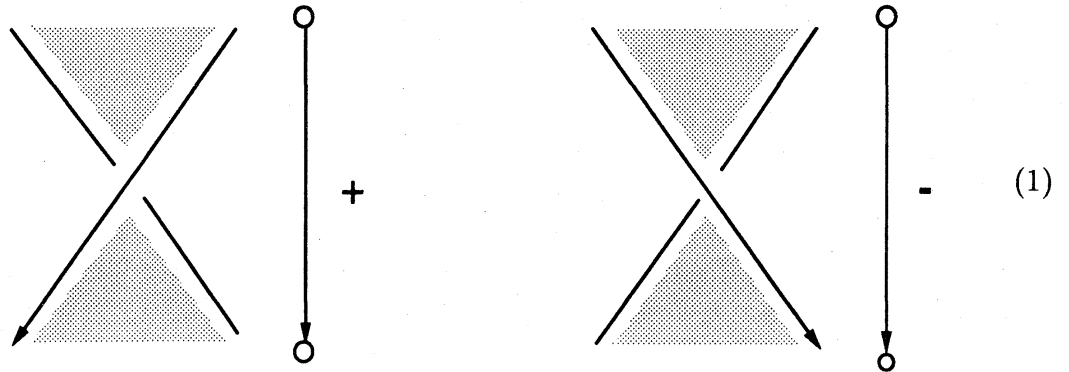
$$\sum_x w_+(a, x) w_+(x, b) w_-(x, c) = \sqrt{|X|} w_+(a, b) w_-(b, c) w_-(a, c)$$

が成り立つ。

ただし  $J$  は成分がすべて 1 の行列、 $I$  は単位行列である。グラフの頂点の数、すなわち黒く塗られた領域の数を  $v(L)$  と書く。Partition function は次で定義される。

$$Z(L) = \sqrt{n}^{-v(L)} \sum_{\sigma} \prod_{(\alpha, \beta)} w_{\epsilon(\alpha, \beta)}(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)),$$

ただし、積はグラフのすべての辺  $(\alpha, \beta)$  についてとり、和はグラフの頂点の集合から  $X$  へのすべての写像  $\sigma$  についてとる。このとき、 $Z(L)$  は type II, III の Reidemeister move で不変であることがわかる。さらに  $Z(L)$  を normalize することにより、向きの付いた絡み目の不変量を得ることもできるが、partition function そのものは絡み目の向きの影響を受けない。絡み目の向きの情報をもっと不変量に伝えるためには向きの付いた符号付きグラフを考えることが自然である。すると辺の向きによって異なった weight を付けることができる。つまり、辺の向きを絡み目の diagram で上にある segment の向きと合うように定めるのである。



すると spin model の概念から対称性の条件 (i) を取り除いた一般化を考える必要が生じる。このように一般化された spin model の定義は次の節で与える。対称性の条件 (i) を落としたとき、他の条件 (ii)–(iv) の類似をみつけることは自明でない。我々の定義は得られた partition function が向きのある絡み目の diagram の type II, III の Reidemeister move で不変であるということを示すことによって正当化される。この結果は宗政–綿谷の論文に対して、V. F. R. Jones が綿谷に提起した結果得られたものである。

## 2 基本的な定義

定義. 有限集合  $X$  上の generalized spin model とは、複素数を成分とする行列の組  $(W_+, W_-)$  で、行、列は  $X$  で index されていてつぎの条件を満たすものである。

- (i)  $W_+^T \circ W_- = J$ .
- (ii)  $W_+ W_- = |X| I$ .
- (iii) 任意の  $a, b, c \in X$  に対して、

$$\sum_x w_+(a, x) w_+(x, b) w_-(x, c) = \sqrt{|X|} w_+(a, b) w_-(b, c) w_-(a, c).$$

これは先に述べた Jones による spin model の概念の一般化である。もし  $(W_+, W_-)$  が generalized spin model ならば、 $(-W_+, -W_-)$  もそうである。

次の式を考える。

$$S_1^\pm(a, b, c) = \sum_x w_\pm(a, x) w_\pm(x, b) w_\mp(x, c) - \sqrt{n} w_\pm(a, b) w_\mp(b, c) w_\mp(a, c),$$

$$S_2^\pm(a, b, c) = \sum_x w_\pm(x, a) w_\pm(x, b) w_\mp(c, x) - \sqrt{n} w_\pm(a, b) w_\mp(b, c) w_\mp(c, a),$$

$$S_3^\pm(a, b, c) = \sum_x w_\pm(a, x)w_\pm(x, b)w_\mp(c, x) - \sqrt{n} w_\pm(a, b)w_\mp(c, b)w_\mp(c, a),$$

$$S_4^\pm(a, b, c) = \sum_x w_\pm(a, x)w_\pm(b, x)w_\mp(x, c) - \sqrt{n} w_\pm(a, b)w_\mp(b, c)w_\mp(c, a).$$

**Proposition 2.1** 複素数を成分とする  $n \times n$  行列の組  $(W_+, W_-)$  が  $W_+^T \circ W_- = J$ ,  $W_+ W_- = nI$  を満たすとする。このとき、 $(W_+, W_-)$  が *generalized spin model* になるための必要十分条件は次のいずれかが成り立つことである。

- (i)  $S_1^+(a, b, c) = 0$  for all  $a, b, c \in X$ ,
- (ii)  $S_1^-(a, b, c) = 0$  for all  $a, b, c \in X$ ,
- (iii)  $S_2^+(a, b, c) = 0$  for all  $a, b, c \in X$ ,
- (iv)  $S_2^-(a, b, c) = 0$  for all  $a, b, c \in X$ ,
- (v)  $S_3^+(a, b, c) = 0$  for all  $a, b, c \in X$ ,
- (vi)  $S_3^-(a, b, c) = 0$  for all  $a, b, c \in X$ ,
- (vii)  $S_4^+(a, b, c) = 0$  for all  $a, b, c \in X$ ,
- (viii)  $S_4^-(a, b, c) = 0$  for all  $a, b, c \in X$ ,

証明 条件 (i) は *generalized spin model* の定義にある条件 (iii) と同値である。つぎの等式は容易に確かめられる。

$$w_+(c, a) \sum_b w_-(b, y) S_1^+(a, b, c) = \sqrt{n} S_2^-(y, c, a).$$

$$w_-(a, c) \sum_b w_+(b, y) S_2^-(a, b, c) = \sqrt{n} S_2^+(c, y, a).$$

$$w_-(b, a) \sum_c w_+(y, c) S_2^+(a, b, c) = \sqrt{n} S_3^-(b, a, y).$$

$$w_-(a, c) \sum_b w_+(b, y) S_3^-(a, b, c) = \sqrt{n} S_3^+(c, y, a).$$

$$w_+(b, c) \sum_a w_-(y, a) S_3^+(a, b, c) = \sqrt{n} S_4^-(c, y, b).$$

$$w_-(c, b) \sum_a w_+(y, a) S_4^-(a, b, c) = \sqrt{n} S_4^+(y, c, b).$$

$$w_-(b, a) \sum_c w_+(c, y) S_4^+(a, b, c) = \sqrt{n} S_1^-(b, a, y).$$

$$w_-(c, b) \sum_a w_+(y, a) S_1^-(a, b, c) = \sqrt{n} S_1^+(y, c, b).$$

以上より、(i)–(viii) のどれも *generalized spin model* の定義にある条件 (iii) と同値であることがわかる。□

**Proposition 2.2** もし  $(W_+, W_-)$  が *generalized spin model* ならば、 $(W_-, W_+)$  および  $(W_+^T, W_-^T)$  もそうである。

証明 Proposition 2.1より明らか。 □

*Examples.*  $\zeta_m = \exp(2\pi i/m)$  とおく。  $W_+$ をつぎのいずれかの行列とする。

$$\zeta_{24} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \zeta_{24}^{16} \\ \zeta_{24}^{16} & 1 & 1 \\ 1 & \zeta_{24}^{16} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta_8 & 1 & \zeta_8^5 \\ \zeta_8^5 & 1 & \zeta_8 & 1 \\ 1 & \zeta_8^5 & 1 & \zeta_8 \\ \zeta_8 & 1 & \zeta_8^5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\zeta_{20} \begin{pmatrix} 1 & \zeta_{20}^8 & 1 & \zeta_{20}^{16} & \zeta_{20}^{16} \\ \zeta_{20}^{16} & 1 & \zeta_{20}^8 & 1 & \zeta_{20}^{16} \\ \zeta_{20}^{16} & \zeta_{20}^{16} & 1 & \zeta_{20}^8 & 1 \\ 1 & \zeta_{20}^{16} & \zeta_{20}^{16} & 1 & \zeta_{20}^8 \\ \zeta_{20}^8 & 1 & \zeta_{20}^{16} & \zeta_{20}^{16} & 1 \end{pmatrix},$$

また、 $W_-$ は条件  $W_+^T \circ W_- = J$  で定まる行列とする。このとき、 $(W_+, W_-)$  は generalized spin model になる。チェックするには  $\sqrt{3} = 2\zeta_{24}^2 - \zeta_{24}^6$ ,  $-2\zeta_{20}^6 + 2\zeta_{20}^4 + 1 = 4\cos \frac{2\pi}{5} + 1 = \sqrt{5}$  を用いよ。

### 3 向きの付いた絡み目の不変量

向きの付いた絡み目の diagram  $\vec{L}$  に対して向きの付いた符号付きグラフを次のように構成する。絡み目の diagram で囲まれた領域を黒と白で塗分ける。このとき、非有界な領域を白で塗り、隣り合った領域は違う色になるようにする。グラフの頂点としては黒く塗られた領域をとり、辺としては絡み目の交差をとる。辺の符号  $+$ ,  $-$  は規則 (1) によって定める。 $(\alpha, \beta)$  が辺のとき、このようにして定義された符号を  $\epsilon(\alpha, \beta)$  で表わす。またグラフの頂点の数を  $v(\vec{L})$  と書く。 $(W_+, W_-)$  が有限集合  $X$  上の generalized spin model のとき、partition function を次で定義する。

$$Z(\vec{L}) = \sqrt{n}^{-v(\vec{L})} \sum_{\sigma} \prod_{(\alpha, \beta)} w_{\epsilon(\alpha, \beta)}(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)), \quad (2)$$

ただし、積はグラフのすべての辺  $(\alpha, \beta)$  についてとり、和はグラフの頂点の集合から  $X$  へのすべての写像  $\sigma$  についてとる。

**Theorem 3.1**  $(W_+, W_-)$  が有限集合  $X$  上の generalized spin model ならば、(2) で定義された partition function は type II, III の Reidemeister move で不変である。

## 4 Skein relations

Generalized spin model  $(X, W_+, W_-)$  に対して、skein relation を次のように求めることができる。 $W_+$  の最小多項式を  $f(x)$  とする。すなわち、

$$f(x) = \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{D^i} x^i$$

ただし、 $D^2 = n$ ,  $a_r = 1$  である。このとき、

$$\sum_{i=0}^r \frac{a_i}{D^i} W_+^i = \frac{a_r}{D^r} W_+^r + \frac{a_{r-1}}{D^{r-1}} W_+^{r-1} + \cdots + \frac{a_1}{D} W_+ + a_0 I = 0. \quad (3)$$

よって

$$\sum_{i=0}^r a_i \circ^i W_+^T = a_r \circ^r W_+^T + a_{r-1} \circ^{r-1} W_+^T + \cdots + a_1 W_+^T + a_0 J = 0. \quad (4)$$

(3) と (4) は [1] に現われる duality map で関係付けられる。また、非有界な領域の色によらないことも確かめられる。(3) と (4) から、skein relation は直ちにわかる。

$$\sum_{i=0}^r a_i Z(\vec{L}_i) = 0$$

ただし、 $\vec{L}_i =$  ,  $Z$  は向きの付いた絡み目用に normalize されているものとする。Section 2 で与えた例について、skein relation を実際に書き下してみよう。

*Examples.* (i)  $\zeta_{24}^8 Z(\vec{L}_1) + \zeta_{24}^{-8} Z(\vec{L}_{-1}) - (\zeta_{24}^4 - \zeta_{24}^{-4}) Z(\vec{L}_0) = 0$  これは Jones 多項式の特値である。

$$(ii) Z(\vec{L}_3) - Z(\vec{L}_2) - \zeta_8^6 Z(\vec{L}_1) + \zeta_8^6 Z(\vec{L}_0) = 0$$

$$(iii) Z(\vec{L}_3) + (\zeta_{20}^6 - \zeta_{20}^4) Z(\vec{L}_2) + (\zeta_{20}^6 - \zeta_{20}^4) Z(\vec{L}_1) + Z(\vec{L}_0) = 0$$

Generalized spin model は絡み目の向きに関する情報を持っているので、invertibility problem (向きの付いた結び目と、その向きを逆にしたものが同値かどうか) に役立てばとても面白い。

**Lemma 4.1**  $(X, W_+, W_-)$  を *generalized spin model* とする。もし置換行列  $P$  で  $W_+^T = PW_+P^{-1}$  となるものが存在すれば、対応する不変量  $Z$  は絡み目の向きを逆にしたときも同じ値を持つ。

証明  $\tau: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  を置換行列  $P$  に対応する置換とする。すると任意の  $\sigma$  と任意の頂点  $\alpha, \beta$  に対して、 $w_{\pm}(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = w_{\pm}(\tau\sigma(\beta), \tau\sigma(\alpha))$  が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} Z(\vec{L}) &= \sum_{\sigma} \prod_{\alpha \rightarrow \beta \text{ in } \vec{L}} w_{\epsilon(\alpha, \beta)}(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) \\ &= \sum_{\sigma} \prod_{\beta \rightarrow \alpha \text{ in } \vec{L}^{-1}} w_{\epsilon(\beta, \alpha)}(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma} \prod_{\beta \rightarrow \alpha \text{ in } \overrightarrow{L^{-1}}} w_{\epsilon(\beta, \alpha)}(\tau\sigma(\beta), \tau\sigma(\alpha)) \\
&= \sum_{\sigma} \prod_{\beta \rightarrow \alpha \text{ in } \overrightarrow{L^{-1}}} w_{\epsilon(\beta, \alpha)}(\sigma(\beta), \sigma(\alpha)) \\
&= Z(\overrightarrow{L^{-1}})
\end{aligned}$$

ただし、 $\overrightarrow{L^{-1}}$  は絡み目  $\overrightarrow{L}$  の向きを逆にしたものである。  $\square$

Generalized spin model だけからは、完全な絡み目の不変量は得られないことが、次の例からわかる。

*Example.* (Pretzel 結び目  $K(P_1, P_2, \dots, P_r)$ )  $r$  を正の奇数とし、 $P_1, P_2, \dots, P_r$  を  $\pm 1$  でない異なる奇数とする。どんな置換  $\tau$  に対しても pretzel 結び目  $K = K(P_1, P_2, \dots, P_r)$ ,  $K_{\tau} = K(P_{\tau(1)}, P_{\tau(2)}, \dots, P_{\tau(r)})$  の適当なグラフは同型となる。したがって  $Z(K) = Z(K_{\tau})$ 。一方 pretzel 結び目の分類 [4] によれば、二つの pretzel 結び目  $K$  と  $K_{\tau}$  が互いに ambient isotopic になるのは  $\tau$  が巡回置換の場合のみである。よって、どんな spin model から得られた不変量の値も一致するような同値でない結び目が存在する。

## References

- [1] E. Bannai and E. Bannai, Generalized spin models and association schemes, preprint.
- [2] T. Ikuta, Non-existence of spin models correspondings to nonsymmetric association schemes of class 2 on  $4m + 3$  vertices if  $m \geq 1$ , preprint.
- [3] V. F. R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pacific. J. Math., **137**(1989), 311–334.
- [4] A. Kawauchi, Classification of pretzel knots, Kobe J. Math., **2**(1985), 11–22.
- [5] A. Munemasa and Y. Watatani, Paires orthogonales de sous-algèbres involutives, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **314**(1992), 329–331.